"BABEŞ - BOLYAI" University
Faculty of Mathematics and Physics
Research Seminars
Seminar on Functional Analysis and Numerical Methods
Preprint Nr. 1, 1987, pp.

ESTIMATION DES ERREURS DANS LA RÉSOLUTION NUMÉRIQUE DES SYSTÈMES D'ÉQUATIONS DANS DES ESPACES MÉTRIQUES *)

Ion Păvăloiu

Désignons par (X_i, ρ_i) , $i=1,2$ deux espaces métriques complets et par $X = X_1 \times X_2$ le produit cartésien de ces espaces.

Nous désignons par $F_1 : X \to X_1$ et $F_2 : X \to X_2$ deux applications et nous considérons le système d'équations suivant :

$$(1)\qquad \begin{aligned} x_1 &= F_1(x_1,x_2) \\ x_2 &= F_2(x_1,x_2) \quad , \quad (x_1,x_2) \in X \end{aligned}$$

Pour la résolution du système d'équations (1) nous considérons la procédé itératif suivant, du type Gauss - Seidel :

$$(2)\qquad \begin{aligned} x_1^{(n+1)} &= F_1(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}) \\ x_2^{(n+1)} &= F_2(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}) \ , \quad (x_1^{(o)}, x_2^{(o)}) \in X , \\ n &= 0,1,\ldots \end{aligned}$$

En ce qui concerne la convergence des suites nous avons le Théorème suivant [1] :

THÉORÈME 1 . Si les applications F_1 et F_2 vérifient les conditions

$$\rho_1(F_1(x_1,y_1), F_1(x_2,y_2)) \le \alpha \rho_1(x_1,x_2) + \beta \rho_2(y_1,y_2)$$

$$\rho_2(F_2(x_1,y_1), F_2(x_2,y_2)) \le a \rho_1(x_1,x_2) + b \rho_2(y_1,y_2)$$

*) This paper is in a final form and no version of it will be submitted for publication elsewhere.

<u>pour tous les</u> $(x_1,y_1), (x_2,y_2)\in X$, <u>ou</u> α , β , a <u>et</u> b <u>sont des nombres réels nonnégatifs</u> ;

<u>Si les nombres</u> α, β, a <u>et</u> b <u>vérifient les relations</u>

$$\alpha + b + a\beta < 2$$

$$(1-\alpha)(1-b) > a\beta \quad , \quad b>0, \quad \alpha>0$$

<u>alors le système</u> (1) <u>admet une seul solution</u> $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)\in X$ <u>et les suites</u> $(x_1^{(n)})_{n=0}^{\infty}$, $(x_2^{(n)})_{n=0}^{\infty}$ <u>sont convergentes</u> ;

$$\lim_{n\to\infty} x_1^{(n)} = \bar{x}_1 \; , \quad \lim_{n\to\infty} x_2^{(n)} = \bar{x}_2$$

<u>Démonstration</u>. Nous désignons par $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ et $(g_n)_{n=0}^{\infty}$ deux suites de nombres non-négatifs dont les éléments vérifient les relations

$$(3) \qquad \begin{aligned} f_n &\le \alpha f_{n-1} + \beta g_{n-1} \\ g_n &\le a f_{n-1} + b g_{n-1} \quad ; \; n = 1,2,\dots \; , \end{aligned}$$

Nous associons aux relations (3) le système d'équations en les inconnues h et k suivant

$$(4) \qquad \begin{aligned} \alpha + \beta h &= h\cdot k \\ a k + b &= h\cdot k \end{aligned}$$

Nous montrerons par la suite que le système (4) admet une solution réelle (h_1, k_1) pour laquelle $0\le h_1\cdot k_1 < 1$ si et seulement si les nombres a, b, α et β remplissent les conditions du théorème 1 .

