ITINERANT SEMINAR ON FUNCTIONAL EQUATIONS,
APPROXIMATION AND CONVEXITY, Cluj-Napoca, 1987

SUR UNE THÉORIE DE L'ALLURE ET SES CONSÉQUENCES

RADU PRECUP
(Cluj-Napoca)

1. Introduction. Dans de nombreux domaines des mathématiques, le concept de convexité intervient dans une acception ou l'autre en servant un but ou étant imposé par la technique de la démonstration ou par des nécessités du calcul.

Une hypothèse de convexité dans un sens précisé, imposée dans un problème ou l'autre peut conduire à des résultats d'existence, d'unicité, de stabilité, de convergence des certains procédés d'approximation, etc.

L'emploi de plus en plus fréquent de la convexité est lié au déplacement de l'accent du côté de la "mathématique linéaire" vers la "mathématique non - linéaire". Une propriété de convexité imposée aux certains objets mathématiques représente une mesure (un contrôle, une limite) de leur non - linéarité. Elle revient le plus souvent à un "comportement" précisé de l'objet doté de cette propriété, par rapport à un certain ensemble d'objets de référence et à une certaine famille d'opérateurs. Par exemple, considérons la propriété de convexité (concavité) d'ordre n ($n \geq -1$) au sens de Tiberiu Popoviciu [18], d'une fonction réelle définie sur l'ensemble $D \subset \mathbb{R}$. Par définition cette propriété revient à la positivité (négativité) des coefficients des termes du degré $n+1$ des polynômes d'interpolation de Lagrange $L(\mathcal{P}_{n+1}; x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}; f)$ qui coïncident avec la fonction f sur n+2 points distincts $x_1, x_2, \ldots, x_{n+2} \in D$. Si nous désignons par $\mathcal{P}_{n+1}$ l'ensemble des polynômes du dégré $\leq n+1$ et par $\mathcal{P}^{+}_{n+1}$ ($\mathcal{P}^{-}_{n+1}$) son sous-ensemble dont les éléments ont le coefficient du terme du degré $n+1$ positif (négatif), alors la convexité (concavité) d'ordre n de la fonction f revient au fait que $L(\mathcal{P}_{n+1}; x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}; f) \in \mathcal{P}^{+}_{n+1}$ ($\mathcal{P}^{-}_{n+1}$) pour tous les points distincts $x_1, x_2, \ldots, x_{n+2} \in D$. On met ainsi en évidence un comportement de la fonction f par rapport au couple $(\mathcal{P}^{+}_{n+1}, \mathcal{L}_{n+1})$ (respectivement $(\mathcal{P}^{-}_{n+1}, \mathcal{L}_{n+1})$), où $\mathcal{L}_{n+1}$ désigne la famille de tous les opérateurs $L(\mathcal{P}_{n+1}; x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}; \cdot)$, où $x_1, x_2, \ldots, x_{n+2} \in D$. On dit en ce cas que la fonction f a l'allure $(\mathcal{P}^{+}_{n+1}, \mathcal{L}_{n+1})$ (respectivement l'allure $(\mathcal{P}^{-}_{n+1}, \mathcal{L}_{n+1})$). Ce moyen de comprendre la convexité appartient au Prof. Dr. Elena Popoviciu et il a conduit [13] à la définition d'un concept général d'allure :

Soit X un ensemble et Y un sous-ensemble non-vide de X. Supposons que l'on a fait une partition de l'ensemble Y, $Y = Y_1 \cup Y_2 \cup \ldots \cup Y_k$, $Y_i \cap Y_j = \emptyset$, pour $i \neq j$, $k \geq 2$. Considérons un ensemble non-vide $\mathcal{U}$ dont les éléments sont des opérateurs $U : X \to Y$.

DÉFINITION 1 ([13]). <u>On dit que l'élément</u> $x \in X$ <u>a l'allure</u> (Y_j, U) <u>si</u> $Ux \in Y_j$.

DÉFINITION 2 ([13]). <u>On dit que l'élément</u> $x \in X$ <u>a l'allure</u> $(Y_j, \mathcal{U})$ <u>si pour chaque</u> $U \in \mathcal{U}$ <u>il a l'allure</u> (Y_j, U).

