ITINERANT SEMINAR ON FUNCTIONAL EQUATIONS,
APPROXIMATION AND CONVEXITY, Cluj-Napoca, 1988

FONCTIONS CONVEXES ET FONCTIONNELLES DE FORME SIMPLE

par

RADU PRECUP
(Cluj Napoca)

1. Dans le travail [4] on a donné une caractérisation des fonctions convexes d'ordre 1 (strictement convexes) et deux fois dérivables sur l'intervalle (0,1), en utilisant les coefficients de Fourier. Plus précisement, si la fonction $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ est strictement convexe sur l'intervalle (0,1), alors le coefficient de Fourier

$$(1) \qquad a_1(f;s,t) = 2(t-s)^{-1} \int_s^t f(y) \cos \frac{2\pi (y-s)}{t-s} dy$$

est positif quel que soit le sous-intervalle $[s,t]$ de $(0,1)$. Réciproquement, si la fonction f est deux fois dérivable sur l'intervalle (0,1) et $a_1(f;s,t) > 0$ quel que soit $[s,t] \subset (0,1)$, alors f est strictement convexe sur l'intervalle (0,1).

Dans cette note nous envisageons de généraliser ce résultat en considérant certaines fonctionnelles de forme simple à la place des coefficients de Fourier.

2. Considérons l'intervalle $[a,b]$, l'ensemble $\mathcal{P}_1$ des polynômes de degré ≤ 1 et notons $e_i(x) = x^i$, $x \in [a,b]$, $i=0,1$.

Une fonctionnelle linéaire $L : C[a,b] \to \mathbb{R}$ est dite $\mathcal{P}_1$-<u>simple</u> s'il existe un scalaire positif K tel que quelle que soit $f \in C[a,b]$ on peut trouver les points t_1, t_2, t_3 distincts dans l'intervalle $[a,b]$ ainsi que

(2) $$L(f) = K\left[t_1, t_2, t_3; f\right],$$

où par $\left[t_1, t_2, t_3; f\right]$ on a désigné la différence divisée d'ordre 2 de f sur les points t_1, t_2, t_3.

Une fonctionnelle linéaire $L : C[a,b] \to \mathbb{R}$ est $\mathcal{P}_1$-simple si et seulement si les deux conditions suivantes sont remplies :

(3) $$L(e_0) = L(e_1) = 0 \quad ;$$

(4) $L(f) > 0$ quelle que soit $f \in C[a,b]$ convexe d'ordre 1 (voir [2 ; 5.4.1]).

Pour un intervalle $[s,t]$ quelconque nous considérons l'opérateur $D_{s,t} : C[s,t] \to C[a,b]$ défini par

(5) $$D_{s,t}(f)(x) = f(x(t-s)/(b-a) + (bs-at)/(b-a)) \quad ,$$

$x \in [a,b]$, $f \in C[s,t]$.

Si $L : C[a,b] \to \mathbb{R}$ est une fonctionnelle $\mathcal{P}_1$-simple et f est une fonction continue et strictement convexe sur un intervalle I, alors

(6) $$L(D_{s,t}(f)) > 0 \quad ,$$

pour tout $[s,t] \subset I$.

On se demande quelles sont les fonctionnelles $\mathcal{P}_1$-simples pour lesquelles, si (6) a lieu pour tout $[s,t] \subset I$, il s'en suit que f est strictement convexe sur I ?

Pour en donner une réponse rappelons qu'une fonction f est dite <u>strictement quasi-convexe</u> sur un intervalle $[s,t]$ si

(7) $$f(x_2) < \max\,(f(x_1)\ ,\ f(x_3)) \quad ,$$

pour chaque système de trois points $s \leq x_1 < x_2 < x_3 \leq t$.

