"BABEŞ-BOLYAI" UNIVERSITY
Faculty of Mathematics and Physics
Research Seminars
Seminar on Mathematical Analysis
Preprint Nr.7, 1988, pp. 167 - 178.

DÉLIMITATIONS DES ERREURS DANS LA RÉSOLUTION NUMÉRIQUE DES SYSTÈMES D'ÉQUATIONS

Ion Păvăloiu

Désignons par (X_i, ρ_i) , i=1,2 deux espaces métriques complets et par $X = X_1 \times X_2$ le produit cartésien de ces espaces. Nous désignerons par $F_1: X \rightarrow X_1$ et $F_2: X \rightarrow X_2$ deux applications de l'espace X en X_1 , respectivement en X_2 et nous considérons le système d'équations suivant :

$$(1)\quad \begin{aligned} x_1 &= F_1(x_1, x_2) \\ x_2 &= F_2(x_1, x_2) \ , \quad (x_1, x_2) \in X . \end{aligned}$$

Pour résoudre le système (1) nous adopterons le procédé itératif de type Gauss-Seidel suivant :

$$(2)\quad \begin{aligned} x_1^{(n+1)} &= F_1(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}) \\ x_2^{(n+1)} &= F_2(x_1^{(n+1)}, x_2^{(n)}) \ , \ n = 0,1,\dots \ ; \ (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}) \in X \end{aligned}$$

Dans les travaux [1] , [2] nous avons étudié la convergence de la méthode (2) dans l'hypothèse que les applications F_1 et F_2 remplissent des conditions de type Lipschitz dans tout l'espace X.

Dans le travail [3] nous avons obtenu des délimitations des erreurs dans la résolutions numérique du système (1) à l'aide d'une méthode de type (2), dans laquelle les applications F_1 et F_2 sont remplacées par deux autres applications F_1^* et F_2^* , qui remplissent certaines conditions de rapprochement de F_2 et F_1 dans tout l'espace X.

Dans les applications de cette théorie à la résolution d'une classe d'équations concrètes, les conditions imposées aux applications F_1, F_2, F_1^* et F_2^* dans tout l'espace X sont genantes, à cause du fait que l'espace X peut ne pas être borné.

Dans ce qui suit nous étudierons ce problème dans l'hypothèse où F_1 et F_2 remplissent des conditions de type Lipschitz et des conditions de rapprochement de F_1^* et F_2^* dans certains sous-ensembles bornés $D_1 \subset X_1$ et $D_2 \subset X_2$.

Désignons par conséquent par D_1 et D_2 deux ensembles bornés des espaces X_1 respectivement X_2 et par $D = D_1 \times D_2$ leur produit cartésien. Considérons deux suites $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ et $(g_n)_{n=0}^{\infty}$ dont les éléments remplissent les conditions :

$$
(3) \qquad \begin{aligned} f_n &\leqq \alpha f_{n-1} + \beta g_{n-1} \\ g_n &\leqq a f_n + b g_{n-1}, \quad n=1,2,\dots, \end{aligned}
$$

où α, β, a et b sont des nombres réels non-négatifs et $f_n \geqq 0$, $g_n \geqq 0$ pour tout $n=0,1,\dots$.

Nous associerons au système (3) le système d'équations suivant en les inconnues h et k :

$$
(4) \qquad \begin{aligned} \alpha + \beta h &= hk \\ ak + b &= hk \end{aligned}
$$