Dans l'exemple ci-dessus, X est l'ensemble de toutes les fonctions $f : D \to \mathbb{R}$, $Y = \mathcal{P}_{n+1}$ et la partition est la suivante: $\mathcal{P}_{n+1} = \mathcal{P}^{+}_{n+1} \cup \mathcal{P}_{n} \cup \mathcal{P}^{-}_{n+1}$. L'allure $(\mathcal{P}^{+}_{n+1}, L(\mathcal{P}_{n+1}; x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}; \cdot))$ revient à la convexité d'ordre n sur les points $x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}$, pendant que l'allure ($\mathcal{P}^+_{n+1}$, $\mathcal{L}_{n+1}$) revient à la convexité d'ordre n sur D. De même, les fonctions ayant l'allure ($\mathcal{P}_n$, L ($\mathcal{P}_{n+1}$; $x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}$; .)) sont polynômiales d'ordre n sur les points $x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}$ et les fonctions ayant l'allure ($\mathcal{P}_n$, $\mathcal{L}_{n+1}$) sont polynômiales d'ordre n sur D. On peut considérer d'autres partitions de l'ensemble $\mathcal{P}_{n+1}$ pour que l'on obtienne d'autres allures. À titre d'exemple, considérons la partition $\mathcal{P}_{n+1} = \mathcal{P}^-_{n+1} \cup (\mathcal{P}_n \cup \mathcal{P}^+_{n+1})$. Les fonctions ayant l'allure ($\mathcal{P}_n \cup \mathcal{P}^+_{n+1}$, L ($\mathcal{P}_{n+1}$; $x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}$;.)) sont non-concaves d'ordre n sur les points $x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}$ et les fonctions ayant l'allure ($\mathcal{P}_n \cup \mathcal{P}^+_{n+1}$, $\mathcal{L}_{n+1}$) sont non-concaves d'ordre n sur D. Également, on peut considérer des sous-ensembles de $\mathcal{L}_{n+1}$ pour que l'on obtienne de nouvelles allures. Par exemple, pour une fonction quelconque f considérons l'ensemble $\mathcal{L}^f_2$ des opérateurs L ($\mathcal{P}_2$; x_1, x_2, x_3; .) $\in \mathcal{L}_2$ pour lesquels L ($\mathcal{P}_1$; x_1, x_3 ; f) $\in \mathcal{P}_0$, c'est-à-dire $f(x_1) = f(x_3)$. Alors, la fonction continue f a l'allure ($\mathcal{P}^+_2$, $\mathcal{L}^f_2$) si et seulement si elle est strictement quasi-convexe sur D et f a l'allure ($\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}^+_2$, $\mathcal{L}^f_2$) si et seulement si elle est quasi-convexe sur D (voir [14]). Ces considérations nous ont conduit en [19] à la définition en abstrait de l'élément quasi-convexe.

D'autres exemples d'allures peuvent être trouvés dans nos travaux [19], [21] .

Les notions introduites par les définitions 1 et 2 sont à la base de toute une théorie qui, d'une part permet un traitement unitaire des différents cas particuliers d'allures et d'autre part peut être enrichie jusqu'à obtenir de nouveaux résultats (voir par exemple, les théorèmes de la moyenne concernant le comportement des certaines fonctionnelles non-linéaires par rapport aux éléments quasi-convexes).

2. <u>La théorie abstraite de l'allure</u>. Dans ce qui suit nous allons présenter les moments principaux qui ont conduit au développement de la théorie abstraite de l'allure.

I. Opérateurs d'interpolation dans des espaces abstraits et éléments convexes par rapport à un sous-espace :

Considérons un ensemble X, un sous-ensemble non-vide Y de X et un opérateur U défini sur X aux valeurs en X.

DÉFINITION 3 ([12]). <u>L'opérateur</u> U <u>est dit opérateur d'interpolation par rapport à</u> Y <u>si les conditions suivantes sont remplies</u> :

(1) $Ux \in Y$ <u>pour tout</u> $x \in X$;

(2) $Ux = x$ <u>pour tout</u> $x \in Y$.

Soit $\mathcal{U}$ une famille d'opérateurs d'interpolation par rapport à Y et soit S un sous-ensemble de Y.

DÉFINITION 4 ([12]). <u>L'élément</u> $x \in X$ <u>est dit convexe par rapport à</u> S <u>si quelque soit</u> $U \in \mathcal{U}$, $Ux \notin S$.

II. La généralisation dans des espaces linéaires abstraits du théorème de la moyenne de Tiberiu Popoviciu, concernant les fonctionnelles $\mathcal{P}_n$ - simples :

Soit X un espace linéaire, $S \subset Y$ deux sous-espaces linéaires de X, $S \neq Y$, $\mathcal{U}$ un ensemble d'opérateurs linéaires d'interpolation par rapport à Y et A une fonctionnelle linéaire définie sur X.

THÉORÈME 1 ([12]). <u>Si pour la fonctionnelle</u> A <u>les conditions suivantes sont remplies</u> :

(3) $A(x) = 0$ <u>quelque soit</u> $x \in S$;

(4) $A(x) \neq 0$ <u>quelque soit l'élément</u> x <u>convexe par rapport à</u> S ; <u>alors, pour chaque</u> $x \in X$ <u>il existe</u> $U \in \mathcal{U}$ <u>tel que</u>

(5) $A(x) = A(Ux)$.

III. La généralisation de la notion de différence divisée :

À l'égard de l'hypothèse énoncée avant le théorème 1, supposons en plus que S est un sous-espace propre maximal de Y. Soit fixé $y_0 \in Y \setminus S$ et soit U un opérateur linéaire d'interpolation par rapport à Y.

DÉFINITION 5 ([7]). <u>On dit que la fonctionnelle linéaire</u> F <u>définie sur</u> X <u>est une différence divisée attachée à l'opérateur</u> U <u>si les conditions suivantes sont remplies</u> :

(6) $F \circ U = F$;

(7) $F(S) = \{0\}$;

(8) $F(y_0) = 1$.

Dans le travail [7] on démontre que les conditions (6)-(8) déterminent de manière unique la fonctionnelle F. Elle sera désignée par $[U ; .]$.

