Seminarul itinerant de ecuaţii funcţionale, aproximare şi convexitate, Timişoara, 7-8 noiembrie 1980.

ASUPRA UNEI TEOREME DE TIP POPOVICIU-KOROVKIN

de

Radu Precup
(Cluj-Napoca)

1. In lucrarea [1] se dă o extindere într-un cadru mai abstract a unei teoreme de tip Popoviciu-Korovkin; operatorii liniari şi pozitivi sînt de tip Bernstein iar funcţiile test sînt $1, t, t^2$. In această lucrare, folosind rezultatul din [1] şi o teoremă clasică a lui Korovkin, extindem aceste rezultate considerînd şiruri oarecari de operatori liniari şi pozitivi şi funcţii de test construite cu ajutorul a trei fîncţii (reale) care formează un sistem al lui Cebîşev.

2. Fie X un spaţiu Banach real şi fie mulţimea

$$(1)\quad \Lambda_c = \{T : [0,1]\times X \longrightarrow X \,/\, T(t,.) : X \longrightarrow X \text{ lin., cont.}, \ \forall t\in[0,1],\ T(.,x) : [0,1] \longrightarrow X \text{ cont. } \forall x \in X\}$$

considerăm scufundarea

$$(2)\quad s : C[0,1] \longrightarrow \Lambda_c\ ,\quad s(f) = T_f\ ,\quad T_f(t,x) = f(t)x,\ t\in[0,1],\ x\in X$$

şi $K = \{T_f \,/\, f(t)\geq 0,\ t\in[0,1]\}$, imaginea prin s a conului $K^+[0,1]$ al funcţiilor continue şi nenegative pe $[0,1]$.

In Λ_c definim o noţiune de convergenţă prin :

$$(3)\quad (T_n)_{n=1}^{\infty},\ T\in\Lambda_c\ ,\ T_n \xrightarrow{\Lambda} T \iff \forall x\in X\ ,\ T_n(t,x) \xrightarrow{X} T(t,x) \text{ uniform cînd } t\in[0,1].$$

avem

$$(4)\quad T_{f_n} \xrightarrow{\Lambda} T_f \iff f_n \rightrightarrows f \text{ pe } [0,1].$$

Fie $B_m : \Lambda_c \longrightarrow \Lambda_c$, $m\in N$, operatorii lui Bernstein:

$$(5)\quad B_m[T](t,x) = \sum_{k=0}^{m} q_{km}(t)\,T\left(\frac{k}{m},x\right)\ ,\ \text{unde}$$

$$q_{km}(t) = \binom{m}{k} t^k (1-t)^{m-k}\ ,\ k=0,1,\dots,m\ ,\quad m\in N.$$

are loc

$$(6)\quad B_m[T](t,x) = \sum_{k=0}^{m} T_{q_{km}}\left(t, T\left(\frac{k}{m},x\right)\right) = \sum_{k=0}^{m} T_{q_{km}}\left(.,T\left(\frac{k}{m},.\right)\right)(t,x)$$

LEMA (P.L.BUTZER, H.BERENS [1]): $B_m[T] \xrightarrow{\Delta} T$, $\forall T\in \Delta_c$.

TEOREMA: Fie $f_1, f_2, f_3 \in C[0,1]$ un sistem al lui Cebîşev pe $[0,1]$ şi fie $\phi_n: \Delta_c \longrightarrow \Delta_c$, $n\in N$, un şir de operatori liniari, (K,K)-pozitivi, uniform continuu pe Δ_c, verificînd

(7) $\phi_n[T_f(\cdot,g(\cdot))] = \phi_n[T_f](\cdot,g(\cdot))$, $\forall f\in K^+[0,1]$, $\forall g: X\to X$ lin., cont., $\forall n\in N$.

Dacă

(8) $\phi_n[T_{f_i}] \xrightarrow{\Delta} T_{f_i}$, $i=1,2,3$

atunci

(9) $\phi_n[T] \xrightarrow{\Delta} T$, $\forall T\in\Delta_c$.

