"BABES - BOLYAI" University
Faculty of Mathematics and Physics
Research Seminars
Seminar on Functional Analysis and Numerical Methods
Preprint Nr. 1, 1987, pp.

UN ALGORYTHME DE CALCUL DANS LA RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS PAR INTERPOLATION

Ion Păvăloiu

Désignons par $f: I \longrightarrow R$ une fonction, où I est un intervalle de l'axe réel. Nous considérons l'équation

$$(1) \qquad f(x) = 0 ,$$

et nous supposons que cette équation admet une seule solution $\bar{x} \in I$. Nous désignons par $F = f(I)$ l'ensemble des valeurs de la fonction f pour $x \in I$. Nous supposerons que la fonction f admet une fonction inverse $f^{-1} : F \longrightarrow I$.

Nous désignons par $x_i \in I$, $i=1,2,\dots,n+1$, $x_i \neq x_j$ pour $i \neq j$ - $n+1$ approximations différentes de la solution $\bar{x}$ de l'équation (1) et nous écrivons $y_i = f(x_i)$, $i = 1,2,\dots,n+1$.

Le polynome

$$(2) \qquad L_n(y_1,y_2,\dots,y_{n+1} ; f^{-1}|y) = \sum_{i=1}^{n+1} x_i \cdot \frac{\omega(y)}{(y-y_i)\cdot\omega'(y_i)}$$

où

$$(3) \qquad \omega(y) = \prod_{i=1}^{n+1}(y-y_i)$$

vérifie les conditions

$$(4) \qquad L_n(y_1,y_2,\dots,y_{n+1} ; f^{-1}|y_i) = x_i \quad , i = 1,2,\dots,n+1 .$$

Si $\bar{x} \in I$, alors $0 \in F$ et $f^{-1}(0) = \bar{x}$. En ce cas, en faisent $y = 0$ en (2) nous obtenons une approximation pour $\bar{x}$, c'est - - à- dire

$$(5) \qquad \bar{x} \simeq L_n(y_1,y_2,\dots,y_{n+1} ; f^{-1} | 0) .$$

En tenant compte de l'énégalité

$$(6) \qquad f^{-1}(0) - L_n(y_1,y_2,\dots,y_{n+1} ; f^{-1} | 0) = (-1)^{n+1}[y_1,y_2,\dots,y_{n+1},0 ; f^{-1}]y_1y_2\dots y_{n+1}$$

et en écrivent $x_{n+2} = L_n(y_1,y_2,\dots,y_{n+1} ; f^{-1} | 0)$, nous obtenons

$$(7) \qquad \bar{x} - x_{n+2} = (-1)^{n+1}[y_1,y_2,\dots,y_{n+1},0 ; f^{-1}]\, y_1y_2\dots y_{n+1}$$

Nous en déduisons qu'abstraction faite du facteur

$$(-1)^{n+1}[y_1,y_2,\dots,y_{n+1},0 ; f^{-1}]$$

x_{n+2} sera une approximation pour $\bar{x}$, d'autant meilleure que les nombres $y_1,y_2,\dots,y_{n+1}$ sont plus proches de 0.

Désignons à présent par $x_{i+1},x_{i+2},\dots,x_{i+n+1} \in I$, $n+1$ approximations de la solution $\bar{x}$, alors les nombres

$$(8) \qquad x_{i+n+2} = L_n(y_{i+1},y_{i+2},\dots,y_{i+n+1} ; f^{-1} | 0)$$

peuvent eux aussi considérés comme des approximations pour $\bar{x}$.

Nous supposerons à présent que pour tous les $u_1,\dots,u_{n+1} \in F$,

$$\left|[u_1,u_2,\dots,u_{n+1},0 ; f^{-1}]\right| \leq M < +\infty .$$

Nous avons alors

$$(9) \qquad |\bar{x} - x_{i+n+2}| \leq M\cdot|y_{i+1}|\,|y_{i+2}| \dots |y_{i+n+1}| \quad , \; i = 0,1,\dots, .$$

Si la différence divisée du premier ordre de la fonction f est bornée, c'est - à - dire $|[x,y\ ;\ f]| \le \beta$ pour tous les $x,y \in I$, alors nous obtenons de (9)

$$(10)\qquad |\bar{x} - x_{i+n+2}| \le M\beta^{n+1} |\bar{x} - x_{i+1}|\,|\bar{x} - x_{i+2}| \ldots |\bar{x} - x_{i+n+1}| , \quad i = 1,2,\ldots .$$

