ITINERANT SEMINAR ON FUNCTIONAL EQUATIONS,
APPROXIMATION AND CONVEXITY, Cluj-Napoca, 1984.

SUR UNE NOTION DE QUASI-CONVEXITÉ DANS DES ESPACES ABSTRAITS

par

RADU PRECUP
(Cluj-Napoca)

Soient donnés X un ensemble, $S_o \subset S_1 \subset S_2 \subset X$ trois sous-ensembles de X et $\mathcal{U}_1$, $\mathcal{U}_2$ deux ensembles d'opérateurs d'interpolation relative à S_1, respectivement à S_2, c'est-à-dire

(1) $U_1 \in \mathcal{U}_1 \Rightarrow U_1 : X \longrightarrow S_1$ et $U_1 x = x$ pour chaque $x \in S_1$

(2) $U_2 \in \mathcal{U}_2 \Rightarrow U_2 : X \longrightarrow S_2$ et $U_2 x = x$ pour chaque $x \in S_2$

Pour définir une notion de convexité relative à $\mathcal{U}_1$, respectivement à $\mathcal{U}_2$, nous considérons deux partitions des ensembles S_1 et S_2:

(3) $S_1 = S_1^- \cup \tilde{S}_o \cup S_1^+$, où $S_o \subset \tilde{S}_o$

(4) $S_2 = S_2^- \cup \tilde{S}_1 \cup S_2^+$, où $S_1 \subset \tilde{S}_1$.

L'élément $x \in X$ est dit $\mathcal{U}_1$-convexe ($\mathcal{U}_1$-concave) /2/ si

(5) $U_1 x \in S_1^+ \quad (S_1^-) \quad \forall\, U_1 \in \mathcal{U}_1$.

L'élément $x \in X$ est dit $\mathcal{U}_2$-convexe ($\mathcal{U}_2$-concave) si

(6) $U_2 x \in S_2^+ \quad (S_2^-) \quad \forall\, U_2 \in \mathcal{U}_2$.

Dans le travail /3/ on a défini sur l'ensemble d'opérateurs $U : X \longrightarrow X$ la relation suivante:

(7) $U' \prec U \Leftrightarrow UU' = U'U = U'$.

Cette relation est antisymétrique et transitive et sur l'ensemble d'opérateurs d'interpolation relative à un certain sous-ensemble $S \subset X$, elle est aussi réflexive.

DÉFINITION 1. *Soit* $U_2 \in \mathcal{U}_2$. *Nous disons que* (U_1', U_1, U_1'') *est une décomposition relative à* (S_o, S_1) *de l'opérateur* U_2 *si les conditions suivantes sont remplies:*

(8) $\quad U_1',\ U_1,\ U_1'' \in \mathcal{U}_1 \ ; \quad U_1',\ U_1,\ U_1'' < U_2 \ ;$

quelque soit $y \in S_2^+$ *tel que* $U_1 y \in S_o$ *, on a*

(9) $\quad U_1' y \in S_1^- \quad$ *et* $\quad U_1'' y \in S_1^+ \ ;$

quelque soit $y \in S_2^-$ *tel que* $U_1 y \in S_o$ *, on a*

(1o) $\quad U_1' y \in S_1^+ \quad$ *et* $\quad U_1'' y \in S_1^-.$

DÉFINITION 2. *Nous disons que l'élément* $x \in X$ *est* (S_o, S_1, S_2) *- quasi-convexe (quasi-concave) si pour chaque* $U_2 \in \mathcal{U}_2$ *pour lequel il existe une décomposition relative à* (S_o, S_1), (U_1', U_1, U_1''), *telle que* $U_1 x \in S_o$ *, on a:*

$$U_2 x \in S_2^+ \quad (S_2^-).$$

On remarque que si l'élément $x \in X$ est $\mathcal{U}_2$-convexe (concave), alors il est aussi (S_o, S_1, S_2)-quasi-convexe (quasi-concave).