Demonstraţie: Fie $x\in X$ fixat (arbitrar)

(10) $$\|\phi_n[T](t,x)-T(t,x)\| \le \|\phi_n[T](t,x)-\phi_n[B_m[T]](t,x)\| + \|\phi_n[B_m[T]](t,x)-B_m[T](t,x)\| + \|B_m[T](t,x)-T(t,x)\|.$$

Pe baza lemei

(11) $\|B_m[T](t,x)-T(t,x)\| < \frac{\varepsilon}{3}$, $\forall t\in[0,1]$, dacă $m>m_\varepsilon$

Sirul $(\phi_n)_{n=1}^{\infty}$ fiind uniform continuu pe Δ_c avem

(12) $\|\phi_n[T](t,x)-\phi_n[B_m[T]](t,x)\| < \frac{\varepsilon}{3}$, $\forall t\in[0,1]$, $\forall n\in N$, dacă

(13) $\|T(t,x)-B_m[T](t,x)\| < \delta_\varepsilon$, $\forall t\in[0,1]$.

Insă (13) se realizează dacă $m>m_{\delta_\varepsilon}$ şi prin urmare (11) şi (12) se realizează alegînd $\bar m > \max(m_\varepsilon, m_{\delta_\varepsilon})$.

Dovedim în continuare

(14) $\phi_n[T_f] \xrightarrow{\Delta} T_f$, $\forall f\in C[0,1]$.

Orice $f\in C[0,1]$ se scrie sub forma $f=f^+-f^-$, $f^+,f^-\in K^+[0,1]$

ϕ_n fiind liniar avem

$$\phi_n[T_f]=\phi_n[T_{f^+-f^-}]=\phi_n[T_{f^+}-T_{f^-}]=\phi_n[T_{f^+}]-\phi_n[T_{f^-}]$$

f^+,f^- fiind în $K^+[0,1]$ iar ϕ_n fiind pozitiv urmează că $\phi_n[T_f]\in s(C[0,1])$, $\forall f\in C[0,1]$ şi deci ϕ_n defineşte operatorul

(15) $\psi_n: C[0,1]\longrightarrow C[0,1]$, $\phi_n[T_f]=T_{\psi_n[f]}$, $f\in C[0,1]$

pentru care avem:

(16) $T_{\psi_n[\alpha f+\beta g]} = \phi_n[T_{\alpha f+\beta g}] = \phi_n[\alpha T_f+\beta T_g] = \alpha\phi_n[T_f]+\beta\phi_n[T_g] =$

$= \alpha T_{\psi_n[f]} + \beta T_{\psi_n[g]} = T_{\alpha\psi_n[f]+\beta\psi_n[g]}$, $\alpha,\beta\in R, f,g\in C[0,1]$

de unde

(17) $\psi_n[\alpha f+\beta g]=\alpha\psi_n[f]+\beta\psi_n[g]$, $\forall\alpha,\beta\in R$, $\forall f,g\in C[0,1]$

adică ψ_n este liniar ; ψ_n este pozitiv datorită pozitivităţii lui ϕ_n ; în plus din (8) şi

(18) $\phi_n[T_{f_i}]=T_{\psi_n[f_i]}$; $i=1,2,3$, $n\in N$

avem, ţinînd seama de (4) :

(19) $\psi_n[f_i] \rightrightarrows f_i$, $i=1,2,3$ pe $[0,1]$.

Pe baza teoremei lui Korovkin are atunci loc

(20) $\psi_n[f] \rightrightarrows f$ pe $[0,1]$, $\forall f\in C[0,1]$

ceea ce demonstrează (14). In particular

(21) $\phi_n[T_{q_{k\bar m}}] \xrightarrow{\Delta} T_{q_{k\bar m}}$, $k=0,1,\dots,\bar m$

de unde

(22) $\phi_n[T_{q_{k\bar m}}](t,T(\frac{k}{\bar m},x)) \rightrightarrows T_{q_{k\bar m}}(t,T(\frac{k}{\bar m},x))$ pe $[0,1]$, $k=0,1,\dots,\bar m$

