BULETIN ŞTIINŢIFIC
SECŢIA DE ŞTIINŢE MATEMATICE ŞI FIZICE
Tomul VIII, nr. 4, 1956

1

CONTRIBUŢII LA DERIVAREA PARŢIALĂ NUMERICĂ A FUNCŢIILOR DE DOUĂ ŞI MAI MULTE VARIABILE

DE

D.D. STANCU

Comunicare prezentată de T. POPOVICIU, *membru corespondent al Academiei R.P.R., în sesiunea Academiei R.P.R. din 2—6 iulie 1956*

Problema construirii formulelor de derivare numerică este deosebit de importantă în Analiza numerică, aceste formule servind în special la integrarea numerică a ecuaţiilor diferenţiale şi a ecuaţiilor cu derivate parţiale.

În cazul unei singure variabile acestor formule li s-a consacrat o vastă literatură. Amintim astfel memoriul important publicat recent de T. Popoviciu [1], precum şi lucrările lui Ş. E. Mikeladze [2] [3], J. F. Steffensen [4], G. D. Birkhoff [5], A.A. Markov [6] etc.

În cazul a două sau mai multe variabile, s-a lucrat extrem de puţin — doar în măsura în care acest lucru a fost reclamat de lucrările făcute pînă în prezent relativ la integrarea numerică a ecuaţiilor cu derivate parţiale. Pot aminti doar de o lucrare a lui E. Pflanz [7], care dă anumite formule de derivare parţială numerică plecînd de la polinomul de interpolare al lui Lagrange de două variabile; aceste formule pentru calculul derivatelor parţiale în $O(0,0)$ sînt însă destul de greoaie; de asemenea s-au dat evaluări destul de complicate pentru rest. Se mai pot aminti anumite rezultate mai izolate date de L. Collatz [8], G. Schulz [9] şi D. I. Panov [10]. În cărţile importante de Analiză numerică ale lui Ş. E. Mikeladze [3] şi J. F. Steffensen [4] asemenea probleme nu au fost considerate decît în cazul unei singure variabile.

§ 1. Consideraţii generale

1. Să considerăm o funcţie $f(M) = f(t^1, t^2, \dots, t^s)$, care admite derivate parţiale, de ordinile care intervin în formulele care vor urma, în orice punct M al unui domeniu D_s din spaţiul ordinar s - dimensional.

Fie $M_0\ (t_0^1, t_0^2, \dots, t_0^s)$ un punct căruia îi ataşăm ordinul de multiplicitate $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s)$, iar $M_{i_1 i_2 \dots i_s}\ (t_{i_1}^1, t_{i_2}^2, \dots, t_{i_s}^s)$ un punct căruia îi atașăm ordinul de multiplicitate $(\beta^1_{i_1}, \beta^2_{i_2}, \dots, \beta^s_{i_s})$ din D_s; să presupunem că $i_k = 1, 2, \dots, n_k$; $k = 1, 2, \dots, s$.

Prin formulă de derivare parțială numerică vom înțelege o formulă care permite să se calculeze în mod aproximativ valoarea unei derivate parțiale, de un ordin anumit, a unei funcții $f(M)$, într-un punct M_0, printr-o combinație liniară dată a valorilor funcției și în general, și a valorilor derivatelor sale parțiale succesive, luate într-un număr finit de puncte date $M_0, M_{i_1 i_2 \dots i_s}$.

În cazul general o asemenea formulă ne permite să calculăm în mod aproximativ derivata parțială

$$\frac{\partial^{\alpha_1 + \dots + \alpha_s + p_1 + \dots + p_s} f(M_0)}{\partial (t^1_0)^{\alpha_1 + p_1} \dots \partial (t^s_0)^{\alpha_s + p_s}}. \tag{1}$$

Sistemul de numere întregi nenegative $p_1, p_2, \dots, p_s$ e format de indicii de derivare.