Nous supposons que le système (4) admet les solutions (h_i,k_i), $i = 1,2$ pour lesquelles les conditions $0<h_i\cdot k_i<1$ sont remplies. On vérifie immèdiatement que dù système (4) résultent les équations suivantes :

$$(5) \qquad \begin{aligned} &\beta h^2 - (b + \beta a - \alpha)h - \alpha . a = 0 \\ &a k^2 - (\alpha + \beta a - b)k - \beta b = 0 \end{aligned}$$

et

$$(6) \qquad p^2 - (b + \beta a + \alpha)p + b\alpha = 0$$

où l'on a désigné par p le produit $h.k$. Les équations (5) nous montrent que les solutions (h_i, k_i) , $i = 1,2$ du système (4) sont réelles et de l'équation (6) et des conditions $0<p_i<1$, $i = 1,2$ il résulte $f(0)>0$, $f(1)>0$ et $b + \beta a + \alpha < 2$, où $f(p) = p^2 - (b+\beta a + \alpha)p + b\alpha$. Il est évident quele condition $f(0)>0$ est remplie parceque $\alpha>0$, $b>0$, $f(1)>0$ et $b + a\beta + \alpha < 2$ représentent les relations de l'hypothèse du théorème 1.

Si nous supposons à présent que les relations de l'hypothèse du théorème 1 sont vérifiées , alors il est évident que $f(1)>0$, $f(0)>0$ et $b + a\beta + \alpha < 2$, ce qui nous montre que l'équation (6) a ses deux racines positives et moindres que l'unité. En tenant compte des équations (5) , nous constatons facilement que le système (4) admet une solution (h_1,k_1) pour laquelle $h_1>0$, $k_1>0$.

Nous montrons à présent que si les éléments des suites $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ et $(g_n)_{n=0}^{\infty}$ vérifient les relations (3) où les nombres α, β, a et b vérifient l'hypothèse du théorème 1 , alors il existe une constante $C>0$, indépendente de n telle que pour chaque $n = 1, 2,\dots$ ont lieu les relations

$$(7) \qquad \begin{aligned} f_n &\le C\, h_1^{n-1}.k_1^{n-1} \\ g_n &\le C\, h_1^{n}.k_1^{n-1} \end{aligned}$$

et les séries $\sum_{i=0}^{\infty} f_i$ et $\sum_{i=0}^{\infty} g_i$ sont convergentes.

Désignons par C un nombre réel qui vérifie l'inégalité

$$(8) \qquad C \ge \max\left\{ \alpha f_0 + \beta g_0 \; , \; \frac{a f_1 + b g_0}{h_1} \right\}$$

où (h_1, k_1) est la solution positives du système (4) .

De (8) et (3) nous déduisons pour $n = 1$

$$f_1 \le C \qquad \text{et} \qquad g_1 \le C\cdot h_1$$

donc les relations (7) sont vérifiées pour $n = 1$.

Nous supposons que les inégalités suivantes ont lieu :

$$f_{k-1} \le C\, h_1^{k-2}\, k_1^{k-2} \quad , \quad g_{k-1} \le C\, h_1^{k-1} \cdot k_1^{k-2} \quad , \quad k = 2,\dots,n$$

De (3) et (4) nous déduisons

$$f_n \le \alpha f_{n-1} + \beta g_{n-1} \le C\, h_1^{n-2} \cdot k_1^{n-2}(\alpha + \beta h_1) = C h_1^{n-1} k_1^{n-1}$$

$$g_n \le a f_n + b\, g_{n-1} \le C\, h_1^{n-1} \cdot k_1^{n-2}(a k_1 + b) = C \cdot h_1^{n} \cdot k_1^{n-1}$$

ce qui nous montre que les relations (7) ont lieu pour tout $n \in N$.

Il est évident que les séries $\sum_{i=0}^{\infty} f_i$ et $\sum_{i=0}^{\infty} g_i$ sont convergentes, parceque de (7) il s'ensuit qu'elles sont majorées par deux séries géométriques à raison moindre que l'unité.