Aşadar

(23) $\|\phi_n[T_{q_{k\bar m}}](t,T(\frac{k}{\bar m},x))-T_{q_{k\bar m}}(t,T(\frac{k}{\bar m},x))\| < \frac{\varepsilon}{3(\bar m+1)}$, $\forall t\in[0,1]$, $k=0,1,\dots,\bar m$ dacă $n>n_{\varepsilon,\bar m}$

de unde

(24) $$\|\phi_n[B_{\bar m}[T]](t,x)-B_{\bar m}[T](t,x)\| =$$

$$= \Big\|\phi_n\Big[\sum_{k=0}^{\bar m} T_{q_{k\bar m}}(\cdot,T(\tfrac{k}{\bar m},\cdot))\Big](t,x) - \sum_{k=0}^{\bar m} T_{q_{k\bar m}}(\cdot,T(\tfrac{k}{\bar m},\cdot))(t,x)\Big\|$$

$$\le \sum_{k=0}^{\bar m}\|\phi_n[T_{q_{k\bar m}}(\cdot,T(\tfrac{k}{\bar m},\cdot))](t,x)-T_{q_{k\bar m}}(\cdot,T(\tfrac{k}{\bar m},\cdot))(t,x)\|$$

$$= \sum_{k=0}^{\bar m}\|\phi_n[T_{q_{k\bar m}}](t,T(\tfrac{k}{\bar m},x))-T_{q_{k\bar m}}(t,T(\tfrac{k}{\bar m},x))\| < \frac{\varepsilon}{3}$$

$\forall t\in[0,1]$ dacă $n>n_{\varepsilon,\bar m}$

din (11), (12), (24) rezultă (9). Q.E.D.

Fie funcţiile :

25) $\varphi_{kn} \in K^{+}[0,1]$, $k=0,1,\dots,n$, $n\in N$,

şi punctele

26) $t_{kn}\in[0,1]$, $k=0,1,\dots,n$, $n\in N$,

şi operatorii $P_n : \Delta_c \longrightarrow \Delta_c$,

27) $P_n[T](t,x) = \sum_{k=0}^{n}\varphi_{kn}(t)T(t_{kn},x)$, $t\in[0,1]$, $x\in X$, $n\in N$

COROLAR : Dacă

28) $P_n[T_{f_i}] \xrightarrow{\Delta} T_{f_i}$, $i=1,2,3$

atunci

(29) $P_n[T] \xrightarrow{\Delta} T$, $\forall\, T\in \Delta_c$.

Demonstraţie:

(30) $P_n[T_f(\cdot,g(\cdot))](t,x) = \sum_{k=0}^{n}\varphi_{kn}(t)T_f(t_{kn},g(x)) =$

$= P_n[T_f](\cdot,g(\cdot))(t,x)$, $\forall\, f\in C[0,1]$, $g:X\to X$ lin.,cont., $n\in N$

aşadar este verificată condiţia (7) . Pentru a dovedi că şirul $(P_n)_{n=1}$ este uniform continuu pe Δ_c fie $(T_m)_{m=1}^{\infty}\subset \Delta_c$, $T_m \xrightarrow{\Delta} T\in\Delta_c$; avem

(31) $\| P_n[T_m](t,x)-P_n[T](t,x)\| \le$

$$\le \sum_{k=0}^{n}\varphi_{kn}(t)\| T_m(t_{kn},x)-T(t_{kn},x)\| \le \frac{\varepsilon}{M}\sum_{k=0}^{n}\varphi_{kn}(t) ,$$

$\forall\, t\in[0,1]$, $m > m_{\varepsilon,x}$, $n\in N$.

$f_1,f_2,f_3\in C[0,1]$ formează un sistem Cebîşev pe $[0,1]$ şi prin urmare există $F\in C[0,1]$, $F=\sum_{i=1}^{3}\gamma_i f_i$, $\gamma_i\in R$, $i=1,2,3$ astfel încît $F(t)>0$, $\forall\, t\in[0,1]$.