THÉORÈME 1. Si $L : C[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonctionnelle $\mathcal{P}_1$-simple, alors les assertions suivantes sont équivalentes:

1°. Pour qu'une fonction f deux fois dérivable sur un intervalle I soit strictement convexe sur I, il faut et il suffit que (6) ait lieu quel que soit $[s,t] \subset I$;

2°. Si f est une fonction deux fois dérivable, strictement quasi-convexe et non-monotone sur un intervalle $[s,t]$, alors il existe s' et t', $s \leq s' < t' \leq t$, tels que

$$L(D_{s',t'}(f)) \geq 0.$$

Démonstration. $1^\circ \Rightarrow 2^\circ$. Supposons le contraire, c'est-à-dire qu'il existe une fonction f deux fois dérivable, strictement quasi-convexe et non-monotone sur un intervalle $[s,t]$, telle que $L(D_{s',t'}(f)) < 0$ quel que soit $[s',t'] \subset [s,t]$. Alors, en vertu de 1°, f devrait être strictement concave sur $[s,t]$, ce qui est impossible à cause du fait que f est strictement quasi-convexe et non-monotone sur $[s,t]$.

$2^\circ \Rightarrow 1^\circ$. Considérons une fonction f deux fois dérivable sur un intervalle I pour laquelle la condition (6) est remplie quel que soit $[s,t] \subset I$. Cependant, supposons que f n'est pas convexe sur I. Alors, il existe $x_0 \in I$ tel que $f''(x_0) < 0$. Il s'en suit qu'il existe $r > 0$ tel que $f'(x) > f'(x_0)$ pour tout $x \in [x_0 - r, x_0)$ et $f'(x) < f'(x_0)$ pour tout $x \in (x_0, x_0 + r]$. Par conséquent, on peut trouver une fonction linéaire h telle que la fonction $g = f - h$ soit strictement croissante sur $[x_0 - r, x_0]$ et strictement décroissante sur $[x_0, x_0 + r]$. Par suite, $(-g)$ est strictement quasi-convexe et non-monotone sur l'intervalle $[x_0 - r, x_0 + r]$. En conséquence, d'après 2°, il existe $s', t' \in [x_0 - r, x_0 + r]$ tels que $L(D_{s',t'}(-g)) \geq 0$, d'où à cause de (3),

$L(D_{s',t'}(-f)) \geqslant 0$, c'est-à-dire $L(D_{s',t'}(f)) \leqslant 0$, ce qui contredit (6). Donc, f est convexe sur I et en vertu de (6), elle est surtout strictement convexe sur I.

3. Exemples et applications.

a) Considérons la fonctionnelle $L : C[0,2\pi] \to \mathbb{R}$,

$$L(f) = \int_0^{2\pi} f(x)\cos x\, dx \qquad (f \in C[0,2\pi]). \tag{8}$$

Cette fonctionnelle satisfait de toute évidence la condition (3). Pour vérifier (4), soit $f \in C[0,2\pi]$ une fonction strictement convexe sur $[0,2\pi]$ et soit h la fonction linéaire qui coincide avec f aux points $\pi/2$ et $3\pi/2$. Comme $(f(x)-h(x))\cos x > 0$ quel que soit $x \in [0,2\pi] \setminus \{\pi/2, 3\pi/2\}$, il vient $L(f-h)>0$, d'où en tenant compte que $L(h) = 0$, on a $L(f) > 0$. Donc, L est $\mathcal{P}_I$-simple. De plus, pour cette fonctionnelle la proposition 2° du Théorème 1 est vraie. En effet, prenons f une fonction strictement quasi-convexe, non-monotone sur un intervalle $[s,t]$ et prouvons qu'il existe s' et t', $s \leqslant s' < t' \leqslant t$ tels que $L(D_{s',t'}(f)) \geqslant 0$. Pour cela, soit $u \in (s,t)$ tel que f est strictement décroissante sur $[s,u]$ et strictement croissante sur $[u,t]$. On peut choisir deux points $x_2 \in (s,u)$ et $x_3 \in (u,t)$ tels que $f(x_2) = f(x_3)$ et $x_3-x_2 \leqslant (2/3)\min(u-s, t-u)$. Si on pose $s' = x_2 - (x_3-x_2)/2$ et $t' = x_3 + (x_3-x_2)/2$, alors $s \leqslant s' < t' \leqslant t$ et $D_{s',t'}(f - f(x_2))(x)\cos x \geqslant 0$ quel que soit $x \in [0,2\pi]$. Par conséquent, $L(D_{s',t'}(f-f(x_2))) \geqslant 0$ et en définitive $L(D_{s',t'}(f)) \geqslant 0$, ce qu'il fallait démontrer.

