Seminar of Functional Analysis and
Numerical Methods, Preprint Nr. 1, 1984, pp. 97 - 104.

RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS À L'AIDE DES FONCTIONS SPLINE D'INTERPOLATION INVERSE

par

C. Iancu et I. Păvăloiu

Dans ce qui suit nous présentons une généralisation du résultat présenté dans le travail [2], concernant la résolution des équations à l'aide des fonctions spline d'interpolation inverse.

Considérons l'équation

$$(1) \qquad f(x) = 0$$

où $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction réelle d'une variable réelle et I est un intervalle de l'axe réel.

Nous désignons par E un ensemble de m nombres réels distincts de I, notamment

$$(2) \qquad x_1 < x_2 < \ldots < x_m$$

En ce qui concerne la fonction f nous supposerons connues ses valeurs $y_i^{(o)} = f(x_i)$, $i = 1,2,\ldots,m$ ainsi que les valeurs de ses dérivées successives jusqu'à l'ordre $n-1$ au point x_1, $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire $f'(x_1) = y_1^{(1)}$, $f''(x_1) = y_1^{(2)}$, ..., $f^{(n-1)}(x_1) = y_1^{(n-1)}$.

Une telle fonction peut être obtenue à la suite d'une expérience ou bien, par exemple, comme solution numérique d'un problème de type Cauchy relatif à une équation différentielle.

Pour fixer les idées, nous supposerons que l'équation (1) admet une seule racine $\overline{x} \in I$ et qu'il existe deux nombres réels

$x_p, x_{p+1} \in E$ tels que $f(x_p).f(x_{p+1}) < 0$, c'est-à-dire $x \in (x_p, x_{p+1})$.

Dans la travail [2] l'auteur construit des fonctions spline d'interpolation inverse du troisième degré, à l'aide desquelles il procède à l'approximation des racines des équations de la forme (1).

Dans ce qui suit nous nous proposons d'utiliser le polynome d'interpolation inverse de type Hermite à deux noeuds, étudié en [3] , afin de présenter une généralisation des résultats contenus dans [2].

Nous désignons par V_{x_1} un voisinage du point x_1 et écrivons $F_1 = f(V_{x_1})$. Nous supposerons par la suite que la restriction de la fonction f à l'ensemble V_{x_1} est bijective et que $y_1^{(1)} \neq 0$; en ce cas, les dérivées successives de la fonction f^{-1} au point y_1 peuvent s'obtenir à l'aide de la formule [4] :

$$(3)\quad \left[f^{-1}(y_1)\right]^{(k)} = \sum \frac{(2k-2-i_1)!(-1)^{k-1+i_1}}{i_2!\dots i_k!(f'(x_1))^{2k-1}} \left(\frac{f'(x_1)}{1!}\right)^{i_1} \dots \left(\frac{f^{(k)}(x_1)}{k!}\right)^{i_k}$$

où la somme ci-dessus concerne toutes les solutions entières et non-négatives du système d'équations

$$(4)\quad \begin{aligned} &i_2 + 2i_3 + \dots + (k-1)i_k = k-1 \\ &i_1 + i_2 + \dots + i_k = k-1 \quad , \; k = 1,2,\dots,n-1 \,. \end{aligned}$$

Le polynome d'Hermite d'interpolation inverse aux points $y_1^{(o)}$, $y_2^{(o)}$ prendra alors la forme suivante :

$$(5)\quad P_1(y) = \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-j-1}\left[f^{-1}(y_1)\right]^{(j)} \frac{1}{k!\;j!}\left[\frac{(y-y_1)^n}{\omega_1(y)}\right]^{(k)}_{y=y_1} \frac{\omega_1(y)}{(y-y_1)^{n-j-k}} + x_2\left(\frac{y-y_1}{y_2-y_1}\right)^n$$

$$(6)\quad \omega_1(y) = (y-y_1)^n(y-y_2)$$

Nous désignerons par $P_s(y)$ le polynôme d'interpolation inverse d'Hermite dans l'intervalle $[y_s, y_{s+1}]$ qui remplit les conditions:

$$(7)\quad \begin{cases} P_s^{(r)}(y_s) = P_{s-1}^{(r)}(y_s) \quad , \; r = 0,1,\dots,n-1 \\ P_s(y_{s+1}) = x_{s+1} \end{cases}$$

Dans ces conditions, $P_s(y)$ prendra la forme suivante

$$(8)\quad P_s(y) = \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-j-1}\left[P_{s-1}(y_s)\right]^{(j)} \frac{1}{k!\;j!}\left[\frac{(y-y_s)^n}{\omega_s(y)}\right]^{(k)}_{y=y_s} \frac{\omega_s(y)}{(y-y_s)^{n-j-k}} + x_{s+1}\left(\frac{y-y_s}{y_{s+1}-y_s}\right)^n ,$$

où

$$(9)\quad \omega_s(y) = (y-y_s)^n(y-y_{s+1})$$

pour $s = 2,3,\dots,p$.