THÉORÈME 1. *Si* $x \in X$ *est un élément* (S_o, S_1, S_2)*-quasi-convexe, alors quelque soit une telle décomposition* (U_1', U_1, U_1'') *relative à* (S_o, S_1) *d'un certain opérateur* $U_2 \in \mathcal{U}_2$, *pour qu'on ait* $U_1 x \in S_o$, *les relations suivantes sont remplies:*

$$U_1' x \in S_1^- \quad \text{et} \quad U_1'' x \in S_1^+.$$

Sous l'hypothèse supplémentaire $\tilde{S}_1 = S_1$ *l'affirmation réciproque est aussi vraie.*

Démonstration. Soit x un élément (S_o, S_1, S_2)-quasi-convexe et (U_1', U_1, U_1'') une décomposition relative à (S_o, S_1) d'un opérateur U_2, telle que $U_1 x \in S_o$. Alors, $y' = U_2 x \in S_2^+$. Il s'ensuit que $U_1 y' = U_1 U_2 x = U_1 x \in S_o$ et par conséquent $U_1' y' \in S_1^-$ et $U_1'' y' \in S_1^+$. D'autre part $U_1' y' = U_1' U_2 x = U_1' x$

et $U_1''y' = U_1''x$, donc $U_1'x \in S_1^-$ et $U_1''x \in S_1^+$. Le théorème direct est démonstré.

Supposons maintenant que $\tilde{S}_1 = S_1$. Trois cas sont possibles: $U_2x \in S_2^+$, ou $U_2x \in S_2^-$, ou $S_2x \in S_1$.
Si on suppose $U_2x \in S_2^-$, alors de la façon indiquée plus haut $U_1'x \in S_1^+$ et $U_1''x \in S_1^-$; mais ces relations sont impossibles.
Si on suppose $U_2x \in S_1$, alors $U_1 U_2x = U_2x = U_1x$, d'où $U_2x \in S_o$ et du fait que $U_1' U_2x = U_1'x = U_2x$ on obtient $U_1'x \in S_o$, ce qui este égalment impossible. Donc $U_2x \in S_2^+$ et le théorème est complètement démontré.

La notion de quasi-convesité ainsi définie est triviale si pour les opérateurs de $\mathcal{U}_2$ il n'existe aucune décomposition relative à (S_o,S_1). On évite cette situation en supposant que $S_1 \subset S_2$ est un segment interpolatoire.

DÉFINITION 3. <u>On dira que</u> $S_1 \subset S_2$ <u>est un segment interpolatoire relatif à</u> S_o <u>si pour chaque opérateur</u> $U_2 \in \mathcal{U}_2$ <u>il existe au moins une décomposition relative à</u> (S_o,S_1).

Nous allons illustrer ces notions par un exemple.

EXEMPLE. Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle , $X = C(I)$, et $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \dots, \mathcal{F}_{n+p}$ $(n>1,\ p\geq 1)$ une section interpolatoire sur I au sens de la définition 1.1.4. de / 1 /. Considérons $S_o = \mathcal{F}_k$, $S_1 = \mathcal{F}_n$, $S_2 = \mathcal{F}_{n+p}$ $(1\leq k<n,\ p\geq 1)$ $S_1 = \mathcal{F}_n^- \cup \tilde{\mathcal{F}}_{n-1} \cup \mathcal{F}_n^+$, $S_2 = \mathcal{F}_{n+p}^- \cup \tilde{\mathcal{F}}_{n+p-1} \cup \mathcal{F}_{n+p}^+$, où $\mathcal{F}_n^+(\mathcal{F}_n^-)$ est l'ensemble des fonctions de $\mathcal{F}_n$ qui sont $\mathcal{F}_{n-1}$-convexes ($\mathcal{F}_{n-1}$-concaves) / 1 /. Les notations $\mathcal{F}_{n+p}^-$, $\mathcal{F}_{n+p}^+$ sont analogues.
Désignons par $\mathcal{U}_1$ et $\mathcal{U}_2$ les ensembles des opérateurs d'interpolation par rapport à $\mathcal{F}_n$, respectivement à $\mathcal{F}_{n+p}$.

LEMME 1. <u>Soient</u> $U_2 = L(\mathcal{F}_{n+p}; x_1, x_2, \ldots, x_{n+p}) \in \mathcal{U}_2$ <u>et</u> $U_1 = L(\mathcal{F}_n; y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathcal{U}_1$, <u>alors les affirmations suivantes sont équivalentes</u>:

(11) $\qquad \underline{U_1 \prec U_2}$

(12) $\qquad \underline{\{y_1, y_2, \ldots, y_n\} \subset \{x_1, x_2, \ldots, x_{n+p}\}}$.