Dans les travaux [1], [2] et [3] nous avons montré que si les nombres α, β, a et b vérifient les relations

$$
(5) \qquad \begin{aligned} \alpha + b + a\beta &< 2 \\ (1-\alpha)(1-b) - a\beta &> 0 \\ b > 0, \ \alpha &> 0 \end{aligned}
$$

alors le système (4) admet les solutions réelles (h_i, k_i), $i=1,2$ pour lesquelles $0 < h_i \cdot k_i < 1$ et que l'une des solutions vérifie les conditions $h_1 > 0$, $k_1 > 0$. De plus, les éléments des suites $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ $(g_n)_{n=0}^{\infty}$ vérifient les relations

$$
(6) \qquad \begin{aligned} f_n &\leqq C h_1^{n-1} k_1^{n-1} \\ g_n &\leqq C h_1^{n} k_1^{n-1}, \quad n=1,2,\dots, \end{aligned}
$$

où $C = \max\left\{ \alpha f_0 + \beta g_0 ,\ (a f_1 + b g_0)/h_1 \right\}$.

Si nous écrivons $p_1 = h_1 \cdot k_1$ alors on constate aisément à l'aide de (4) que p_1 vérifie l'équation

$$
(7) \qquad p^2 - (b + \beta a + \alpha)p + b\alpha = 0 .
$$

Désignons par $d_1 > 0$ un nombre tel que $S_1 \subseteq D_1$, $S_2 \subseteq D_2$, où

$$
(4') \qquad \begin{aligned} S_1 &= \left\{ x \in X_1 \mid \rho_1(x, x_1^{(0)}) \leqq d_1/(1-p_1) \right\} \\ S_2 &= \left\{ x \in X_2 \mid \rho_2(x, x_2^{(0)}) \leqq d_1 h_1/(1-p_1) \right\} \end{aligned}
$$

En ce qui concerne la convergence des suites $(x_1^{(n)})_{n=0}^{\infty}$, $(x_2^{(n)})_{n=0}^{\infty}$ on a le théorème suivant :

THÉORÈME 1. Si les applications F_1, F_2 vérifient les conditions

i. $\rho_1(F_1(x_1,y_1), F_1(x_2,y_2)) \leqq \alpha \rho_1(x_1,x_2) + \beta \rho_2(x_2,y_2)$

$\rho_2(F_2(x_1,y_1), F_2(x_2,y_2)) \leqq a \cdot \rho_1(x_1,x_2) + b \cdot \rho_2(x_2,y_2)$

pour tous les $(x_1,x_2), (y_1,y_2) \in D$;

ii. Les nombres α, β, a et b vérifient les relations (5) ;

iii. Les éléments $x_1^{(1)}$ et $x_2^{(1)}$ des suites $(x_1^{(n)})_{n=0}^{\infty}$, $(x_2^{(n)})_{n=0}^{\infty}$ vérifient les conditions $\rho_1(x_1^{(0)}, x_1^{(1)}) \leqq d_1$ et $\rho_2(x_2^{(0)}, x_2^{(1)}) \leqq d_1 h_1$,

Alors sont vraies les propriétés suivantes :

j. Ces suites $(x_1^{(n)})_{n=0}^{\infty}$, $(x_2^{(n)})_{n=0}^{\infty}$ construites à l'aide du procédé (2) sont convergentes ;

jj. Si l'on écrit $\bar{x}_1 = \lim_{n\to\infty} x_1^{(n)}$ et $\bar{x}_2 = \lim_{n\to\infty} x_2^{(n)}$ alors $(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \in S$ où $S = S_1 \times S_2$ et $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ est la seul solution du système (1) dans l'ensemble S ;

iii. Les relations suivantes ont lieu

$$\rho_1(x_1, x_1^{(n)}) \le d_1\, p_1^n/(1-p_1)$$

$$\rho_2(x_2, x_2^{(n)}) \le d_1\, h_1\, p_1^n/(1-p_1)$$

Démonstration. De i. et de (2) nous déduisons les inégalités suivantes

$$\rho_1(x_1^{(2)}, x_1^{(1)}) \le \alpha\, \rho_1(x_1^{(1)}, x_1^{(0)}) + \beta\, \rho_2(x_2^{(1)}, x_2^{(0)}) \le$$