În cazul a două variabile, spre exemplu, formula de derivare parțială numerică despre care este vorba are următoarea formă:

$$\frac{\partial^{\alpha+\beta+p+q} f(x_0, y_0)}{\partial x_0^{\alpha+p} \partial y_0^{\beta+q}} = \sum_{i=0}^{\alpha-1} \sum_{j=0}^{\beta-1} A_{ij} \frac{\partial^{i+j} f(x_0, y_0)}{\partial x_0^i \partial y_0^j} + \sum_{i=0}^{\alpha-1} \sum_{\mu=1}^{m} \sum_{l=0}^{\beta_\mu - 1} B_{i\mu l} \frac{\partial^{i+l} f(x_0, y_\mu)}{\partial x_0^i \partial y_\mu^l} +$$
$$+ \sum_{j=0}^{\beta-1} \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{k=0}^{\alpha_\nu - 1} C_{j\nu k} \frac{\partial^{k+j} f(x_\nu, y_0)}{\partial x_\nu^k \partial y_0^j} + \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{m} \sum_{k=0}^{\alpha_\nu - 1} \sum_{l=0}^{\beta_\mu - 1} D_{\nu\mu kl} \frac{\partial^{k+l} f(x_\nu, y_\mu)}{\partial x_\nu^k \partial y_\mu^l} + R_2. \tag{2}$$

Coeficienții acestei formule $A_{ij}, B_{i\mu l}, C_{j\nu k}, D_{\nu\mu kl}$ sînt numere reale care depind numai de nodurile formulei de derivare parțială numerică

$$M_{ij}(x_i, y_j), \quad (i = \overline{1, n}; \ j = \overline{1, m})$$

precum și de punctul de derivare $M_0(x_0, y_0)$.

E clar că aici ne-am plasat în ipoteza că nodurile aparțin unei rețele dreptunghiulare de ordinul $(n - 1, m - 1)$.

Am mai presupus că punctului de derivare M_0 i s-a atașat ordinul de multiplicitate (α, β) iar lui M_{ij} ordinul (α_i, β_j). Aici α și β sînt întregi nenegativi iar α_i, β_j numere naturale. Perechea de numere (p, q) este formată din indicii de derivare în raport cu x, respectiv în raport cu y.

2. Restul R_s al formulei de derivare parțială numerică definită mai sus și care ne permite să calculăm derivata parțială (1), reprezintă valoarea dată de această formulă unei funcționale aditive și omogene, funcțională pe care o vom nota cu $R_s[f]$.

Vom spune că funcționala $R_s[f]$ are gradul parțial de exactitate $(m_1, m_2, \dots, m_s)$ dacă:

a) $R_s[P] = 0$ oricare ar fi polinomul P de gradul $(m_1, m_2, \dots, m_s)$;

b) $R_s[P] \neq 0$ cel puțin pentru un polinom P de gradul $(m_1 + 1, \dots, m_s + 1)$.

Avînd în vedere că $R_s[f]$ este o funcțională aditivă și omogenă, gradul parțial de exactitate $(m_1, m_2, \dots, m_s)$ îl vom putea defini și astfel:

a° dacă $R_s[1] \neq 0$, avem $m_1 = m_2 = \dots = m_s = -1$.

b° dacă $R_s[1] = 0$, gradul parțial de exactitate este sistemul de numere $(m_1, m_2, \dots, m_s)$ pentru care

$$R_s[(t^1)^{i_1} (t^2)^{i_2} \dots (t^s)^{i_s}] = 0 \quad (i_k = \overline{1, m_k}; \ k = \overline{1, s})$$

și cel puțin unul din

$$R_s[(t^1)^{i_1} \dots (t^{p-1})^{i_{p-1}} (t^p)^{m_p+1} (t^{p+1})^{i_{p+1}} \dots (t^s)^{i_s}]$$
$$(i_k = \overline{1, m_k + 1}; \ k = \overline{1, s}; \ p = \overline{1, s})$$

este diferit de zero.

3. Plasîndu-ne, pentru ușurarea expunerii, în cazul a două variabile, să demonstrăm existența gradului parțial de exactitate al formulei de derivare parțială numerică definită mai sus.