Démonstration. L'image de $f \in C(I)$ par l'opérateur U_1U_2 est uniquement déterminée par les nombres $(f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_{n+p}))$. Si (11) a lieu, alors $U_1U_2 = U_1$. Donc l'image de f par U_1 est déterminée par ces valeurs. D'autre part U_1f est complètement déterminé par $(f(y_1), \ldots, f(y_n))$. En conclusion, U_1f est précisé par les valeurs de f sur les éléments de l'ensemble $A = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\} \cap \{x_1, x_2, \ldots, x_{n+p}\}$. Si $|A| \leq n-1$, alors sur l'ensemble des fonctions de $\mathcal{F}_n$ ayant la même restriction sur A, U_1 serait constant, ce qui contradit le fait quq $U_1f = f$ pour chaque $f \in \mathcal{F}_n$. Donc $|A| = n$ et (12) est démontré.

La réciproque est évidente.

LEMME 2. <u>Si les ensembles interpolatoires</u> $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \ldots, \mathcal{F}_{n+p}$ <u>$(1 \leq k < n,\ p \geq 1)$ sont linéaires, alors chaque décomposition relative à</u> $(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_n)$ <u>d'un certain opérateur</u> $U_2 \in \mathcal{U}_2$, <u>est également une décomposition de</u> U_2 <u>relative à</u> $(\mathcal{F}_k, \mathcal{F}_n)$ <u>$(1 \leq k < n)$, et réciproquement</u>.

Démonstration. Soient (U_1', U_1, U_1'') une décomposition de U_2 relative à $(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_n)$ et $f \in \mathcal{F}^+_{n+p}$ tel que $U_1f \in \mathcal{F}_k$. Alors $f' = f - U_1f \in \mathcal{F}^+_{n+p}$ et $U_1f' \equiv 0 \in \mathcal{F}_1$. Il suit que $U_1'f' \in \mathcal{F}^-_n$ et $U_1''f' \in \mathcal{F}^+_n$, c'est-à-dire $U_1'f - U_1'U_1f \in \mathcal{F}^-_n$ et $U_1''f - U_1''U_1f \in \mathcal{F}^+_n$. Comme $U_1'U_1f,\ U_1''U_1f \in \mathcal{F}_k$, il résulte que $U_1'f \in \mathcal{F}^-_n$ et $U_1''f \in \mathcal{F}^+_n$. L'affirmation réciproque est immédiate.

D'après le lemme 2, dans le cas linéaire une décomposition relative à $(\mathcal{F}_k, \mathcal{F}_n)$ $(1 \leq k < h)$ sera simplement nommée décomposition relative à $\mathcal{F}_n$. De même, un segment interpolatoire relatif à $\mathcal{F}_k$ sera dit simplement: segment interpolatoire.

LEMME 3. <u>Supposons</u> $\tilde{\mathcal{F}}_1 = \mathcal{F}_1$ <u>et</u> $\tilde{\mathcal{F}}_{1+p} = \mathcal{F}_{1+p}$. <u>Alors</u> $\mathcal{F}_2 \subset \mathcal{F}_{2+p}$ <u>est un segment interpolatoire relatif à</u> $\mathcal{F}_1$ <u>si et seulement si</u> $p = 1$.

Démonstration . La suffisance: Soient $p = 1$ et $U_2 = L(\mathcal{F}_3;\ x_1,x_2,x_3)$. Considérons $U_1' = L(\mathcal{F}_2;\ x_1,x_2)$, $U_1 = L(\mathcal{F}_2;\ x_1,x_3)$ et $U_1'' = L(\mathcal{F}_2;\ x_2,x_3)$. Alors (U_1',U_1,U_1'') est une décomposition de U_2 relative à $\mathcal{F}_1$. En effet, si $f \in \mathcal{F}_3^+$ et $U_1 f \in \mathcal{F}_1$, alors nous avons:

(13) $$f(x_3) - U_1' f(x_3) > o,$$

(14) $$U_1 f = L(\mathcal{F}_1;\ x_1;\ f)\ ,$$

(15) $$U_1 f = L(\mathcal{F}_1;\ x_3;\ f)$$

D'après (13) il s'ensuit (voir /1/ p.79)

(16) $$f(x_2) - U_1 f(x_2) < o$$

et en vertu de (14):

$$f(x_2) - L(\mathcal{F}_1;x_1;f)(x_2) < o \quad .$$

Vue que $\tilde{\mathcal{F}}_1 = \mathcal{F}_1$, on déduit $U_1' f \in \mathcal{F}_2^-$.

D'après (16) et tenant compte de (15) il suit

$$f(x_2) - L(\mathcal{F}_1;x_3;f)(x_2) < o$$

d'où $$f(x_3) - L(\mathcal{F}_1;x_2;f)(x_3) > o.$$

Donc, $U_1'' f \in \mathcal{F}_2^+$.

Pour vérifier (1o) on utilise des arguments analogues.