$$\le \alpha d_1 + \beta d_1\, h_1 \le d_1\, p_1$$

et

$$\rho_2(x_2^{(2)}, x_2^{(1)}) \le a\, \rho_1(x_1^{(2)}, x_1^{(1)}) + b\, \rho_2(x_2^{(1)}, x_2^{(0)}) \le$$

$$\le a\, d_1\, p_1 + b\, d_1\, h_1 \le d_1\, h_1\, p_1 .$$

Nous montrons à présent que $x_1^{(2)} \in S_1$ et $x_2^{(2)} \in S_2$. Nous avons en effet

$$\rho_1(x_1^{(2)}, x_1^{(0)}) \le \rho_1(x_1^{(2)}, x_1^{(1)}) + \rho_1(x_1^{(1)}, x_1^{(0)})$$

$$d_1 + d_1\, p_1 < d_1/(1-p_1),$$

et

$$\rho_2(x_2^{(2)}, x_2^{(0)}) \le \rho_2(x_2^{(2)}, x_2^{(1)}) + \rho_2(x_2^{(1)}, x_2^{(0)}) \le$$

$$\le d_1\, h_1 + d_1\, p_1\, h_1 \le h_1 \cdot d_1/(1-p_1)$$

d'où il résulte que $x_1^{(2)} \in S_1$, $x_2^{(2)} \in S_2$.

Nous supposerons à présent que les inégalités suivantes ont lieu

(9) $$\rho_1(x_1^{(i)}, x_1^{(i-1)}) \le d_1\, p_1^{i-1}$$

$$\rho_2(x_2^{(i)}, x_2^{(i-1)}) \le d_1\, h_1\, p_1^{i-1}$$

pour $i = 1,2,\dots,k$ et

(10) $$x_1^{(k)} \in S_1, \quad x_2^{(k)} \in S_2 .$$

En tenant compte de ii., nous déduisons des hypothèses (9) et (10) et de i.

$$\rho_1(x_1^{(k+1)}, x_1^{(k)}) = \rho_1(F_1(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}), F_2(x_1^{(k-1)}, x_2^{(k-1)})) \le$$

$$\le \alpha\, \rho_1(x_1^{(k)}, x_2^{(k-1)}) + \beta \cdot \rho_2(x_2^{(k)}, x_2^{(k-1)}) \le d_1\, p_1^{k-1}(\alpha + \beta h_1) = d_1 \cdot p_1^k$$

et en tenant compte de l'inégalité ci-dessus nous déduisons de manière analogue

$$\rho_2(x_2^{(k+1)}, x_2^{(k)}) \le d_1 \cdot h_1 \cdot p_1^k$$

d'où il résulte que les relations (9) ont également lieu pour $i = k+1$.

Nous montrerons maintenant que $x_1^{(k+1)} \in S_1$ et $x_2^{(k+1)} \in S_2$. Il résulte des inégalités ci-dessus

$$\rho_1(x_1^{(k+1)}, x_1^{(0)}) \le \rho_1(x_1^{(k+1)}, x_1^{(k)}) + \rho_1(x_1^{(k)}, x_1^{(k-1)}) + \dots$$

$$+ \rho_1(x_1^{(1)}, x_1^{(0)}) \le d_1 + d_1 p_1 + d_1 p_1^2 + \dots + d_1 p_1^k < d_1/(1-p_1)$$

et de manière analogue

$$\rho_2(x_2^{(k+1)}, x_2^{(0)}) < d_1 h_1/(1-p_1) .$$

Du fait que les inégalités (9) ont lieu pour tout $i = 1,2,\dots$, il résulte que les suites $(x_1^{(n)})_{n=0}^{\infty}$ et $(x_2^{(n)})_{n=0}^{\infty}$ sont fondamentales et que les inégalités suivantes sont vraies

(11) $$\rho_1(x_1^{(n+s)}, x_1^{(n)}) \le d_1 p_1^n/(1-p_1)$$

$$\rho_2(x_2^{(n+s)}, x_2^{(n)}) \le d_1 h_1 p_1^n/(1-p_1)$$

pour tout $n = 0,1,\dots$; $s = 1,2,\dots$.