De (2) et de l'hypothèse du théorème 1 nous déduisons les relations :

$$(9) \quad \begin{aligned} \rho_1(x_1^{(n+1)}, x_1^{(n)}) &\le \alpha\, \rho_1(x_1^{(n)}, x_1^{(n-1)}) + \beta\, \rho_2(x_2^{(n)}, x_2^{(n-1)}) \\ \rho_2(x_2^{(n+1)}, x_2^{(n)}) &\le a\, \rho_1(x_1^{(n+1)}, x_1^{(n)}) + b\, \rho_2(x_2^{(n)}, x_2^{(n-1)}) \ , \\ n &= 0,1,\dots \end{aligned}$$

Nous posons à présent en (9) $f_i = \rho_1(x_1^{(i+1)}, x_1^{(i)})$, $g_i = \rho_2(x_2^{(i+1)}, x_2^{(i)})$, $i = 0,1,2,\dots$ et nous obtenons les relations (3). En tenant compte des hypothèses du théorème 1 nous en déduisons les relations

$$(10) \quad \begin{aligned} \rho_1(x_1^{(i+1)}, x_1^{(i)}) &\le C\, h_1^{i-1} \cdot k_1^{i-1} \\ \rho_2(x_2^{(i+1)}, x_2^{(i)}) &\le C\, h_1^{i} \cdot k_1^{i-1} \ , \quad i = 1,2,\dots \end{aligned}$$

Nous montrerons à présent que les suites $(x_1^{(n)})_{n=0}^{\infty}$ et $(x_2^{(n)})_{n=0}^{\infty}$ sont convergentes.

Nous avons en effet

$$(11) \quad \rho_1(x_1^{(n+s)}, x_1^{(n)}) \le f_{n+s-1} + f_{n+s-2} + \dots + f_n \le p_1^{n-1} \cdot C \cdot (1 + p_1 + p_1^2 + \dots + p_1^{s-1}) \le \frac{C \cdot p_1^{n-1}}{1 - p_1}$$

où $p_1 = h_1 \cdot k_1$

Nous déduisons de la même facon

$$(12) \quad \rho_2(x_2^{(n+s)}, x_2^{(n)}) \le g_{n+s-1} + g_{n+s-2} + \dots + g_n \le \frac{C\, h_1 \cdot p_1^{n-1}}{1 - p_1} .$$

En tenant compte que $0 < p_1 < 1$ et du fait que les espaces X_1 et X_2 sont complets, il résulte que les suites $(x_1^{(n)})_{n=0}^{\infty}$ et $(x_2^{(n)})_{n=0}^{\infty}$ sont convergentes.

Si nous posons $\bar{x}_1 = \lim_{n \to \infty} x_1^{(n)}$ et $\bar{x}_2 = \lim_{n \to \infty} x_2^{(n)}$ alors en tenant compte de la continuité des applications F_1 et F_2 et en passant à la limite dans les égalités (2) lorsque $n \to \infty$ il résulte que $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ répresente une solution du système (1).

En ce qui concerne l'unicité de la solution, nous supposerons par l'absurde que le système (1) n'a pas une solution unique. Désignons par $(\bar{x}_1 , \bar{x}_2)$ et $(\bar{y}_1 , \bar{y}_2)$ deux solutions du système (1). Il résulte de la première condition du théorème 1 :

$$\begin{aligned} \rho_1(\bar{x}_1, \bar{y}_1) &\le \alpha\, \rho_1(\bar{x}_1, \bar{y}_1) + \beta\, \rho_2(\bar{x}_2 , \bar{y}_2) \\ \rho_2(\bar{x}_2, \bar{y}_2) &\le a\, \rho_1(\bar{x}_1, \bar{y}_1) + b\, \rho_2(\bar{x}_2, \bar{y}_2) \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} (1 - \alpha) \cdot \rho_1(\bar{x}_1, \bar{y}_1) &\le \beta\, \rho_2(\bar{x}_2, \bar{y}_2) \\ (1 - b) \cdot \rho_2(\bar{x}_2, \bar{y}_2) &\le a\, \rho_1(\bar{x}_1, \bar{y}_1) . \end{aligned}$$

Nous en déduisons

$$\rho_1(\bar{x}_1, \bar{y}_1) \le \frac{\beta a}{(1-\alpha)(1-b)}\, \rho_1(\bar{x}_1, \bar{y}_1)$$

et

$$\rho_2(\bar{x}_2, \bar{y}_2) \le \frac{\beta a}{(1-\alpha)(1-b)} \cdot \rho_2(\bar{x}_2 , \bar{y}_2) ,$$

mais $\frac{\beta a}{(1-\alpha)(1-b)} < 1$, par conséquent les dernière inégalités ont lieu si et seulement si $\bar{x}_1 = \bar{y}_1$ et $\bar{x}_2 = \bar{y}_2$