Este util să introducem notațiile

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = \gamma + 1, \quad \sum_{j=1}^{m} \beta_j = \delta + 1.$$

Atunci $N = (\gamma + 1)(\delta + 1)$ reprezintă numărul total al nodurilor, fiecare nod fiind socotit cu ordinul său de multiplicitate. Fie polinoamele

$$g(x) = \prod_{i=1}^{n} (x - x_i)^{\alpha_i}, \ h(y) = \prod_{k=1}^{m} (y - y_k)^{\beta_k}. \tag{3}$$

Dacă în (2) facem substituția

$$f(x, y) = (x - x_0)^{\alpha+p'} (y - y_0)^{\beta+q'} g(x) h(y),$$

unde p' și q' sînt întregi $\geqq 0$, obținem că

$$R_2[(x - x_0)^{\alpha+p'} (y - y_0)^{\beta+q'} g(x) h(y)] =$$
$$= \left\{ \frac{\partial^{\alpha+\beta+p+q}}{\partial x^{\alpha+p} \partial y^{\beta+q}} [(x - x_0)^{\alpha+p'} (y - y_0)^{\beta+q'} g(x) h(y)] \right\}_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} =$$
$$= \left\{ \frac{d^{\alpha+p}}{dx^{\alpha+p}} [(x - x_0)^{\alpha+p'} g(x)] \right\}_{x=x_0} \cdot \left\{ \frac{d^{\beta+q}}{dy^{\beta+q}} [(y - y_0)^{\beta+q'} h(y)] \right\}_{y=y_0} = \tag{4}$$
$$= \frac{(p + \alpha)!}{(p - p')!} \frac{(q + \beta)!}{(q - q')!} g^{(p-p')}_{(x_0)} h^{(q-q')}_{(y_0)},$$

la ultima evaluare ajungîndu-se prin aplicarea formulei lui Leibnitz.

Evident că expresia aceasta este nulă dacă $p' > p$ sau $q' > q$. Dacă $p' = p$ și $q' = q$ numărul din expresia (4) e diferit de zero în ipotezele în care ne-am plasat.

De aici rezultă existența gradului parțial de exactitate al formulei (2). De asemenea, rezultă că dacă gradul parțial de exactitate este (m_1, m_2), avem

$$m_1 \leqq \gamma + \alpha + p, \quad m_2 \leqq \delta + \beta + q.$$

Bineînțeles că gradul parțial de exactitate e determinat în mod unic.

4. Să avem în vedere că $x = x_i$ este o dreaptă paralelă la Oy multiplă de ordinul α_i, că $y = y_k$ reprezintă o dreaptă paralelă la Ox multiplă de ordinul β_k și că $x = x_0$, $y = y_0$ sînt drepte paralele cu axele de coordonate multiple de ordinul α, respectiv β.

Prin intersecția acestor drepte se obține un sistem de $\overline{N} = (\alpha + \gamma + 1)(\beta + \delta + 1)$ puncte — bineînțeles nu toate distincte.

Polinomul de interpolare de grad cel mai mic care coincide cu funcția $f(x, y)$ în aceste $\overline{N}$ noduri este

$$L_H(x, y) = L\left(\begin{matrix} x_0, \dots, x_0, x_1, \dots, x_1 \dots, x_n, \dots, x_n \\ y_0, \dots, y_0, y_1, \dots, y_1, \dots, y_m, \dots, y_m \end{matrix}; f \,\middle|\, \begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right). \tag{5}$$

Acest polinom, care este de grad minim în x și minim în y și verifică condițiile

$$\frac{\partial^{i+j} L_H(x_p, y_q)}{\partial x_p^i \partial y_q^j} = \frac{\partial^{i+j} f(x_p, y_q)}{\partial x_p^i \partial y_q^j}, \left(\begin{matrix} i = 0,1, \dots, \alpha_s - 1 ; s = 0,1, \dots, n \\ j = 0,1, \dots, \beta_\sigma - 1 ; \sigma = 0,1, \dots, m \end{matrix}\right) \tag{6}$$

este tocmai polinomul lui Lagrange - Hermite pentru două variabile. El este de forma