De l'hypothèse que les espaces X_1 et X_2 sont des espaces complets il résulte que les suites $(x_n^{(n)})_{n=0}^{\infty}$ et $(x_2^{(n)})_{n=0}^{\infty}$ sont convergentes.

En passant à la limite pour $s \to \infty$ nous déduisons de (11)

(12) $$\rho_1(\bar{x}_1, x_1^{(n)}) \le d_1 p_1^n/(1-p_1)$$

$$\rho_2(\bar{x}_2, x_2^{(n)}) \le d_1 h_1 p_1^n/(1-p_1)$$

Il en résulte, pour $n = o$, que $\bar{x}_1 \in S_1$ et $\bar{x}_2 \in S_2$. Nous montrerons que $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ est la seul solution du système (1) à la propriété que $\bar{x}_1 \in S_1$ et $\bar{x}_2 \in S_2$.

Supposons par l'absurde que le système (1) a une autre solution $(\bar{y}_1, \bar{y}_2)$ à la propriété $\bar{y}_1 \in S_1$, $\bar{y}_2 \in S_2$. En tenant compte de i., il en résulte les inégalités

$$\rho_1(\bar{x}_1, \bar{y}_1) \le \frac{\beta a}{(1 - \ )(1 - b)} \cdot \rho_1(\bar{x}_1, \bar{y}_1)$$

$$\rho_2(\bar{x}_2, \bar{y}_2) \le \frac{\beta a}{(1 - \ )(1 - b)} \cdot \rho_2(x_2, y_2)$$

et de (5) il résulte que $\frac{\beta a}{(1 - \ )(1 - b)} < 1$. Par conséquent les inégalités ci-dessus ont lieu si et seulement si $\bar{x}_1 = \bar{y}_1$ et $\bar{x}_2 = \bar{y}_2$.

Nous considérons à présent deux applications $F_1^*: D \to X_1$ et $F_2^*: D \to X_2$, où $D = D_1 \times D_2$.

Nous supposerons que F_1^*, F_2^*, F_1 et F_2 vérifient les relations

$$\text{(13)} \qquad \begin{aligned} &\rho_1(F_1^*(u,v), F_1(u,v)) \le \delta_1 \\ &\rho_2(F_2^*(u,v), F_2(u,v)) \le \delta_2 \end{aligned}$$

pour tout $(u,v) \in D$, où $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$ sont des nombres donnés.

En vu de résoudre le système (1) nous considérons à présent à la place du procédé (2) le procédé itératif suivant :

$$\text{(14)} \qquad \begin{aligned} &\xi_1^{(n+1)} = F_1(\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}) \\ &\xi_2^{(n+1)} = F_2(\xi_1^{(n+1)}, \xi_2^{(n)}) \ ; \quad \xi_1^{(0)} = x_1^{(o)}, \quad \xi_2^{(0)} = x_2^{(o)}, \quad n = 0, 1, \ldots \end{aligned}$$

Dans ce qui suit nous procéderons à la délimitation des erreurs au cas où pour la résolution du système (1) nous utilisons à la place du procédé (2) le procédé (14). Nous écrivons

$$\text{(15)} \qquad \theta_1 = \frac{\beta\delta_2 + (1-b)\delta_1}{(1-\alpha)(1-b) - a\beta}, \qquad \theta_2 = \frac{(1-\alpha)\delta_2 + a\delta_1}{(1-\alpha)(1-b) - a\beta}$$

et désignons par S_1^*, S_2^* les ensembles suivants :

$$\text{(16)} \qquad \begin{aligned} S_1^* &= \{ x \in X_1 \mid \rho_1(x, x_1^{(o)}) \le d_1 + d_1/(1-p_1) + \theta_1 \} \\ S_2^* &= \{ x \in X_2 \mid \rho_2(x, x_2^{(o)}) \le d_1 h_1 + d_1 h_1/(1-p_1) + \theta_2 \} \end{aligned}$$