Il résulte de (11) et (12) pour $s \to \infty$

$$\rho_1(\bar{x}_1, x_1^{(n)}) \le \frac{C \cdot p_1^{n-1}}{1 - p_1} \quad \text{et} \quad \rho_2(\bar{x}_2, x_2^{(n)}) \le \frac{C h_1 p_1^n}{1 - p_1}, \quad n=1,2,\ldots$$

Désignons à présent par $F_1^* : X \to X_1$, $F_2^* : X \to X_2$ deux autres applications qui vérifient auprès de F_1 et F_2 les conditions

$$(13) \quad \begin{aligned} &\rho_1(F_1^*(u,v), F_1(u,v)) \le \delta_1 \\ &\rho_2(F_2^*(u,v), F_2(u,v)) \le \delta_2 \end{aligned}$$

pour tout $(u,v) \in X$, où $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$ sont deux nombres réels ~~de~~ donnés.

À côté du procédé itératif (2) nous considérons le procédé itératif suivant :

$$(14) \quad \begin{aligned} &\xi_1^{(n+1)} = F_1^*(\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}) \\ &\xi_2^{(n+1)} = F_2^*(\xi_1^{(n+1)}, \xi_2^{(n)}), \quad (\xi_1^{(0)}, \xi_2^{(0)}) \in X, \ n = 0,1,\ldots \end{aligned}$$

En ce qui suit nous procéderons à la délimitation des erreurs au cas où la racine $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ du système (1) est approchée par des éléments des suites $(\xi_1^{(n)})_{n=0}^{\infty}$ et $(\xi_2^{(n)})_{n=0}^{\infty}$ générées à l'aide du procédé (14). Nous n'avons évidemment aucune information concernant les applications F_1^* et F_2^* si non qu'elles vérifient les relations (13), c'est pourquoi nous ne pouvons rien affirmer relativement à la convergence des suites $(\xi_1^{(n)})_{n=0}^{\infty}$ et $(\xi_2^{(n)})_{n=0}^{\infty}$.

Nous montrerons par la suite que le processus de calcul des éléments des suites $(\xi_1^{(n)})_{n=0}^{\infty}$ et $(\xi_2^{(n)})_{n=0}^{\infty}$ peut être certainement arrêté quand $\rho_1(\xi_1^{(n+1)}, \xi_1^{(n)}) < \varepsilon_1$ et $\rho_2(\xi_2^{(n+1)}, \xi_2^{(n)}) < \varepsilon_2$, si ε_1 et ε_2 sont convenablement choisis par rapport aux nombres δ_1, δ_2, a, b, α et β.

Nous avons en effet

$$\begin{aligned} \rho_1(\xi_1^{(n+1)}, \xi_1^{(n)}) &= \rho_1(F_1^*(\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}), F_1^*(\xi_1^{(n-1)}, \xi_2^{(n-1)})) \le \\ &\rho_1(F_1^*(\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}), F_1(\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)})) + \rho_1(F_1(\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}), F_1(\xi_1^{(n-1)}, \xi_2^{(n-1)})) + \\ &\rho_1(F_1(\xi_1^{(n-1)}, \xi_2^{(n-1)}), F_1^*(\xi_1^{(n-1)}, \xi_2^{(n-1)})) \le \\ &\alpha \rho_1(\xi_1^{(n)}, \xi_1^{(n-1)}) + \beta \rho_2(\xi_2^{(n)}, \xi_2^{(n-1)}) + 2\delta_1 \end{aligned}$$

Pour $\rho_2(\xi_2^{(n+1)}, \xi_2^{(n)})$ nous avons de la même manière

$$\rho_2(\xi_2^{(n+1)}, \xi_2^{(n)}) \le a \rho_1(\xi_1^{(n+1)}, \xi_1^{(n)}) + b \rho_2(\xi_2^{(n)}, \xi_2^{(n-1)}) + 2\delta_2$$