La nécessité: supposons le contraire, c'est-à-dire $p \geq 2$. Nous allons démontrer que pour tout $U_2 \in \mathcal{U}_2$ et quelques soient $U_1', U_1, U_1'' \in \mathcal{U}_1$ vérifiant $U_1', U_1, U_1'' < U_2$, il existe $f \in \mathcal{F}^+_{2+p}$ tel que $U_1 f \in \mathcal{F}_1$ et queles relations $U_1' f \in \mathcal{F}_2^-$ et $U_1'' f \in \mathcal{F}_2^+$ ne soient pas simultanément remplies.

Pour $U_1 = L(\mathcal{F}_2; x_1 x_2)$ on fait la notation $\overline{U}_1 = \{x_1, x_2\}$. Des notations analogues sont faites pour les opérateurs de $\mathcal{U}_2$.

Cas A. Soit $p > 2$. Alors $|\overline{U}_1 \cup \overline{U}_1'| \leq 4 < 2+p$. Vue que $\tilde{\mathcal{F}}_{1+p} = \mathcal{F}_{1+p}$, on peut trouver une fonction $f \in \mathcal{F}_{2+p}^+$ ainsi que les restrictions à $\overline{U}_1 \cup \overline{U}_1'$ de f et d'un certain élément de $\mathcal{F}_1$ soient égales. Ainsi $U_1 f = U_1' f \in \mathcal{F}_1$.

Cas B. Soit $p = 2$. Si $|\overline{U}_1 \cup \overline{U}_1'| \leq 3$, alors on répète le raisonnement fait au cas antérieur. Supposons $|\overline{U}_1 \cup \overline{U}_1'| = 4 = |\overline{U}_2|$. On a $\overline{U}_1 \cap \overline{U}_1' = \emptyset$ et puisque $U_1'' \neq U_1'$, il suit que $|\overline{U}_1 \cup \overline{U}_1''| \leq 3$. Après, on applique le raisonnement antérieur à U_1'' au lieu de U_1'. Le lemme est démontré.

Il est à remarquer qu'on a tenu compte de la condition $\tilde{\mathcal{F}}_1 = \mathcal{F}_1$ seulement pour démontrer le suffisance, et de la condition $\tilde{\mathcal{F}}_{1+p} = \mathcal{F}_{1+p}$ seulement pour la nécessité.

OBSERVATION. On peut prouver de la même façon que si $\tilde{\mathcal{F}}_{n-1} = \mathcal{F}_{n-1}$, alors $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1}$ est un segment interpolatoire relatif à $\mathcal{F}_{n-1}$.

On a le théorème de caractérisation suivant:

THÉORÈME 2. Soit $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset \mathcal{F}_3$ une section interpolatoire sur I tel que $\tilde{\mathcal{F}}_1 = \mathcal{F}_1$ et $\tilde{\mathcal{F}}_2 = \mathcal{F}_2$ et soit $f \in C(I)$. Alors les affirmations suivantes sont équivalentes:

(17) f est $(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3)$-quasi-convexe.

(18) pour tous $x_1, x_2, x_3 \in I$, $x_1 < x_2 < x_3$ vérifiant $L(\mathcal{F}_2; x_1, x_3; f) \in \mathcal{F}_1$, on a $L(\mathcal{F}_3; x_1, x_2, x_3; f) \in \mathcal{F}_3^+$.

(19) pour tous $x_1, x_2, x_3 \in I$, $x_1 < x_2 < x_3$ vérifiant $L(\mathcal{F}_2; x_1, x_3; f) \in \mathcal{F}_1$, on a $L(\mathcal{F}_2; x_1, x_2; f) \in \mathcal{F}_2^-$ et $L(\mathcal{F}_2; x_2, x_3; f) \in \mathcal{F}_2^+$.

Démonstration. (17) $\Rightarrow$ (18): voir la démonstration du lemme 3.