Dans ces notations nous démontrerons le Théorème suivant :

THÉORÈME 2. Si les hypothèses du Théorème 1 sont satisfaites et si de plus les conditions suivantes sont remplies :

i_1. Les applications F_1, F_2, F_1^* et F_2^* remplissent les conditions (13) ;

i_2. $S_1^* \subseteq D_1$, $S_2^* \subseteq D_2$,

alors quels que soient les nombres réels ε_1, ε_2 qui vérifient les relations $\varepsilon_1 > 2\theta_1$, $\varepsilon_2 > 2\theta_2$, il existe un $n' \in N$ tel que $\rho_1(\xi_1^{(n+1)}, \xi_1^{(n)}) \le \varepsilon_1$ et $\rho_2(\xi_2^{(n+1)}, \xi_2^{(n)}) \le \varepsilon_2$ pour tout $n > n'$ et, de plus, les propriétés suivantes sont vraies :

j_1. $\xi_1^{(n)} \in S_1$, $\xi_2^{(n)} \in S_2$ pour tout $n = 1, 2, \ldots$;

j_2. Les inégalités suivantes sont vraies :

$$\rho_1(\bar{x}_1, \xi_1^{(n+1)}) \le \frac{\beta(a\varepsilon_1 + b\varepsilon_2) + \alpha\varepsilon_1(1-b)}{(1-\alpha)(1-b) - a\beta} + \frac{\varepsilon_1}{2}$$

$$\rho_2(\bar{x}_2, \xi_2^{(n+1)}) \le \frac{a(\alpha\varepsilon_1 + \beta\varepsilon_2) + b\varepsilon_2(1-\alpha)}{(1-\alpha)(1-b) - a\beta} + \frac{\varepsilon_2}{2}$$

pour tout $n > n'$, où $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ est la solution du système (1).

Démonstration. Nous montrerons d'abord que les propriétés j_1 sont vraies. Du fait que nous avons supposé que $\xi_1^{(0)} = x_1^{(o)}$, $\xi_2^{(0)} = x_2^{(o)}$, il résulte de (14) et de i.

$$\rho_1(x_1^{(1)}, \xi_1^{(1)}) = \rho_1(F_1(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}), F_1^*(\xi_1^{(0)}, \xi_2^{(0)})) \leq$$
$$\delta_1 + \alpha\rho_1(\xi_1^{(0)}, x_1^{(0)}) + \beta\rho_2(\xi_2^{(0)}, x_2^{(0)}) = \delta_1$$

En tenant compte de iii., nous en déduisons

$$\rho_1(\xi_1^{(1)}, x_1^{(0)}) \leq \rho_1(\xi_1^{(1)}, x_1^{(1)}) + \rho_1(x_1^{(1)}, x_1^{(0)}) \leq \delta_1 + d_1 \leq$$
$$\leq d_1 + \frac{d_1}{1-p_1} + \theta_1$$

vu qu'évidemment $\delta_1 \leq \theta_1$, d'où il résulte $\xi_1^{(1)} \in S_1^*$.

Nous avons de manière analogue

$$\rho_2(x_2^{(1)}, \xi_2^{(1)}) = \rho_2(F_2(x_1^{(1)}, x_2^{(0)}), F_2^*(\xi_1^{(1)}, \xi_2^{(0)}) \leq$$
$$\leq \delta_2 + a\rho_1(\xi_1^{(1)}, x_1^{(1)}) + b\rho_2(\xi_2^{(0)}, x_2^{(0)}) \leq \delta_2 + a\delta_1$$