Si nous écrivons maintenant $f_n^* = \rho_1(\xi_1^{(n+1)}, \xi_1^{(n)})$, $g_n^* = \rho_2(\xi_2^{(n+1)}, \xi_2^{(n)})$ $n = 0,1,\ldots$ alors les inégalités ci-dessus s'écrivent

$$(15) \quad \begin{aligned} &f_n^* \le \alpha f_{n-1}^* + \beta g_{n-1}^* + 2\delta_1 \\ &g_n^* \le a f_n^* + b g_{n-1}^* + 2\delta_2 . \end{aligned}$$

Si nous nous placon dans les hypothèses du théorème 1, alors il existe une constante C_1 indépendente de n, telle que nous avons les relations suivantes :

$$(16) \quad \begin{aligned} &f_n^* \le C_1 h_1^{n-1} k_1^{n-1} + \frac{2[\beta\delta_2 + (1-b)\delta_1]}{(1-\alpha)(1-b) - a\beta} \\ &g_n^* \le C_1 h_1^{n} k_1^{n-1} + \frac{2[(1-\alpha)\delta_2 + a\delta_1]}{(1-\alpha)(1-b) - a\beta}, \quad n = 1,2,\ldots \end{aligned}$$

où (h_1, k_1) est la solution du système (4) qui vérifie les conditions : $0 < h_1 k_1 < 1$, $h_1 > 0$, $k_1 > 0$.

En effet, si nous choisissons C_1 tel que

$$C_1 \ge \max\left\{ \left|\alpha f_0^* + \beta g_0^* + 2\delta_1 - \frac{2[\beta\delta_2 + (1-b)\delta_1]}{(1-\alpha)(1-b) - a\beta}\right|, \frac{1}{h_1}\left| a f_1^* + b g_0^* + 2\delta_2 - \frac{2[(1-\alpha)\delta_2 + a\delta_1]}{(1-\alpha)(1-b) - a\beta}\right| \right\}$$

alors il est évident que

$$f_1^* \leq \alpha f_0^* + \beta g_0^* + 2\delta_1 \leq C_1 + \frac{2[\beta\delta_2 + (1-b)\delta_1]}{(1-\alpha)(1-b) - a\beta}$$

$$g_1^* \leq a f_1^* + b\, g_0^* + 2\delta_2 \leq C_1 h_1 + \frac{2[(1-\alpha)\delta_2 + a\delta_1]}{(1-\alpha)(1-b) - a\beta}$$

et les inégalités (16) sont vérifiées pour $n = 1$.

Nous supposons que les relations (16) sont vérifiées pour chaque $n = 1,2,\dots,s$ et nous montrerons qu'elles ont lieu également pour $n = s+1$. Nous déduisons de (15)

$$f_{s+1}^* \leq \alpha C_1 h_1^{s-1} k_1^{s-1} + \beta C_1 h_1^{s} k_1^{s-1} + \frac{2\alpha[\beta\delta_2 + (1-b)\delta_1]}{(1-\alpha)(1-b) - a\beta} +$$

$$+ \frac{2\beta[(1-\alpha)\delta_2 + a\delta_1]}{(1-\alpha)(1-b) - a\beta} + 2\delta_1 = C_1 h_1^{s-1} k_1^{s-1}(\alpha + \beta h_1) +$$

$$+ \frac{2[\beta\delta_2 + (1-b)\delta_1]}{(1-b)(1-\alpha) - a\beta} = C_1 h_1^{s} k_1^{s} + \frac{2[\beta\delta_2 + (1-b)\delta_1]}{(1-\alpha)(1-b) - a\beta} .$$

On montre de la même manière que la seconde inégalité (16) a également lieu pour $n = s+1$.

Si à présent nous supposons que

$$\varepsilon_1 > \frac{2[\beta\delta_2 + (1-b)\delta_1]}{(1-\alpha)(1-b) - a\beta}$$