À l'aide des différences divisées on peut donner une autre généralisation du théorème de la moyenne de Tiberiu Popoviciu :

THÉORÈME 2 ([7]). <u>Si pour la fonctionnelle</u> A <u>les conditions</u> (3) <u>et</u> (4) <u>sont remplies, alors il existe un scalaire</u> k <u>ainsi que pour chaque</u> $x \in X$ <u>on peut trouver</u> $U \in \mathcal{U}$ <u>tel que</u>

(9) $A(x) = k\,[U ; x]$.

Il est facile à voir qu ' un élément x est convexe par rapport à S si et seulement si quelque soit $U \in \mathcal{U}$, $[U; x] \neq 0$ [7].

DÉFINITION 6 ([8]). <u>On dit que l'élément</u> $x \in X$ <u>est</u> $\mathcal{U}$- <u>convexe</u> ($\mathcal{U}$- <u>concave</u>) <u>si quelque soit</u> $U \in \mathcal{U}$, <u>il satisfait la condition</u>

(10) $$[U ; x] > 0 \quad (< 0).$$

Il est à remarquer que la propriété de $\mathcal{U}$- convexité peut être introduite en suivant la définition 2, sans utiliser les différences divisées. En effet, comme S est un sous-espace propre maximal de Y, on a la partition $Y = Y^- \cup S \cup Y^+$, où $Y^+(Y^-) = \{ y \in Y; \; y = s + ty_0, \; s \in S, \; t > 0 \; (t < 0) \}$. Alors, la condition nécessaire et suffisante pour que l'élément x soit $\mathcal{U}$- convexe ($\mathcal{U}$- concave) est qu'il ait l'allure (Y^+, $\mathcal{U}$) (respectivement (Y^-, $\mathcal{U}$)).

IV. La définition d'une relation d'ordre dans l'ensemble des opérateurs d'interpolation :

DÉFINITION 7 ([6]). <u>Soit</u> U <u>et</u> V <u>deux opérateurs linéaires définis sur l'espace linéaire</u> X <u>aux valeurs en</u> X, <u>tels que</u> $U^2 = U$ <u>et</u> $V^2 = V$. <u>On dit que</u> $V \prec U$ <u>si</u>

(11) $$UV = VU = V.$$

Par exemple, pour les opérateurs $U = L(\mathcal{P}_{n+p-1} ; x_1, x_2, \ldots, x_{n+p} ; \cdot)$ et $V = L(\mathcal{P}_{n-1} ; y_1, y_2, \ldots, y_n ; \cdot)$ où $p \geq 0$, on a $V \prec U$ si et seulement si $\{ y_1, y_2, \ldots, y_n \} \subset \{ x_1, x_2, \ldots, x_{n+p} \}$ (voir [21]).

V. La formule de réecurence des différences divisées généralisées :

Considérons les sous-espaces $S_0 \subset S_1 \subset S_2$ de l'espace linéaire X, où S_1 et S_0 sont sous-espaces propres maximaux de S_2, respectivement de S_1. Soit U_2 un opérateur d'interpolation par rapport à S_2, $y_2 \in S_2 \setminus S_1$ l'élément nécessaire pour normer la différence divisée $[U_2;\cdot]$ conformément à la condition (8) et soit U_1 et U_1' deux opérateurs d'interpolation par rapport à S_1 tels que $U_1 < U_2$ et $U_1' < U_2$.

THÉORÈME 3 ([8]). <u>Si les différences divisées des opérateurs</u> U_1 <u>et</u> U_1' <u>sont distinctes, alors quelque soit</u> $x \in X$, <u>la relation suivante est satisfaite</u> :

$$(12) \qquad [U_2 ; x] = \frac{[U_1 ; x] - [U_1' ; x]}{[U_1 ; y_2] - [U_1' ; y_2]} .$$

Dans le cas particulier où $U_2 = L(\mathcal{P}_n; x_1, x_2, \dots, x_{n+1}; \cdot)$, $U_1 = L(\mathcal{P}_{n-1}; x_2, x_3, \dots, x_{n+1}; \cdot)$, $U_1' = L(\mathcal{P}_{n-1}; x_1, x_2, \dots, x_n; \cdot)$ et où y_2 est le polynôme $x^n \in \mathcal{P}_n \setminus \mathcal{P}_{n-1}$, la relation (12) devient la formule de réccurence bien connue :

$$(13) \qquad [x_1, x_2, \dots, x_{n+1}; \cdot] = \frac{[x_2, x_3, \dots, x_{n+1}; \cdot] - [x_1, x_2, \dots, x_n; \cdot]}{x_{n+1} - x_1}$$

VI. La notion de décomposition d'un opérateur d'interpolation :

Soit X un ensemble $S_0 \subset S_1 \subset S_2$ trois sous-ensembles non-vides de X et $\mathcal{U}_1$ et $\mathcal{U}_2$ deux ensembles dont les éléments sont des opérateurs d'interpolation par rapport à S_1, respectivement à S_2. Supposons données deux partitions des ensembles S_1 et S_2 :

$$(14) \qquad S_1 = S_1^- \cup \widetilde{S}_0 \cup S_1^+ \quad \text{où} \quad S_0 \subset \widetilde{S}_0 ;$$

$$(15) \qquad S_2 = S_2^- \cup \widetilde{S}_1 \cup S_2^+ \quad \text{où} \quad S_1 \subset \widetilde{S}_1 .$$