En tenant compte de iii. nous en déduisons

$$\rho_2(\xi_2^{(1)}, x_2^{(0)}) \leq \rho_2(\xi_2^{(1)}, x_2^{(1)}) + \rho_2(x_2^{(1)}, x_2^{(0)}) \leq \delta_2 + a\delta_1 + d_1 h_1$$

En tenant compte du fait que $\delta_2 + a\delta_1 \leq \theta_2$ il en résulte que

$$\rho_2(\xi_2^{(1)}, x_2^{(0)}) \leq h_1 d_1 + \frac{h_1 d_1}{1-p_1} + \theta_2$$

et par conséquent $\xi_2^{(1)} \in S_2^*$.

Nous supposerons à présent par induction que $\xi_1^{(n-1)} \in S_1^*$ et $\xi_2^{(n-1)} \in S_2^*$.

Nous avons alors

(16') $$\rho_1(\xi_1^{(n)}, x_1^{(n)}) = \rho_1(F_1(x_1^{(n-1)}, x_2^{(n-1)}), F^*(\xi_1^{(n-1)}, \xi_2^{(n-1)})) \leq$$
$$\leq \alpha\rho_1(x_1^{(n-1)}, \xi_1^{(n-1)}) + \beta\rho_2(x_2^{(n-1)}, \xi_2^{(n-1)}) + \delta_1$$

et

(17) $$\rho_2(\xi_2^{(n)}, x_2^{(n)}) = \rho_2(F_2(x_1^{(n)}, x_2^{(n-1)}), F_2^*(\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n-1)})) \leq$$
$$\leq a\rho_1(x_1^{(n)}, \xi_1^{(n)}) + b\rho_2(x_2^{(n-1)}, \xi_2^{(n-1)}) + \delta_2.$$

On montre par induction, à partir des relations ci-dessus, que

(18) $$\rho_1(\xi_1^{(n)}, x_1^{(n)}) \leq d_1 h_1^{n-1} \cdot k_1^{n-1} + \theta_1$$
$$\rho_2(\xi_2^{(n)}, x_2^{(n)}) \leq d_1 h_1^{n} \cdot k_1^{n-1} + \theta_2,$$

d'où nous déduisons :

$$\rho_1(\xi_1^{(n)}, x_1^{(0)}) \leq \rho_1(\xi_1^{(n)}, x_1^{(n)}) + \rho_1(x_1^{(n)}, x_1^{(0)}) \leq d_1 + \frac{d_1}{1-p_1} + \theta_1$$

et

$$\rho_2(\xi_2^{(n)}, x_2^{(0)}) \leq \rho_2(\xi_2^{(n)}, x_2^{(n)}) + \rho_2(x_2^{(n)}, x_2^{(0)}) \leq d_1 h_1 + \frac{d_1 h_1}{1-p_1} + \theta_2$$

c'est-à-dire $\xi_1^{(n)} \in S_1^*$, $\xi_2^{(n)} \in S_2^*$.

Des hypothèses du Théorème 2 et du fait que $\xi_1^{(n)} \in S_1^*$, $\xi_2^{(n)} \in S_2^*$ pour tout $n \in N$, il résulte les relations suivantes :

$$\rho_1(\xi_1^{(n+1)}, \xi_1^{(n)}) \leq \alpha\rho_1(\xi_1^{(n)}, \xi_1^{(n-1)}) + \beta\rho_2(\xi_2^{(n)}, \xi_2^{(n-1)}) + 2\delta_1$$

et

$$\rho_2(\xi_2^{(n+1)}, \xi_2^{(n)}) \leq a\,\rho_1(\xi_1^{(n+1)}, \xi_1^{(n)}) + b\,\rho_2(\xi_2^{(n)}, \xi_2^{(n-1)}) + 2\delta_2$$

pour $n = 0, 1, \ldots$.