Il est facile de voir que l'expression (8) peut s'écrire sous la forme

$$(10)\quad P_s(y) = \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-j-1}\left[P_{s-1}(y_s)\right]^{(j)} \frac{(-1)^k(y-y_s)^{j+k}(y-y_{s+1})}{j!\,(y_s-y_{s+1})^{k+1}} + x_{s+1}\left(\frac{y-y_s}{y_{s+1}-y_s}\right)^n$$

où $s = 2,3,\dots,p$.

Une valeur approchée pour la racine $\overline{x}$ de l'équation (1) est donnée par

$$(11)\quad \overline{x} \simeq P_p(0) ,$$

c'est-à-dire

$$\overline{x} \simeq \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-j-1} \left[P_{p-1}(y_p) \right]^{(j)} \frac{(-1)^{j+1} \, y_p^{j+k} \, y_{p+1}}{j! \, (y_p - y_{p+1})^{k+1}} + \frac{(-1)^n x_{p+1} \, y_p^n}{(y_{p+1} - y_p)^n} \tag{12}$$

Nous traiterons à présent deux cas particuliers du problème présenté ci-dessus.

1. Le cas n = 2. En ce cas, les polynômes (10) prennent la forme suivante

$$P_s(y) = \sum_{j=0}^{1} \sum_{k=0}^{1-j} \left[P_{s-1}(y_s) \right]^{(j)} \frac{(-1)^k (y-y_s)^{j+k} \, (y-y_{s+1})}{j! \, (y_s - y_{s+1})^{k+1}} + x_{s+1} \left(\frac{y-y_s}{y_{s+1} - y_s} \right)^2, \quad s = 2,3,\dots,p \tag{13}$$

et

$$P_1(y) = \sum_{j=0}^{1} \sum_{k=0}^{1-j} \left[f^{-1}(y_1) \right]^{(j)} \frac{(-1)^k \, (y-y_1)^{j+k} \, (y-y_2)}{j! \, (y_1 - y_2)^{k+1}} + x_2 \left(\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \right)^2 \tag{14}$$

Il est facile de voir que l'expression (12) peut se mettre en ce cas sous la forme [1]

$$\overline{x} \simeq x_p + a_p \, y_p^2 - y_p \, P'_{p-1}(y_p) \tag{15}$$

où

$$a_p = \frac{1 - P'_{p-1}(y_p) \; [x_p, x_{p+1} \, ; f]}{(x_{p+1} - x_p) \; [x_p, x_{p+1} \, ; f]^2} \tag{16}$$

2. Le cas n = 3. En ce cas (10) s'écrit

$$P_s(y) = \sum_{j=0}^{2} \sum_{k=0}^{2-j} \left[P_{s-1}(y_s) \right]^{(j)} \frac{(-1)^k \, (y-y_s)^{j+k} \, (y-y_{s+1})}{j! \, (y_s - y_{s+1})^{k+1}} + x_{s+1} \left(\frac{y-y_s}{y_{s+1} - y_s} \right)^3 \tag{17}$$

avec

$$P_1(y) = \sum_{j=0}^{2} \sum_{k=0}^{2-j} \left[f^{-1}(y_1) \right]^{(j)} \frac{(-1)^k \, (y-y_1)^{j+k} \, (y-y_2)}{j! \, (y_1 - y_2)^{k+1}} + x_2 \left(\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \right)^3 \tag{18}$$

et (12) s'écrit [1]

$$\overline{x} \simeq x_p - P'_{p-1}(y_p) \, y_p + \frac{P''_{p-1}(y_p)}{2} \, y_p^2 - a_p \, y_p^3 \tag{19}$$

où

$$a_p = \frac{1 - P'_{p-1}(y_p)[x_p, x_{p+1} ; f] - \frac{P''_{p-1}(y_p)}{2} [x_p, x_{p+1} ; f]^2 (x_{p+1} - x_p)}{[x_p, x_{p+1} \, ; f]^3 \, (x_{p+1} - x_p)^2} \tag{20}$$

Exemple numérique.