Nous écrirons $\alpha = M\beta^{n+1}$ et $\rho_i = \alpha^{\frac{1}{n}} |\bar{x} - x_i|$, $i = 1,2,\ldots .$

Il résulte alors de (10)

$$(11)\qquad \rho_{i+n+2} \le \rho_{i+1} \cdot \rho_{i+2} \cdots \rho_{i+n+1} , \quad i = 0,1,2,\ldots .$$

Nous considérons à présent l'équation aux différences

$$(12)\qquad \gamma_{i+n+2} = \gamma_{i+1} + \gamma_{i+2} + \ldots + \gamma_{i+n+1} , \quad i = 0,1,\ldots$$

et nous supposons qu'il existe un nombre $d<1$ tel que $\rho_s \le d^{\gamma_s}$ pour $s = 1,2,\ldots,n+1$.

Nous associons à l'équation (12) l'équation

$$(13)\qquad t^{n+1} = t^n + t^{n-1} + \ldots + t + 1 .$$

En ce cas, la solution de l'équation (12) peut s'exprimer comme suit :

$$(14)\qquad \gamma_{i+k} = C_1 t_1^{i+k} + C_2 t_2^{i+k} + \ldots + C_{n+1} t_{n+1}^{i+k}$$

où $t_1 , t_2 , \ldots, t_{n+1}$ sont les racines de l'équation (13) et $C_1 , C_2, \ldots, C_{n+1}$ se déterminenent par les conditions initiales $\gamma_s = \gamma_s$, $s = 1,2,\ldots,n+1$.

On constate facilement que l'équation (13) admet une seule racine réelle ω ; $1 < \omega < 2$.

Si nous admettons que

$$(15)\qquad \rho_s \le d^{\omega^s} ; \quad s = 1,2,\ldots,n+1$$

alors nous déduisons facilement de (11) que les inégalités (15)

ont lieu pour tout $s \in N$, ce qui signifie que

$$(16)\qquad \lim_{n\to\infty} \rho_n = 0$$

c'est-à-dire que la suite $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ converge vers la solution de l'équation (1) .

Nous présenterons par la suite un algorythme de calcul des valeurs des polynomes $\omega_k(0)$ et $\omega_k'(y_i)$, $i=k,k+1,\ldots,k+n$, où

$$(17)\qquad \omega_k(y) = \prod_{i=k}^{k+n} (y - y_i) , \quad k = 1,2,\ldots .$$

Les polynomes (17) sont utilisés à la construction de la suite de polynomes d'interpolation inverse de Lagrange, qui conduisent à la suite d'approximations $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, dont les éléments sont donnés par l'égalité (8) .

Il résulte de (17)

$$\omega_{k+1}(y) = \omega_k(y) . \frac{y - y_{n+k+1}}{y - y_k}$$

d'où nous déduisons la relation

$$(18)\qquad \omega_{k+1}(0) = \omega_k(0) . \frac{y_{n+k+1}}{y_k}$$

qui nous offre une formule des récurrence pour le calcul des valeurs des polynomes ω_k pour $y = 0$.

Pour $\omega'_{k+1}(y)$ nous avons

$$\omega'_{k+1}(y) = \frac{[\omega'_k(y)(y-y_{n+k+1}) + \omega_k(y)](y-y_k) - \omega_k(y)(y-y_{n+k+1})}{(y - y_k)^2}$$

Nous en déduisons les formules de récurrence suivantes :

$$(19)\qquad \omega'_{k+1}(y_i) = \begin{cases} \omega'_k(y_i)(y_i - y_{n+k+1}) / (y_i - y_k) , & \text{pour } i = \overline{k+1, k+n} \\ \omega_k(y_i) / (y_i - y_k) , & \text{pour } i = n+k+1 \end{cases}$$

Les relations de récurrence (18) et (19) nous offrent la posibilité d'obtenir la suite de polynomes d'interpolation inverse de Lagrange, en utilisant à un pas quelconque d'itération certains éléments qui ont déjà calculés au cours du pas précédent.

BIBLIOGRAPHIE

1 PĂVĂLOIU, I., Rezolvarea ecuatiilor prin interpolare, Editura DACIA, Cluj-Napoca, 1981.

Institutul de Matematică
Oficiul Postal 1, C.P. 68
3400 Cluj-Napoca, Romania

This paper is in a final form and no version of it will be submitted for publication elsewhere.