FACULTATEA DE MATEMATICA, Cluj-Napoca
Sedinţă de comunicări, 16.IV.1984

ITERATELE OPERATORILOR LUI H. BRASS

de

RADU PRECUP

(Cluj-Napoca)

Fie $n \in \mathbb{N}^*$ şi $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n \in \mathbb{N}$ astfel încît $\mu_1 + 2\mu_2 + \ldots + n\mu_n = n$.

Se consideră polinoamele

$$(1) \qquad p_{n\nu}(x) = \sum \binom{\mu_1}{\eta_1}\binom{\mu_2}{\eta_2}\cdots\binom{\mu_n}{\eta_n} x^{\eta}\cdot(1-x)^{\mu-\eta},$$

unde $\eta = \sum_{i=1}^{n} \eta_i$, $\mu = \sum_{i=1}^{n} \mu_i$, iar însumarea fiind făcută în raport cu toate sistemele de numere naturale $(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)$ verificînd $\eta_1 + 2\eta_2 + \ldots + n\eta_n = \nu$.

Se consideră operatorul definit pe $C[0,1]$ şi cu valori în $C[0,1]$:

$$(2) \qquad P_n^{(\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_n)} f = \sum_{\nu=0}^{n} f(\nu/n)\cdot p_{n\nu} \qquad (f \in C[0,1])$$

În [2] se studiază clasa $\mathcal{M}$ a operatorilor L_n $(n \in \mathbb{N}^*)$ ce sînt combinaţii convexe de operatori de tipul (2), anume

$$(3) \qquad L_n = \sum \alpha(\mu_1, \ldots, \mu_n) P_n^{(\mu_1,\ldots,\mu_n)}$$

unde $\alpha(\mu_1, \ldots, \mu_n) \geq 0$ şi $\sum \alpha(\mu_1, \ldots, \mu_n) = 1$.

Operatorii lui Bernstein B_n $(n \in \mathbb{N}^*)$ fac parte din clasa $\mathcal{M}$, mai precis $B_n = P_n^{(n,0,\ldots,0)}$. Are loc de asemenea $B_1 = P_n^{(0,0,\ldots,0,1)}$.

În această notă studiem convergenţa şirurilor de iterate ale operatorilor din clasa $\mathcal{M}$, $(L_n^{k(n)})_{n \geq 1}$, cînd $k(n)/n \to \infty$ $(n \to \infty)$, ca o completare a rezultatelor din [4].

TEOREMA. Fie şirul de iterate $(L_n^{k(n)})_{n\geq 1}$ în care $L_n \in \mathcal{M}$, $k(n)\in \mathbb{N}$ $(n\in \mathbb{N}^*)$ şi $k(n)/n \to \infty$ $(n \to \infty)$. Atunci

(4) $$L_n^{k(n)} f \rightrightarrows B_1 f \quad (n \to \infty) \qquad (f\in C[0,1]).$$

Demonstraţia se bazează pe următoarea proprietate de extremalitate în clasa $\mathcal{M}$, a operatorilor lui Bernstein [2] :

(5) $$B_n f \leq L_n f \leq B_1 f , \qquad (f\in \mathcal{C})$$

unde $\mathcal{C}$ este mulţimea funcţiilor continue şi neconcave pe $[0,1]$.

Se ţine cont de faptul că $B_n^{k(n)} f \rightrightarrows B_1 f$ $(n \to \infty)$ $(f\in C[0,1])$, rezultat demonstrat în [3], de faptul că operatorii din $\mathcal{M}$ conservă convexitatea şi de densitatea mulţimii $\mathcal{C}-\mathcal{C}$ în $C[0,1]$.

Pentru cazul în care operatorii L_n, $n\in \mathbb{N}^*$ sînt toţi egali a se vedea [1].

BIBLIOGRAFIE

[1] ALBU, M., Asupra convergentei iteratelor unor operatori liniari şi mărginiţi, Seminarul itinerant de ec.funcţ.,aprox.,conv., 17-19 mai 1979, Cluj-Napoca, pag. 6-16.

[2] BRASS, H., Eine Verallgemeinerung der Bernsteinschen Operatoren, Abh.Math.,36, 111-122 (1971).

[3] KELISKY, R.P., RIVLIN, T.J., Iterates of Bernstein Polynomials, Pacific J.Math., 21,3, 511-520 (1967).

[4] PRECUP, R., Reprezentarea unor semigrupuri cu ajutorul operatorilor de aproximare, Seminarul itinerant de ec.funcţ.,aprox., conv., nov. 1983, Iaşi.

Liceul de matematică-fizică nr.2
Cluj-Napoca