Nous considérons l'équation

$$f(x) = 4x^3 + 3x^2 + 3x - 1 = 0 \tag{21}$$

qui admet la seule racine réelle $x = 0{,}25$.

Nous supposerons que en ce qui concerne la fonction f de (21) nous en connaissons les valeurs suivantes :

$$\begin{cases} f(0) = -1 \\ f'(0) = 3 \\ f''(0) = 6 \\ f(0{,}1) = -0{,}666 \\ f(0{,}2) = -0{,}248 \\ f(0{,}3) = 0{,}278 \end{cases} \tag{22}$$

Il résulte de (22) que $x_p = 0{,}2$ et $x_{p+1} = 0{,}3$.

Si nous utilisons une seule fois la méthode de la corde dans l'intervalle $(0,2 ; 0,3)$ nous obtenons pour $\bar{x}$ la valeur approchée suivante

$$\bar{x} \simeq 0,2471483$$

En appliquant la méthode donnée par (15) on obtient pour $\bar{x}$ la valeur approchée

$$\bar{x} \simeq 0,2501480$$

tandis que la méthode (19) nous conduit à la valeur approchée suivante

$$\bar{x} \simeq 0,2504372$$

Nous remarquons qu'au cas de l'exemple traité la méthode qui donne la meilleure approximation de la racine de l'équation (21) est la méthode de l'interpolation inverse avec la fonction spline du second degré.

Dans la formule d'approximation donnée par (15) pour la racine $\bar{x}$ de l'équation (1), obtenue à l'aide de la fonction spline d'interpolation inverse du second ordre figure la valeur de la dérivée $P'_{p-1}(y_p)$ du polynôme P_{p-1} au point y_p.

On constate facilement que cette valeur peut s'obtenir à l'aide des différences divisées du premier ordre de la fonction f prises sur des noeuds consécutifs et à l'aide de $f'(x_1)$.

$P'_{p-1}(y_p)$ qui figure en (15) s'exprime notamment à l'aide de l'algorithme suivant :

$$(23)\qquad \begin{cases} P'_1(y_2) = \dfrac{2}{[x_1, x_2 ; f]} - \dfrac{1}{f'(x_1)} \\[2ex] P'_{p-1}(y_p) = \dfrac{2}{[x_{p-1}, x_p ; f]} + 2\displaystyle\sum_{k=2}^{p-1} \dfrac{(-1)^k}{[x_{k-1}, x_k ; f]} - \\[2ex] \qquad - \dfrac{1}{f'(x_1)} \, , \end{cases}$$

si p est un nombre naturel pair, ou

$$(24)\qquad P'_{p-1}(y_p) = \frac{2}{[x_{p-1}, x_p ; f]} + 2\sum_{k=2}^{p-1} \frac{(-1)^{k+1}}{[x_{k-1}, x_k ; f]} + \frac{1}{f'(x_1)}$$

si p est un nombre naturel impair, où

$$[x_i, x_{i+1} ; f] = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} \, , \quad i = 1,2,\ldots,p-1 .$$

Il est difficile d'obtenir des formules analogues à celles données par (23) et (24) pour le calcul des valeurs des dérivées successives du polynôme P_{p-1} au point y_p au cas général et même si cela peut se faire, elles affectent une forme très compliquée.

BIBLIOGRAPHIE

1. IANCU, C., Analiza si prelucrarea datelor cu ajutorul functiilor spline, Teză de doctorat, Cluj (1983), Facultatea de Matematică a Univ. "Babeş-Bolyai"

2. IMAMOV, A., Resenie nelineinîh uravnenii metodom obratnogo splain-interpolirovaniia, Metodî splain-funkţii, Akademia Nauk SSSR, Novosibirsk, 81 (1979), 74-80

3. PAVALOIU, I., Rezolvarea ecuaţiilor prin interpolare, Ed. Dacia, Cluj, 1981

4. TUROWICZ, B.A., Sur les dérivées d'ordre supérieur d'une fonction inverse, Colloq. Math. (1959), 83-87