Din (28) rezultă

(32) $P_n[T_F] \xrightarrow{\Delta} T_F$

de unde

(33) $\sum_{k=0}^{n}\varphi_{kn}(t)F(t_{kn})x \xrightarrow{X} F(t)x$ unif. $t\in[0,1]$, $\forall\, x\in X$

ceea ce implică

(34) $\sum_{k=0}^{n}\varphi_{kn}(t)m_F \le \sum_{k=0}^{n}\varphi_{kn}(t)F(t_{kn}) \le M_F+1$, $\forall\, t\in[0,1]$

dacă $n>n_0$

unde $M_F = \max_{t\in[0,1]} F(t)$, $m_F = \min_{t\in[0,1]} F(t) > 0$

aşadar

(35) $\sum_{k=0}^{n}\varphi_{kn}(t) \le \frac{M_F+1}{m_F} := M$, $\forall\, t\in[0,1]$, $n>n_0$

care împreună cu (31) ne dă

(36) $\| P_n[T_m](t,x)-P_n[T](t,x)\| \le \varepsilon$, $\forall\, t\in[0,1]$,

$\forall\, m > m_{\varepsilon,x}$, $n>n_0$. Q.E.D.

In continuare vom aplica teorema unor şiruri de operatori de tip convoluţie ; fie

$\varphi:[-1,1]\longrightarrow R$, nenegativă, continuă, pară, descrescătoare pe $[0,1]$, $\varphi(0)=1$, $0\le\varphi(t)<1$, $0<t\le 1$,

(37) $K_n : \Delta_c \longrightarrow \Delta_c$,

$K_n[T](t,x)=\rho_n \int_0^1 T(s,x)\varphi^n(s-t)ds$, $t\in[0,1]$, $x\in X$, $n\in N$

$1/\rho_n = 2\int_0^1\varphi^n(t)dt$

COROLAR 2 : Este adevărată afirmaţia

(38) $K_n[T] \xrightarrow{\Delta} T$, $\forall\, T\in\Delta_c$.

Demonstraţie:

(39) $K_n[T(\cdot,g(\cdot))](t,x)=\rho_n\int_0^1 T(\cdot,g(\cdot))(s,x)\varphi^n(s-t)ds =$

$= \rho_n\int_0^1 T(s,g(x))\varphi^n(s-t)ds = K_n[T](\cdot,g(\cdot))(t,x)$

şi deci este verificată (7) . Fie $(T_m)_{m=1}^{\infty}\subset\Delta_c$, $T_m \xrightarrow{\Delta} T\in\Delta_c$

(40) $\| K_n[T_m](t,x)-K_n[T](t,x)\| \le \rho_n\int_0^1\varphi^n(s-t)\| T_m(s,x)-T(s,x)\| ds$

$\le \varepsilon\rho_n\int_{-t}^{1-t}\varphi^n(u)du \le \varepsilon$, $\forall\, t\in[0,1]$, $n\in N$, dacă $m>m_{\varepsilon,x}$

ceea ce dovedeşte că şirul $(K_n)_{n=1}^{\infty}$ este uniform continuu pe Δ_c .

Operatorii $K_n:\Delta_c\longrightarrow\Delta_c$ sînt liniari şi (K,K)-pozitivi, şi $K_n[T_1]\xrightarrow{\Delta}T_1$, $K_n[T_t]\xrightarrow{\Delta}T_t$, $K_n[T_{t^2}]\xrightarrow{\Delta}T_{t^2}$ şi demonstraţia este încheiată.

BIBLIOGRAFIE

1 BUTZER,P.L., BERENS,H., Semi-Groups of Operators and Approx., Springer-Verlag, Berlin, 1967.

2 KOROVKIN,P.P., Linejnye operatory teorija priblizenij, Moscova, 1959.

3 POPOVICIU,T., Asupra demonstraţiei teoremei lui Weierstrass cu ajutorul polinoamelor de interpolare, Acad.R.P.R., Lucrările sesiunii generale ştiinţifice, 2-12 iunie 1950, 1-4.