(18) $\Rightarrow$ (17): Considérons un opérateur $U_2 \in \mathcal{U}_2$, soit il $U_2 = L(\mathcal{F}_3; x_1, x_2, x_3)$, où $x_1 < x_2 < x_3$. Soit (U_1', U_1, U_1'') une décomposition de U_2, relative à $(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$. D'après (9) $U_1' \neq U_1 \neq U_1'' \neq U_1'$ et en tenant compte du lemme 1, on aura $\{U_1', U_1, U_1''\} = \{L(\mathcal{F}_2; x_1, x_2), L(\mathcal{F}_2; x_1, x_3), L(\mathcal{F}_2; x_2, x_3)\}$. Il nous reste à démontrer que $U_1 = L(\mathcal{F}_2; x_1, x_3)$. Supposons le contraire, disons $U_1 = L(\mathcal{F}_2; x_1, x_2)$. Comme $\tilde{\mathcal{F}}_2 = \mathcal{F}_2$, on peut trouver $g \in \mathcal{F}_3^+$ tel que $U_1 g \in \mathcal{F}_1$, d'où $L(\mathcal{F}_2; x_1, x_2; g) = L(\mathcal{F}_1; x_1, ; g) = L(\mathcal{F}_1; x_2; g)$.
Du fait que $g \in \mathcal{F}_3^+$ il suit $L(\mathcal{F}_2; x_1, x_2; g)(x_3) < g(x_3)$, ou $L(\mathcal{F}_1; x_1; g)(x_3) < g(x_3)$, ou encore

(2o) $$L(\mathcal{F}_1; x_1; L(\mathcal{F}_2; x_1, x_3; g))(x_3) < g(x_3)$$

De la façon analogue on obtient

(21) $$L(\mathcal{F}_1; x_2; L(\mathcal{F}_2; x_2, x_3; g))(x_3) < g(x_3).$$

Ainci, les relations (2o),(21) rendent impossibles les relations $U_1' g \in \mathcal{F}_2^-$ et $U_1'' g \in \mathcal{F}_2^+$.

(18) $\Leftrightarrow$ (19): on applique le théorème 1.

REMARQUE. Désignons par $\mathcal{P}_m$, l'ensemble des polynômes de degné m. Alors, compte tenu du théorème 2 et des résultats de / 2 /, il suit qu'une fonction $f \in C(I)$ est $(\mathcal{P}_o, \mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2)$-quasi-convexe si et seulement si elle est strictement quasi-convexe au sens habituel .

Pour términer faisons quelques observations sur les notions de quasi-convexité définies à l'aide des ensembles de polynômes. Soient: $K^+(\mathcal{P}_k, \mathcal{P}_n, \mathcal{P}_{n+1})$, l'ensemble des fonctions de C(I) qui sont $(\mathcal{P}_k, \mathcal{P}_n, \mathcal{P}_{n+1})$-quasi-convexes ($o \leq k \leq n-1$), et K_n^+, l'ensemble des fonctions continues et convexes d'ordre n sur I.

Du lemme 2 on déduit la hiérarchie suivante:

$$K_n^+ \subset K^+(\mathcal{P}_{n-1}, \mathcal{P}_n, \mathcal{P}_{n+1}) \subset K^+(\mathcal{P}_{n-2}, \mathcal{P}_n, \mathcal{P}_{n+1}) \subset \cdots \tag{22}$$

$$\cdots \subset K^+(\mathcal{P}_o, \mathcal{P}_n, \mathcal{P}_{n+1})$$

Il faut à remarquer que les fonctions n-valentes sur I par rapport à $\mathcal{P}_{n-1}$, $\mathcal{P}_{n-2}$, ..., respectivement à $\mathcal{P}_o$, sont $(\mathcal{P}_{n-1}, \mathcal{P}_n, \mathcal{P}_{n+1})$-quasi-convexes, $(\mathcal{P}_{n-2}, \mathcal{P}_n, \mathcal{P}_{n+1})$-quasi-convexes, ..., respectivement $(\mathcal{P}_o, \mathcal{P}_n, \mathcal{P}_{n+1})$-quasi-convexes.

BIBLIOGRAPHIE

/1/ Popoviciu, E., Teoreme de medie din analiza matematică şi legătura lor cu teoria interpolării, Ed.Dacia, Cluj, 1972.

/2/ Popoviciu, E., Sur quelques propriétés des fonctions quasi-convexes, Itinerant Seminar on Functional Equations, Approx. and Convexity, Cluj-Napoca, 1983, pp.1o7-114.

/3/ Ivan, M., Opérateurs d'interpolation dans des espaces abstraits, L'Analyse Numérique et la Théorie de l'Approximation, 4, 1, 19-28 (1975).

/4/ Popoviciu, T., Deux remarques sur les fonctions convexes, Bull.Soc.Sci.Acad.Roumaine, 22o, 45-49 (1938).

/5/ Precup, R., Continuity of Quasiconvex Functionals and of Hemimonotone Nonlinear Operators, Seminarul itinerant de ec. funcţ. aprox. şi convex., Cluj-Napoca, 1982, pp.297-3o2.