DÉFINITION 8 ([19]). <u>Nous disons qu'un triplet ordonné</u> (U_1', U_1, U_1'') <u>d'opérateurs de</u> $\mathcal{U}_1$ <u>est une décomposition relative à</u> (S_0, S_1) <u>de l'opérateur</u> $U_2 \in \mathcal{U}_2$, <u>si les conditions suivantes sont rempliès</u> :

(16) $U_1', U_1, U_1'' \prec U_2$;

(17) $U_1'y \in S_1^-$ <u>et</u> $U_1''y \in S_1^+$ <u>pour tout</u> $y \in S_2^+$ <u>tel que</u> $U_1y \in S_0$;

(18) $U_1'y \in S_1^+$ <u>et</u> $U_1''y \in S_1^-$ <u>pour tout</u> $y \in S_2^-$ <u>tel que</u> $U_1y \in S_0$.

Pour en donner un exemple, soit X l'ensemble des fonctions réelles définies sur un intervalle $\mathcal{J} \subset \mathbb{R}$, $S_0 = \mathcal{P}_0$, $S_1 = \mathcal{P}_n$, $S_2 = \mathcal{P}_{n+1}$ $(n \geqslant 1)$, $S_1^- = \mathcal{P}_n^-$, $\widetilde{S}_0 = \mathcal{P}_{n-1}$, $S_1^+ = \mathcal{P}_n^+$, $S_2^- = \mathcal{P}_{n+1}^-$, $\widetilde{S}_1 = \mathcal{P}_n$, $S_2^+ = \mathcal{P}_{n+1}^+$ et soit $\mathcal{U}_1 = \mathcal{L}_n$ et $\mathcal{U}_2 = \mathcal{L}_{n+1}$.

Considérons $U_2 = L(\mathcal{P}_{n+1}\,;\, x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}\,;\, \cdot\,) \in \mathcal{U}_2$.

THÉORÈME 4 ([20]). <u>Un triplet ordonné</u> (U_1', U_1, U_1'') <u>d'opérateurs de</u> $\mathcal{L}_n$ <u>est une décomposition de l'opérateur</u> U_2 <u>relative à</u> ($\mathcal{P}_0$, $\mathcal{P}_n$), <u>si et seulement si</u>

$$U_1' = L(\mathcal{P}_n\,;\, x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_{n+2}\,;\, \cdot\,),$$

$$U_1 = L(\mathcal{P}_n\,;\, x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_{n+2}\,;\, \cdot\,),$$

$$U_1'' = L(\mathcal{P}_n\,;\, x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_{n+2}\,;\, \cdot\,),$$

<u>où</u> $1 \leqslant k < j < i \leqslant n+2$.

Dans le cas particulier où $n=1$, chaque opérateur $U_2 = L(\mathcal{P}_2\,;\, x_1, x_2, x_3\,;\cdot\,) \in \mathcal{L}_2$ a une seule décomposition relative à ($\mathcal{P}_0$, $\mathcal{P}_1$), notamment :

$(L (\mathcal{P}_1 ; x_1, x_2 ; \cdot), L (\mathcal{P}_1 ; x_1, x_3 ; \cdot), L(\mathcal{P}_1 ; x_2, x_3 ; \cdot))$.

VII. Quasi-convexité dans des espaces abstraits :

Lié aux partitions (14) et (15), nous disons qu'un élément $x \in X$ est $\mathcal{U}_1$ - convexe ($\mathcal{U}_1$ - concave) si il a l'allure ($S_1^+, \mathcal{U}_1$) (respectivement ($S_1^-, \mathcal{U}_1$)) et qu'il est $\mathcal{U}_2$ - convexe ($\mathcal{U}_2$ - concave) si il a l'allure ($S_2^+, \mathcal{U}_2$) (respectivement ($S_2^-, \mathcal{U}_2$)).

DÉFINITION 9 ([19]). <u>Nous disons que l'élément</u> $x \in X$ <u>est quasi-convexe (quasi-concave) par rapport à</u> (S_0, S_1, S_2), <u>si quelque soit</u> $U_2 \in \mathcal{U}_2$ <u>pour lequel il existe une décomposition</u> (U_1', U_1, U_1'') <u>relative à</u> (S_0, S_1) <u>telle que</u> $U_1 x \in S_0$, <u>la condition suivante est satisfaite</u> :

(19) $\quad U_2 x \in S_2^+ \ (S_2^-)$.

Si pour un élément x nous désignons par $\mathcal{U}_2^x$ l'ensemble des opérateurs $U_2 \in \mathcal{U}_2$ pour lesquels il existe une décomposition (U_1', U_1, U_1'') relative à (S_0, S_1), telle que $U_1 x \in S_0$, alors la condition nécessaire et suffisante pour que x soit quasi-convexe (quasi-concave) par rapport à (S_0, S_1, S_2), est qu'il ait l'allure ($S_2^+, \mathcal{U}_2^x$) (respectivement ($S_2^-, \mathcal{U}_2^x$). De plus, comme $\mathcal{U}_2^x \subset \mathcal{U}_2$ il s'en suit que tout élément $\mathcal{U}_2$ - convexe ($\mathcal{U}_2$ - concave) est quasi-convexe (quasi-concave) par rapport à (S_0, S_1, S_2).