Des inégalités ci-dessus nous déduisons les inégalités suivantes :

(19) $$\rho_1(\xi_1^{(n+1)}, \xi_1^{(n)}) \leq d_1 h_1^{n-1} \cdot k_1^{n-1} + 2\theta_1$$
$$\rho_2(\xi_2^{(n+1)}, \xi_2^{(n)}) \leq d_1 h_1^{n} \cdot k_1^{n-1} + 2\theta_2, \quad n=1,2,\ldots.$$

On déduit immédiatement de (19) que si $\varepsilon_1 > 2\theta_1$ et $\varepsilon_2 > 2\theta_2$, alors il existe $n' \in N$ tel que pour $n > n'$, $\rho_1(\xi_1^{(n+1)}, \xi_1^{(n)}) \leq \varepsilon_1$ et $\rho_2(\xi_2^{(n+1)}, \xi_2^{(n)}) \leq \varepsilon_2$ c'est-à-dire que le procédé itératif (14) peut être arrêté alors que la distance entre deux itérations successives et suffisamment petite.

est?

Nous évaluerons à présent les distances entre les solutions $\overline{x}_1$ et $\overline{x}_2$ du système (1) et les éléments des suites $(\xi_1^{(n)})_{s=0}^{\infty}$, respectivement $(\xi_2^{(n)})_{s=0}^{\infty}$. Nous supposerons que le procédé itératif (14) est arrêté lorsque $\rho_1(\xi_1^{(n+1)}, \xi_1^{(n)}) \leq \varepsilon_1$ et $\rho_2(\xi_2^{(n+1)}, \xi_2^{(n)}) \leq \varepsilon_2$.

En tenant compte de ce qui a été démontré ci-dessus et des hypothèses du Théorème 2, nous avons :

$$\rho_1(\overline{x}_1, \xi_1^{(n+1)}) \leq \alpha\rho_1(\overline{x}_1, \xi_1^{(n)}) + \beta\rho_2(\overline{x}_2, \xi_2^{(n)}) + \delta_1$$

et

$$\rho_2(\bar{x}_2, \xi_2^{(n+1)}) \leq a\rho_1(\bar{x}_1, \xi_1^{(n+1)}) + b\,\rho_2(\bar{x}_2, \xi_2^{(n)}) + \delta_2$$

Il résulte des inégalités ci-dessus

$$(1-\alpha)\,\rho_1(\bar{x}_1, \xi_1^{(n+1)}) \leq \alpha\varepsilon_1 + \beta\rho_2(\bar{x}_2, \xi_2^{(n)}) + \delta_1$$

$$(1-b)\,\rho_2(\bar{x}_2, \xi_2^{(n+1)}) \leq a\,\rho_1(\bar{x}_1, \xi_1^{(n+1)}) + b\,\varepsilon_2 + \delta_2$$

c'est - à - dire

$$(21)\quad \begin{aligned} \rho_1(\bar{x}_1, \xi_1^{(n+1)}) &\leq \frac{\alpha\varepsilon_1}{1-\alpha} + \frac{\beta}{1-\alpha}\rho_2(\bar{x}_2, \xi_2^{(n)}) + \frac{\delta_1}{1-\alpha} \\ \rho_2(\bar{x}_2, \xi_2^{(n+1)}) &\leq \frac{a}{1-b}\rho_1(\bar{x}_1, \xi_1^{(n+1)}) + \frac{b\varepsilon_2}{1-b} + \frac{\delta_2}{1-b} \end{aligned}$$

d'où il résulte

$$(22)\quad \rho_2(\bar{x}_2, \xi_2^{(n+1)}) \leq \frac{a(\alpha\varepsilon_1 + \beta\varepsilon_2) + b(1-\alpha)\varepsilon_2}{(1-\alpha)(1-b) - a\beta} + \frac{\varepsilon_1}{2}$$

