SUR LA MÉTHODE DE STEFFENSEN POUR LA RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS OPÉRATIONNELLES NON LINÉAIRES *)

PAR

ION PĂVĂLOIU
(Cluj)

Ce travail représente une contribution à l'étude de la convergence du procédé généralisé de Steffensen. En partant du travail [2], on apporte des améliorations aux théorèmes d'existence et d'unicité de la solution de l'équation

$$x = A(x)$$

où A est un opérateur non linéaire défini dans l'espace X de type Banach et qui transforme cet espace en lui-même.

Soit donnée l'équation

$$F(x) = x - A(x) \tag{1}$$

où A est un opérateur non linéaire qui transforme l'espace de Banach X en lui-même.

J. W. Schmith [1] a défini les différences divisées généralisées à l'aide d'un opérateur linéaire $[x, y; F]$ qui possède la propriété :

$$F(y) - F(x) = [x, y; F](y - x), \quad x, y \in X \tag{2}$$

Pour l'équation (1) la méthode généralisée de Steffensen a la forme suivante :

$$x_{n+1} = x_n - [x_n, A(x_n); F]^{-1} F(x_n) \tag{3}$$

Cette méthode est équivalente à la suivante

$$x_{n+1} = A(x_n) - [x_n, A(x_n); F]^{-1} F(A(x_n)) \tag{4}$$

---

*) Travail communiqué à la séance de communications du 30 avril 1967 de l'Institut de Calcul, Cluj.

REV. ROUM. MATH. PURES ET APPL., TOME XIII, N° 6, p. 857-861, BUCAREST, 1968

S. Ulm [2] a donné un théorème dans lequel il a établi des conditions de convergence pour un tel procédé. Dans ce travail l'auteur a donné aussi un théorème d'unicité de la solution de l'équation (1) obtenue par le procédé (3).

Le but de notre travail est d'établir un autre théorème de convergence du procédé (3) dans d'autres hypothèses.

Pour simplifier on désignera par Γ_n l'opérateur $[x_n, A(x_n); F]^{-1}$. Le procédé (3) peut être écrit aussi sous la forme

$$x_{n+1} = x_n - \Gamma_n F(x_n) \tag{3'}$$

et (4) prendra alors la forme

$$x_{n+1} = A(x_n) - \Gamma_n F(A(x_n)).$$

Dans ce qui suit on supposera que l'opérateur A est continu dans un domaine convenable.

THÉORÈME 1. *Si*

a) Γ_0 *est borné c'est-à-dire* $\|\Gamma_0\| \leqslant B_0$

b) $\max\{\|x_1 - x_0\|, \|x_1 - A(x_0)\|\} \leqslant h_0$

c) $\|[x', x''; A] - [x'', x'''; A]\| \leqslant K\|x' - x'''\|$ *pour tout* $x', x'', x''' \in S$

c') $\|[x', x''; A]\| \leqslant M$ *pour tout* $x', x'' \in S$ *et* $M < S$

où

$$S = \{x \in X;\ \|x - x_0\| \leqslant 2h_0\}$$

d) $\eta_0 = B_0 K h_0 < \dfrac{1}{4}$

alors dans la sphères de l'espace X l'équation (1) a une seule solution x^* que l'on obtient comme limite de la suite générée par le procédé (3) ou (4) et pour laquelle on a

$$\|x^* - x_n\| \leqslant \frac{h_0}{2^{n-1}} \tag{5}$$

$$\|x^* - x_n\| \leqslant B_n K \|x^* - x_{n-1}\| \|x^* - A(x_{n-1})\| \tag{6}$$

où

$$B_n = \|\Gamma_n\|.$$

Démonstration. Si on tient compte de l'hypothèse c) on a

$$\|\Gamma_0\{[x_0, A(x_0); F] - [x_1 A(x_1); F]\}\| \leqslant 2B_0 K h_0 = 2\eta_0 < 1$$

donc l'opérateur

$$\Delta_0 = E - \Gamma_0\{[x_0, A(x_0); F] - [x_1, A(x_1); F]\}$$

admet un inverse pour lequel on a

$$\|\Delta_0^{-1}\| \leqslant \frac{1}{1 - 2\eta_0}.$$

Un calcul simple nous montre que

$$\Gamma_1 = \Delta_0^{-1}\Gamma_0 \quad \text{et} \quad \|\Gamma_1\| \leqslant \|\Delta_0^{-1}\| \, \|\Gamma_0\| \leqslant \frac{B_0}{1 - 2\eta_0}$$

De (3) on déduit

$$\|x_2 - x_1\| \leqslant \|\Gamma_1\| \, \|F(x_1)\|.$$

Mais de (2) on peut déduire facilement l'identité

$$F(x_1) = F(x_0) + [x_0, A(x_0); F](x_1 - x_0) + \{[x_1, x_0; F] - [x_0, A(x_0); F]\}(x_1 - x_0)$$

Si l'on tient compte encore de la première itération on en déduit

$$\|F(x_1)\| \leqslant K h_0^2.$$

Ce qui conduit à l'évaluation suivante concernant la norme de la différence $x_2 - x_1$

$$\|x_2 - x_1\| \leqslant \frac{B_0 K h_0^2}{1 - 2\eta_0}.$$

En tenant compte maintenant de l'inégalité d) on a

$$\|x_2 - x_1\| \leqslant \frac{B_0 K h_0^2}{1 - 2\eta_0} \leqslant \frac{1}{2} h_0.$$