THÉORÈME 5 ([19]). <u>Si</u> x <u>est un élément quasi-convexe (quasi-concave) par rapport à</u> (S_0, S_1, S_2), <u>alors pour tout</u> $U_2 \in \mathcal{U}_2$ <u>et quelle que soit sa décomposition</u> (U_1', U_1, U_1'') <u>relative à</u> (S_0, S_1) <u>telle que</u> $U_1 x \in S_0$, <u>les conditions suivantes sont remplies</u> :

(20) $\quad U_1' x \in S_1^- \ (S_1^+)$ <u>et</u> $U_1'' x \in S_1^+ \ (S_1^-)$.

Sous l'hypothèse supplémentaire $\widetilde{S}_1 = S_1$, la proposition réciproque est aussi vraie.

Dans le travail [19] nous étudions en détail l'exemple où X est l'espace des fonctions réelles difinies sur un intervalle $\mathcal{J}$, S_0, S_1, S_2 sont sous-ensembles (généralement non-linéaires) interpolatoires d'ordre k, n et respectivement n+p ($1 \leqslant k < n$, $p \geqslant 1$) et $\mathcal{U}_1$, $\mathcal{U}_2$ sont les ensembles des opérateurs d'interpolation par rapport à S_1, respectiment à S_2 (voir [12]). Cet exemple est typique pour la situation de la non-linéarité de notre construction abstraite.
Considérons le cas encore plus particulier, dans lequel les ensembles interpolatoires S_0, S_1, S_2 sont les ensembles des polynômes $\mathcal{P}_k$, $\mathcal{P}_n$, $\mathcal{P}_{n+1}$, où $0 \leqslant k \leqslant n-1$. Désignons par $QK^+(\mathcal{P}_k, \mathcal{P}_n, \mathcal{P}_{n+1})$ l'ensemble des fonctions réelles définies sur l'intervalle $\mathcal{J}$ qui sont quasi-convexes par rapport à $(\mathcal{P}_k, \mathcal{P}_n, \mathcal{P}_{n+1})$ et par K_n^+ l'ensemble des fonctions réelles définies sur $\mathcal{J}$, convexes d'ordre n sur $\mathcal{J}$.

THÉORÈME 6 ([19]). La hiérarchie suivante a lieu :

$$(21)\quad K_n^+ \subset QK^+(\mathcal{P}_{n-1}, \mathcal{P}_n, \mathcal{P}_{n+1}) \subset QK^+(\mathcal{P}_{n-2}, \mathcal{P}_n, \mathcal{P}_{n+1}) \subset \dots$$
$$\dots \subset QK^+(\mathcal{P}_0, \mathcal{P}_n, \mathcal{P}_{n+1}).$$

À noter qu'une fonction continue sur $\mathcal{J}$ est quasi-convexe par rapport à $(\mathcal{P}_0, \mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2)$ si et seulement si elle est strictement quasi-convexe au sens usuel. La manière dont intervient la continuité dans la démonstration de cette proposition, nous a suggéré la définition des éléments qui jouissent de la propriété (D), dans des espaces linéaires abstraites [22] .

VIII. Quasi-convexité dans des espaces linéaires :

Soit X un espace linéaire réel, $S_0 \subsetneqq S_1 \subsetneqq S_2$ trois sous-espaces linéaires de X et $\mathcal{U}_1$, $\mathcal{U}_2$ deux ensembles d'opérateurs linéaires d'interpolation par rapport à S_1 et respectivement à S_2. On associe aux opérateurs de $\mathcal{U}_2$ les différences divisées définies à l'aide d'un sous-espace $\widetilde{S}_1$ propre et maximal de S_2 contenant S_1 et d'un élément $y_2 \in S_2 \setminus \widetilde{S}_1$. Aux opérateurs de $\mathcal{U}_1$ on associe les différences divisées définies à l'aide d'un sous-espace $\widetilde{S}_0$ propre et maximal de S_1 avec $S_0 \subset \widetilde{S}_0$ et d'un élément $y_1 \in S_1 \setminus \widetilde{S}_0$.

Considérons les partitions suivantes :

(22) $$S_1 = S_1^- \cup \widetilde{S}_0 \cup S_1^+$$

où $S_1^-(S_1^+) = \{ x \in S_1 ; [U_1 ; x] < 0 \ (> 0) \text{ pour tout } U_1 \in \mathcal{U}_1 \}$

et

(23) $$S_2 = S_2^- \cup \widetilde{S}_1 \cup S_2^+$$

où $S_2^-(S_2^+) = \{ x \in S_2 ; [U_2 ; x] < 0 \ (> 0) \text{ pour tout } U_2 \in \mathcal{U}_2 \}$.

Dans tout ce qui suit nous supposerons $\widetilde{S}_1 = S_1$.

La linéarité implique la précisation suivante concernant la notion de décomposition d'un opérateur.