Du fait que $n > n' + 1$, il s'ensuit que la seconde inégalité de (21) est également vraie si nous remplacons $n+1$ par n, c'est - à-dire que

$$\rho_2(\bar{x}_2, \xi_2^{(n)}) \leq \frac{a}{1-b}\,\rho_1(\bar{x}_1, \xi_1^{(n)}) + \frac{b\,\varepsilon_2}{1-b} + \frac{\delta_2}{1-b},$$

inégalité qui associée à l'inégalité de (21) nous donne

$$(23)\quad \rho_1(\bar{x}_1, \xi_1^{(n+1)}) \leq \frac{\beta(a\varepsilon_1 + b\varepsilon_2) + \alpha(1-b)\varepsilon_1}{(1-\alpha)(1-b) - a\beta} + \frac{\varepsilon_1}{2}$$

RÉFÉRENCES

1 PAVALOIU, I., Introducere în teoria aproximării soluţiilor ecuaţiilor, Editura DACIA, Cluj-Napoca, 1976

2 PAVALOIU, I., La resolution des systèmes operationnelles à l'aide des méthodes itératives, Mathematica, 11 (34), (1969), 137 - 141.

3 PAVALOIU, I., Estimation des erreurs dans la résolution numérique des systèmes d'équations dans des espaces métriques, Seminar on Functional Analysis and Numerical Methods, Preprint Nr.1, (1987), 121 - 129

4 PAVALOIU, I., La convergence de certaines methodes itérative pour resoudre certaines équations operatorielles, Seminar on Functional Analysis and Numerical Methods, Preprint Nr.1, (1986), 127 - 132.

5 TRAUB, J.F., Iterative Methods for the Solution of Equations, Prentice Hall Series in Automatic Computation Englewood Cliffs, N.J. (1964).

6 URABE, M., Convergence of Numerical Iteration in Solution of Equations, J. Sci. Hiroshima Univ. Ser. A, 19 (1956), 479 - 489.

7 URABE, M., Error Estimation in Numerical Solution of Equations by Iteration Process, J. Sci. Hiroshima Univ. Ser. A - I, 26, (1962), 77 - 91.

R é s u m é

Dans ce travail on fournit des délimitations pour les erreurs commises dans la résolution numérique à l'aide de la méthode de Gauss-Seidel - d'un sytème de deux équations à deux inconnues dans des espaces métriques.

Si (X_i, ρ_i), $i = 1,2$, sont deux espaces métriques complets et $F_1 : X_1 \times X_2 \to X_1$ et $F_2 : X_1 \times X_2 \to X_2$ deux applications, alors on applique en vue de la résolution du sytème $x_1 = F_1(x_1, x_2)$, $x_2 = F_2(x_1, x_2)$, la méthode de Gauss - Seidel et on donne des conditions suffisantes pour la convergence du procédé utilisé.

(système)

désigne

On désinge par $D_1 \subset X_1$ et $D_2 \subset X_2$ deux ensembles bornées de X_1 et X_2 et on considère ensuite deux opérateurs $F_1^* : D_1 \times D_2 \to X_1$, $F_2^* : D_1 \times D_2 \to X_2$ qui vérifient par rapport à F_1 et F_2 les conditions : $\rho_1(F_1(x_1,x_2), F_1^*(x_1,x_2)) \leq \varepsilon_1$, $\rho_2(F_2(x_1,x_2), F_2^*(x_1,x_2)) \leq \varepsilon_2$ pour chaque $(x_1,x_2) \in D_1 \times D_2$. Dans ces conditions on applique en vue de la résolution du sytème initial la méthode de Gauss-Seidel au sytème $x_1 = F_1^*(x_1,x_2)$, $x_2 = F_2^*(x_1,x_2)$. Dans ces conditions on donne des délimitations de la distance entre la solution du système et la solution approximative.

système

Ion Păvăloiu

Institutul de Matematică

Oficiul Poştal 1

C. P. 68

3400 Cluj-Napoca

Romania

This Note is in final form and no version of it it is or will be submitted for publication elsewhere.