En raisonnant d'une manière analogue on déduit que

$$\|x_2 - A(x_1)\| \leqslant \frac{B_0 K h_0^2}{1 - 2\eta_0} \leqslant \frac{1}{2} h_0.$$

On désignera par $\eta_1 = B_1 K h_1$ alors on a

$$\max\{\|x_2 - A(x_1)\|, \|x_2 - x_1\|\} \leqslant \frac{B_0 K h_0^2}{1 - 2\eta_0} = h_1$$

donc

$$\eta_1 = B_1 K h_1 \leqslant \frac{B_0^2 K^2 h_0^2}{(1 - 2\eta_0)^2} < \frac{1}{4}.$$

Par induction on peut démontrer facilement que les relations suivantes ont lieu :

$$B_n = \|\Gamma_n\| \leqslant \frac{B_{n-1}}{1 - 2\eta_{n-1}} \tag{7}$$

$$\eta_{n-1} \leqslant \frac{1}{4} \tag{8}$$

$$h_n = \frac{B_{n-1} K h_{n-1}^2}{1 - 2\eta_{n-1}} \tag{9}$$

$$\max\{\|x_{n+1} - x_n\|, \|x_{n+1} - A(x_n)\|\} \leqslant \frac{B_{n-1} K h_{n-1}^2}{1 - 2\eta_{n-1}} = h_n \tag{10}$$

pour tout $n = 1, 2, \ldots$

On peut remarquer que la suite de nombres

$$\|x_1 - x_0\|,\ \|x_2 - x_1\|,\ \ldots,\ \|x_n - x_{n-1}\|,\ \ldots,$$

satisfait la propriété suivante ;

$$\|x_i - x_{i-1}\| \leqslant h_{i-1} \quad \text{pour tout} \quad i = 1, 2, \ldots,$$

et

$$h_{i-1} \leqslant \frac{1}{2}\, h_{i-2}$$

Nous allons montrer maintenant que les éléments de la suite :

(11) $$x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots$$

appartiennent à la sphère S.

En effet pour tout n on a

$$\|x_n - x_0\| \leqslant h_0 \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2^i} \leqslant 2\, h_0$$

d'où il résulte que $x_n \in S$ pour tout $n = 1, 2, \ldots$ Nous allons montrer à présent que la suite (11) est une suite fondamentale.

En effet on a

$$\|x_{n+p} - x_n\| \leqslant \|x_{n+p} - x_{n+p-1}\| + \ldots + \|x_{n+1} - x_n\| \leqslant$$

$$h_0 \left(\frac{1}{2^{n+p-1}} + \ldots + \frac{1}{2^n}\right) \leqslant \frac{h_0}{2^{n-1}}$$

En passant à la limite quand $p \to \infty$ on en déduit

(12) $$\|x^* - x_n\| \leqslant \frac{h_0}{2^{n-1}}$$

Il en résulte que la suite (11) est convergente et $x^* \in S$. On peut aussi déduire facilement qu'on a

(13) $$\|x^* - A(x_n)\| \leqslant \frac{h_0}{2^{n-1}}$$

L'inégalité (6) se déduit facilement ; c'est pourquoi on n'en donnera pas la démonstration dans ce travail.

En passant à la limite dans l'égalité (3) et en tenant compte du fait que $[x_n, A(x_n); F]$ est un opérateur additif et borné pour tout n, il résulte que x^* vérifie l'équation (1).

Nous allons démontrer que x^* est l'unique solution de l'équation (1).

En effet, en supposant que x^* et x^{**} sont deux solutions de l'équation (1) qui appartiennent à la sphère S on a

$$\|x^* - x^{**}\| \leqslant M \|x^* - x^{**}\| < \|x^* - x^{**}\|$$

ce qui est possible seulement si $x^* = x^{**}$.

Remarque. Si B_n est borné, alors l'ordre de convergence du procédé de Steffensen est 2. Cela résulte de l'inégalité (9). C'est-à-dire $\|B_n\| \leqslant B$ pour tout n on a

$$h_n \leqslant 2B\,K\,h_{n-1}^2$$

et on peut en déduire encore que

$$h_n \leqslant \frac{(2B\,K\,h_0)^{2^n}}{2\,B\,K}$$

Reçu le 6 juin 1967

Institut de Calcul, Cluj

BIBLIOGRAPHIE

1. J. W. SCHMITH, *Konvergenzgeschwindigkeit der im Banachraum.* ZAMM, 1966, **46**, *2*, 146–148.
2. С. УЛЬМ, *Обобщение метода Стеффенсена для решения нелинейных операторных, уравнений.* Жур. вычисл. мат. мат. физики, 1964, **4**, *6*, 1093—1097.
3. А. М. ОСТРОВСКИЙ, *Решение уравнений и система уравнений.* Мат. изд-во ин. лит., 1963.
4. Л. В. КАНТОРОВИЧ, *Функциональный анализ и прикладная математика.* УМН, 1948 (28), **3**, *6*.