LEMME ([20]). Soit $U_2 \in \mathcal{U}_2$. Les propositions suivantes sont vraies :

1°. Le triplet (U_1', U_1, U_1'') où $U_1', U_1, U_1'' \in \mathcal{U}_1$ et $U_1', U_1, U_1'' \prec U_2$, est une décomposition de U_2, relative à (S_0, S_1) si et seulement si il existe $y \in S_2^+$ tel que les inégalitiés suivantes soient satisfaites :

(24) $$[U_1' ; y] < [U_1 ; y] < [U_1'' ; y] .$$

2°. Si $S_0' \subset \widetilde{S}_0$, alors toute décomposition de U_2 relative à (S_0, S_1) est également une décomposition de U_2 relative à (S_0', S_1).

Nous mentionnons que dans la démonstration de ce lemme nous avons utilisé la formule de récurrence des différences divisées.

THÉORÈME 7 ([20]). Soit $x \in X$. Les propositions suivantes sont équivalentes :

1° x est quasi-convexe par rapport à (S_0, S_1, S_2) ;

2° Pour chaque $U_2 \in \mathcal{U}_2$ et quelsque soient $U_1', U_1, U_1'' \in \mathcal{U}_1$ tels que $U_1', U_1, U_1'' \prec U_2$, $[U_1; x] = 0$ et pour lesquels il existe $y \in S_2^+$ ainsi que la condition (24) soit remplie, les inégalités suivantes ont lieu :

$$[U_1'; x] < 0 < [U_1''; x] \quad . \tag{25}$$

Remarquons que les inégalités (25) satisfaites par les éléments quasi-convexes par rapport à (S_0, S_1, S_2), sont similaires aux inégalités (24), satisfaites, comme on peut voir aisément, par tous les éléments $\mathcal{U}_2$ - convexes. La seule différence est que les premières ont lieu sous l'hypothèse $[U_1; x] = 0$. On observe que si y est $\mathcal{U}_2$ - convexe, alors de (24) il résulte que

$$0 < \max \left\{ -[U_1'; y] , [U_1''; y] \right\} . \tag{26}$$

Donc, l'ensemble des éléments $\mathcal{U}_2$ - convexes est inclu dans l'ensemble des éléments satisfaisant à (26). Il est naturel de nous demander quelle est la liaison entre ce dernier ensemble et celui des éléments quasi-convexes par rapport à (S_0, S_1, S_2).

DÉFINITION 10 ([20]). <u>Nous disons que l'élément</u> $y \in X$ <u>est fortement quasi-convexe par rapport à</u> (S_0, S_1, S_2), <u>si pour toute décomposition</u> (U_1', U_1, U_1'') <u>relative à</u> (S_0, S_1) <u>d'un opérateur quelconque de</u> $\mathcal{U}_2$, <u>l'inégalité</u> (26) <u>est satisfaite</u>.

Conformément à l'observation antérieure, tout élément $\mathcal{U}_2$ - convexe est également fortement quasi-convexe. Quand à la liaison entre les notions de fortement quasi-convexité et quasi-convexité, on a le résultat suivant :

THÉORÈME 8 ([20]). <u>Tout élément fortement quasi-convexe est quasi-convexe</u>.

Dans le cas particulier qui fait l'objet du théorème 4 on peut, donner, à l'aide de ce théorème, la caractérisation suivante des éléments fortement quasi-convexes par rapport à $(\mathcal{P}_0, \mathcal{P}_n, \mathcal{P}_{n+1})$:

THÉORÈME 9 ([20]). <u>La fonction réelle f définie sur l'intervalle</u> $\mathcal{J}$ <u>est fortement quasi-convexe par rapport à</u> $(\mathcal{P}_0, \mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2)$ <u>si et seulement si pour chaque système de points</u> $x_1 < x_2 < \dots < x_{n+2}$ <u>de</u> $\mathcal{J}$ <u>et quelsque soient</u> i <u>et</u> k <u>tels que</u> $1 \leqslant k < i \leqslant n+2$ <u>et</u> $i-k \geqslant 2$, <u>la condition suivante est remplie</u> :

$$(27) \qquad 0 < \max \Big\{ -[x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{n+2} ; f] , \; [x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_{n+2} ; f] \Big\} .$$

Il s'en suit que toute fonction fortement quasi-convexe par rapport à $(\mathcal{P}_0, \mathcal{P}_n, \mathcal{P}_{n+1})$, est "strictement quasi-convexe d'ordre n-1" au sens de Elena Popoviciu [13] .

À l'égard de ce cas particulier il est aussi à remarquer que pour les fonctions continues sur $\mathcal{J}$ les propriétés de fortement quasi-convexité et quasi-convexité par rapport à

($\mathcal{P}_0$, $\mathcal{P}_n$, $\mathcal{P}_{n+1}$), sont equivalentes. Dans le cas général des espaces linéaires abstraits on impose des conditions du genre continuité pour que la réciproque du théorème 8 soit vraie [22].