Maintenant, en appliquant le théorème 1 on obtient

COROLLAIRE 2 (H.T. Wang). Pour qu'une fonction f deux fois dérivable sur l'intervalle $(0,1)$ soit strictement convexe

<u>sur (0,1), il faut et il suffit que</u>

(9) $\underline{a_1(f;s,t) > 0 \quad \text{pour tout } [s,t] \subset (0,1).}$

<u>Démonstration</u>. Par le changement de variable $y = x(t-s)/(2\pi) + s$, où $x \in [0,2\pi]$, on trouve que

$$L(D_{s,t}(f)) = \pi a_1(f;s,t)$$

et en suite on applique le Théorème 1.

b) Soient donnés $\alpha > -1$ et $\beta > -1$. Notons $w(x) = (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}$, $x \in (-1,1)$ et désignons par $P_2^{(\alpha,\beta)}$ le polynôme de Jacobi de degré 2. Considérons la fonctionnelle $L : C[-1,1] \to \mathbb{R}$, où

$$(10) \qquad L(f) = \int_{-1}^{1} w(x)P_2^{(\alpha,\beta)}(x)f(x)dx \quad (f \in C[-1,1]).$$

Cette fonctionnelle est $\mathcal{P}_1$-simple (voir [1]). De plus, pour cette fonctionnelle l'assertion 2° du Théorème 1 est également vraie. En effet, soit f une fonction strictement quasi-convexe, non-monotone sur $[s,t]$ et soit $u \in (s,t)$ tel que f soit strictement décroissante sur $[s,u]$ et strictement croissante sur $[u,t]$. Nous choisissons les points $x_2 \in (s,u)$ et $x_3 \in (u,t)$ tels que $f(x_2) = f(x_3)$, et $x_3-x_2 \leq (\gamma_2-\gamma_1)\min((x_2-s)/(\gamma_1+1)$, $(t-x_3)/(1-\gamma_2))$, où γ_1 et γ_2 $(-1 < \gamma_1 < \gamma_2 < 1)$ sont les racines de $P_2^{(\alpha,\beta)}$. En posant $s'=x_2-(\gamma_1+1)(x_3-x_2)/(\gamma_2-\gamma_1)$ et $t'= x_3 + (1-\gamma_2)(x_3-x_2)/(\gamma_2-\gamma_1)$, nous avons $s \leq s' < t' \leq t$ et $D_{s',t'}(f-f(x_2))(x)P_2^{(\alpha,\beta)}(x) \geq 0$ quel que soit $x \in [-1,1]$. Par conséquent, $L(D_{s',t'}(f)) \geq 0$.

En appliquant le Théorème 1 on obtient

COROLLAIRE 2. Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I soit strictement convexe sur I est que

$$(11)\qquad \int_{-1}^{1} w(x)P_2^{(\alpha,\beta)}(x)f(t(1+x)/2 + s(1-x)/2)dx > 0$$

quel que soit $[s,t] \subset I$.

Dans un travail prochain nous envisagerons de généraliser ces résultats pour les fonctions convexes d'ordre n et des fonctionnelles $\mathcal{P}_n$-simples $(n > 1)$.

BIBLIOGRAPHIE

1. LUPAŞ, A., Teoreme de medie pentru coeficienţii Fourier - Jacobi, Revista de Analiză Numerică şi Teoria Aproximaţiei (Cluj), 3, 79-84 (1974).

2. POPOVICIU, E., Teoreme de medie din analiza matematică şi legătura lor cu teoria interpolării, Ed.Dacia, Cluj, 1972.

3. POPOVICIU, T., Asupra restului în unele formule liniare de aproximare ale analizei, Stud.Cerc.Mat.(Cluj), X, 2, 337-389 (1959).

4. WANG, H.T., Convex functions and Fourier coefficients, Proc.Amer.Math.Soc., 94, 641-646 (1985).

Departement de mathématiques
Université „Babeş-Bolyai"
3400, Cluj Napoca
Romania

This paper is in final form and no version of it will be submitted for publication elsewhere.