(17)

$$\varepsilon_2 > \frac{2[(1-\alpha)\delta_2 + a\delta_1]}{(1- \ )(1-b) - a}$$

alors les relations (16) nous assurent qu'il existe un $n' \in N$ tel que pour tout $n > n'$ nous ayons les inégalités $\rho_1(\xi_1^{(n+1)}, \xi_1^{(n)}) < \varepsilon_1$ et $\rho_2(\xi_2^{(n+1)}, \xi_2^{(n)}) < \varepsilon_2$. Désignons par ε_1 et ε_2 deux nombres positifs qui vérifient les relations (17) et $n > n'+1$. Nous nous proposons d'évaluer dans ces conditions les distances entre $\bar{x}_1$ et $\xi_1^{(n+1)}$ et $\bar{x}_2$ et $\xi_2^{(n+1)}$, c'est - à - dire la délimitation des erreurs au cas de la résolution du système (1) à l'aide d'un procédé d'approximation de la forme (14) où les applications F_1^* et F_2^* dépendent de F_1 et F_2 par les relations (13) . En tenant compte des hypothèses dans lesquelles nous nous sommes placés , nous aurons

$$\rho_1(\bar{x}_1, \xi_1^{(n+1)}) = \rho_1(F_1(\bar{x}_1,\bar{x}_2), F_1^*(\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)})) \leq \rho_1(F_1(\bar{x}_1,\bar{x}_2), F_1(\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}))$$

$$+ \rho_1(F_1(\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}), F_1^*(\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)})) \leq \alpha\, \rho_1(\bar{x}_1, \xi_1^{(n)}) + \beta\, \rho_2(\bar{x}_2, \xi_2^{(n)}) + \delta_1$$

Nous avons de manière analogue pour $\rho_2(\bar{x}_2, \xi_2^{(n+1)})$:

$$\rho_2(\bar{x}_2, \xi_2^{(n+1)}) \leq a\, \rho_1(\bar{x}_1, \xi_1^{(n+1)}) + b\, \rho_2(\bar{x}_2, \xi_2^{(n)}) + \delta_2$$

Nous déduisons des inégalités ci-dessus

$$(1-\alpha)\, \rho_1(\bar{x}_1, \xi_1^{(n+1)}) \leq \alpha\, \varepsilon_1 + \beta\, \rho_2(\bar{x}_2, \xi_2^{(n)}) + \delta_1$$

$$(1-b)\, \rho_2(\bar{x}_2, \xi_2^{(n+1)}) \leq a\, \rho_1(\bar{x}_1, \xi_1^{(n+1)}) + b\, \varepsilon_2 + \delta_2$$

c'est - à - dire

(18)
$$\rho_1(\bar{x}_1, \xi_1^{(n+1)}) \leq (\alpha/(1-\alpha))\varepsilon_1 + (\beta/(1-\alpha))\, \rho_2(\bar{x}_2, \xi_2^{(n)}) + \delta_1/(1-\alpha)$$
$$\rho_2(\bar{x}_2, \xi_2^{(n+1)}) \leq (a/(1-b))\, \rho_1(\bar{x}_1, \xi_1^{(n+1)}) + (b/(1-b))\,\varepsilon_2 + \delta_2/(1-b)$$

d'où il résulte

(19)
$$\rho_2(\bar{x}_2, \xi_2^{(n+1)}) \leq \frac{a(\alpha\varepsilon_1 + \beta\varepsilon_2) + b(1-\alpha)\,\varepsilon_2}{(1-\alpha)(1-b) - a\beta} + \varepsilon_2/2$$

Du fait que $n > n'+1$, il résulte que la seconde inégalité de (18) a lieu aussi au cas où nous mettons n à la place de $n+1$, c'est - à - dire

$$\rho_2(\bar{x}_2, \xi_2^{(n)}) \leq (a/(1-b))\, \rho_1(\bar{x}_1, \xi_1^{(n)}) + b\,\varepsilon_2/(1-b) + \delta_2/(1-b)$$

Cette inégalité et la première inégalité (18) nous donnent

(20)
$$\rho_1(\bar{x}_1, \xi_1^{(n+1)}) \leq \frac{\beta(a\varepsilon_1 + b\varepsilon_2) + \alpha\,\varepsilon_1(1-b)}{(1-\alpha)(1-b) - a\beta} + \varepsilon_1/2 .$$

BIBLIOGRAPHIE

1 PAVALOIU, I., La résolution des systèmes operationnelles a l'aide des methodes iteratives, Mathematica, 11(34),1969, 137 - 141 .

2 URABE, M., Error Estimation in Numerical Solution of Equations by Iteration processus, J. Sci. Hiroshima Univ., Ser. A-I, 26 (1962), 77-91.