IX. Théorèmes de la moyenne :

Dans la définition 10 des éléments fortement quasi-convexes interviennent les fonctionnelles non-linéaires

(28) $\quad A(x) = \max \left\{ - \left[U_1'; x \right], \left[U_1''; x \right] \right\} \quad (x \in X)$

alors que les éléments fortement quasi-concaves peuvent être définis à l'aide des fonctionnelles

(29) $\quad B(x) = \min \left\{ - \left[U_1'; x \right], \left[U_1''; x \right] \right\}$,

en imposant la condition $B(x) < 0$ pour toute fonctionnelle B.

Les fonctionnelles (28) jouissent des propriétés :

(30) $\quad A(\lambda x) = \lambda A(x)$ pour tous $x \in X$ et $\lambda > 0$;

(31) $\quad A(\lambda x) = |\lambda| A(x)$ pour tous $x \in S_1$ et $\lambda \in \mathbb{R}$;

(32) $\quad A(x+y) \leqslant A(x) + A(y)$ si $x \in S_1$ ou $y \in S_1$;

pendant que les fonctionnelles (29) satisfont aux conditions (30), (31) et à la relation

(33) $\quad B(x+y) \geqslant B(x) + B(y)$ si $x \in S_1$ ou $y \in S_1$.

Si on identifie le sous-espace linéaire généré par y_1 à $\mathbb{R}$ à l'aide de l'application $\lambda \longmapsto \lambda y_1$ ($\lambda \in \mathbb{R}$), alors on peut considérer $\mathbb{R}$ comme un sous-espace de X. Si nous considérons la partition $\mathbb{R} = \mathbb{R}_- \cup \{0\} \cup \mathbb{R}_+$, où $\mathbb{R}_- =]-\infty, 0[$, $\mathbb{R}_+ =]0, +\infty[$ et les ensembles $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ dont les éléments sont les fonctionnelles du type (28), respectivement (29), alors nous pouvons dire que les éléments fortement quasi-convexes (fortement quasi-concaves) sont ceux qui ont l'allure ($\mathbb{R}_+$, $\mathcal{A}$) (respectivement ($\mathbb{R}_-$; $\mathcal{B}$)).

Les affirmations suivantes sont des remarques évidentes :

1^0. Si pour une fonctionnelle $A \in \mathcal{A}$ l'élément x a l'allure ($\mathbb{R}_-$, A), alors il existe une fonctionnelle $B \in \mathcal{B}$ telle que x ait aussi l'allure ($\mathbb{R}_-$, B).

2^0. Si pour une fonctionnelle $B \in \mathcal{B}$ l'élément x a l'allure ($\mathbb{R}_+$, B), alors il existe une fonctionnelle $A \in \mathcal{A}$ telle que x ait l'allure ($\mathbb{R}_+$, A).

Nous nous demandons si l'affirmation 1^0 (2^0) reste valable si à la place de la fonctionnelle A (respectivement B) on prend une fonctionnelle quelconque satisfaisant aux conditions (30), (31) et (32) (respectivement (33)). La réponse est affirmative pour les fonctionnelles possédant de plus la propriété :

(34) $F(x) > 0$ pour tout x fortement quasi-convexe ;

respectivement :

(35) $F(x) < 0$ pour tout x fortement quasi-concave.

Soit $x \in X$ et F une fonctionnelle définie sur X.

THÉORÈME 10 ([22]). 1^0. <u>Si</u> F <u>satisfait aux conditions (30) - (32) et (34) et si</u> $F(x) < 0$, <u>alors il existe une fonctionnelle</u> B <u>du type (29) telle que</u> $B(x) < 0$.

2^0. <u>Si</u> F <u>satisfait aux conditions (30), (31), (33) et (35) et si</u> $F(x) > 0$, <u>alors il existe une fonctionnelle</u> A <u>du type (28) telle que</u> $A(x) > 0$.

Dans la démonstration de la proposition 1^0 de ce théorème sont mis en évidence les inégalités

(36) $$\frac{F(s)}{k}\left[U_1''; x\right] \leqslant F(x) \leqslant \frac{F(s)}{k}\left[U_1'; x\right] ,$$

où $s \in S_1^+$ et $k = \left[U_1; s\right]$ (quelque soit $U_1 \in \mathcal{U}_1$). Nous sommes intéressés au cas où dans la formule (36) a lieu l'égalité, pour qu'on obtient un théorème de représentation de la fonctionnelle F à l'aide des différences divisées des opérateurs de $\mathcal{U}_1$.

DÉFINITION 11 ([22]). Nous disons que l'élément $x \in X$ jouit de la propriété (C) si pour chaque décomposition (U_1', U_1, U_1'') d'un opérateur quelconque de $\mathcal{U}_2$ et quelque soit le nombre λ entre $[U_1'; x]$ et $[U_1''; x]$, il existe au moins un opérateur $V_1 \in \mathcal{U}_1$ tel que $[V_1; x] = \lambda$.

THÉORÈME 11 ([22]). Supposons que pour la fonctionnelle F soient remplies les conditions (30) - (32) et (34). Alors, pour tout élément $x \in X$ jouissant de la propriété (C) et pour lequel $F(x) < 0$, il existe un opérateur $V_1 \in \mathcal{U}_1$ tel que

$$F(x) = K[V_1; x] \tag{37}$$

où K est un constante positive indépendante de x.

À noter que les fonctionnelles de la classe $\mathcal{A}$ satisfont aux conditions (30) - (32) et (34). Dans le travail [22] nous indiquons comment on peut construire d'autres fonctionnelles pour lesquelles ces conditions soient remplies et nous fournisons une application du théorème 11.

Dans le théorème suivant nous envisageons le comportement des fonctionnelles linéaires par rapport aux éléments fortement quasi-convexes.

On fait l'hypothèse supplémentaire qu'il existe au moins un élément $s \in S_2 \setminus S_1$ $\mathcal{U}_1$ - convexe.

THÉORÈME 12 ([22]). Soit F une fonctionnelle linéaire définie sur X pour laquelle $F(x) \neq 0$ quelque soit $x \in X \setminus S_1$ fortement quasi-convexe. Alors, pour tout $s \in S_2 \setminus S_1$, $\mathcal{U}_1$ - convexe ou $\mathcal{U}_1$ - concave et pour tout $x \in X \setminus S_2$, il existe $V_1 \in \mathcal{U}_1$ tel que

$$(38)\qquad \left|\frac{F(x)}{F(s)}\right| \leq \left|\frac{[V_1;\, x]}{[V_1;\, s]}\right|.$$

Dans le travail [22] nous étudions aussi le comportement des fonctionnelles linéaires par rapport aux éléments quasi-convexes. On prouve, par exemple, que les fonctionnelles linéaires F qui ne s'annulent pas sur l'ensemble des élements quasi-convexes par rapport à (S_o,S_1,S_2), sont $\widetilde{S}_o$-simples (c'est-à-dire, $F(\widetilde{S}_o) = \{0\}$ et $F(x) \neq 0$ quelque soit x convexe par rapport à $\widetilde{S}_o$).

BIBLIOGRAPHIE

[1] BECKENBACH, E.F., Generalized Convex Functions, Bull.Am.Math. Soc., 43, 363-371 (1937).

[2] BERNSTEIN, S.N., Quelques remarques sur l'interpolation, Math. Ann., 79, 1-12 (1918).

[3] BONSALL, F.F., The caracterization of generalized convex-functions, Canad. J. Math., 1, 100-111 (1950).

[4] DAVIS, P.J., Interpolation and Approximation, Blaisdell, New York, 1963.

[5] GONCIAROV, V.L., Teoria interpolirovania i priblijenia funcţii, Goz. Izd., Moskva-Leningrad, 1954.

[6] IVAN, M., Opérateurs d'interpolation dans des espaces abstraits, L'analyse Num. et la Th. de l'Approx., 4, 1, 19-28 (1975).

[7] IVAN, M., Différences divisées et fonctionnelles de la forme simple, L'analyse Num. et la Th. de l'Approx., 9, 1, 55-58 (1980).

[8] IVAN, M., Procedee de interpolare şi aplicaţii ale lor, Thése de doctorat, Cluj Napoca, 1982.

[9] JENSEN, J.L.W.V., Sur les fonctions convexes et les inégalités entre les valeurs moyennes, Acta Math., 30, 175-193 (1906).

[10] KARLIN, S.J., STUDDEN, W.J., Tchebycheff systems with applications in analysis and statistics, Interscience Publ., New-York-London-Sydney, 1966.

[11] MÜHLBACH, G., A recurrence formula for generalized divided differences and some applications, J.Approximation Th., 9, 165-172 (1973).

[12] POPOVICIU, ELENA, Teoreme de medie din analiza matematică şi legătura lor cu teoria interpolării, Ed. Dacia,Cluj, 1972.

[13] POPOVICIU, ELENA, Sur une allure de quasi-convexité d'ordre supérieur, L'analyse Num. et la Th. de l'Approx., 11, 129-137 (1982).

[14] POPOVICIU, ELENA, Sur certains propriétés des fonctions quasi-convexes I, L'analyse Num. et la Th. de l'Approx., 12, 2, 175-186 (1983).

[15] POPOVICIU, TIBERIU, Sur quelques propriétés des fonctions d'une ou de deux variables réelles, Mathematica, Cluj, VIII, 1-85 (1933).

[16] POPOVICIU, TIBERIU, Deux remarques sur les fonctions convexes, Bull. Soc. Sci. Acad. Roumaine, 220, 45-49 (1938).

[17] POPOVICIU, TIBERIU, Notes sur les fonctions convexes d'ordre supérieur (IX), Bull. Math. de la Soc. Roumaine de Sci., 43, 85-141 (1941).

[18] POPOVICIU, TIBERIU, Les fonctions convexes, Hermann&Cie, Paris, 1945.

[19] PRECUP, R., Sur une notion de quasi-convexité dans des espaces abstraits, "Babeş-Bolyai" Univ., Fac. of Math., Preprint nr. 6/1984, 143-150.

[20] PRECUP, R., Quasi-convexity in linear spaces, "Babeş-Bolyai" Univ., Fac. of Math., Preprint nr. 6/1985, 159-164.

[21] PRECUP, R., Proprietăţi de alură şi unele aplicaţii ale lor, Thèse de doctorat, Cluj Napoca, 1985.

[22] PRECUP, R., L'allure de quasi-convexité dans des espaces abstraits (sous presse).

This paper is in a final form and no version of it will be submitted for publication elsewhere.