$$L_H(x,y) = \sum_{i=0}^{\alpha-1} \sum_{j=0}^{\beta-1} a_{ij}(x, y) \frac{\partial^{i+j} f(x_0, y_0)}{\partial x_0^i \partial y_0^j} + \sum_{i=0}^{\alpha-1} \sum_{\mu=1}^{m} \sum_{l=0}^{\beta_\mu - 1} b_{i\mu l}(x, y) \frac{\partial^{i+l} f(x_0, y_\mu)}{\partial x_0^i \partial y_\mu^l} +$$
$$+ \sum_{j=0}^{\beta-1} \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{k=0}^{\alpha_\nu - 1} c_{j\nu k}(x, y) \frac{\partial^{k+j} f(x_\nu, y_0)}{\partial x_\nu^k \partial y_0^j} + \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{m} \sum_{k=0}^{\alpha_\nu - 1} \sum_{l=0}^{\beta_\mu - 1} d_{\nu\mu kl}(x, y) \frac{\partial^{k+l} f(x_\nu, y_\mu)}{\partial x_\nu^k \partial y_\mu^l}. \tag{7}$$

Observăm că dacă se pune

$$\overline{A}_{ij} = \frac{\partial^{\alpha+\beta+p+q} a_{ij}(x_0, y_0)}{\partial x_0^{\alpha+p} \partial y_0^{\beta+q}}, \quad \overline{B}_{i\mu l} = \frac{\partial^{\alpha+\beta+p+q} b_{i\mu l}(x_0, y_0)}{\partial x_0^{\alpha+p} \partial y_0^{\beta+q}},$$

$$\overline{C}_{j\nu k} = \frac{\partial^{\alpha+\beta+p+q} c_{j\nu k}(x_0, y_0)}{\partial x_0^{\alpha+p} \partial y_0^{\beta+q}}, \quad \overline{D}_{\nu\mu kl} = \frac{\partial^{\alpha+\beta+p+q} d_{\nu\mu kl}(x_0, y_0)}{\partial x_0^{\alpha+p} \partial y_0^{\beta+q}},$$

avem

$$\frac{\partial^{\alpha+\beta+p+q} L_H(x_0, y_0)}{\partial x_0^{\alpha+p} \partial y_0^{\beta+q}} =$$
$$\sum_{i=0}^{\alpha-1} \sum_{j=0}^{\beta-1} \overline{A}_{ij} \frac{\partial^{i+j} f(x_0, y_0)}{\partial x_0^i \partial y_0^j} + \sum_{i=0}^{\alpha-1} \sum_{\mu=1}^{m} \sum_{l=0}^{\beta_\mu - 1} \overline{B}_{i\mu l} \frac{\partial^{i+l} f(x_0, y_\mu)}{\partial x_0^i \partial y_\mu^l} +$$
$$+ \sum_{j=0}^{\beta-1} \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{k=0}^{\alpha_\nu - 1} \overline{C}_{j\nu k} \frac{\partial^{k+j} f(x_\nu, y_0)}{\partial x_\nu^k \partial y_0^j} + \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{m} \sum_{k=0}^{\alpha_\nu - 1} \sum_{l=0}^{\beta_\mu - 1} \overline{D}_{\nu\mu kl} \frac{\partial^{k+l} f(x_\nu, y_\mu)}{\partial x_\nu^k \partial y_\mu^l}. \tag{8}$$

În felul acesta se vede că

$$\frac{\partial^{\alpha+\beta+p+q} f(x_0, y_0)}{\partial x_0^{\alpha+p} \partial y_0^{\beta+q}} = \frac{\partial^{\alpha+\beta+p+q} L_H(x_0, y_0)}{\partial x_0^{\alpha+p} \partial y_0^{\beta+q}} + R_2 \tag{9}$$

este o formulă de derivare parțială numerică de tipul (2).

5. În vederea determinării gradului de exactitate al formulei (9) ne vom folosi de următoarea propoziție, care se datorește lui T. Popoviciu [1]: Dacă două derivate de ordine consecutive i, $i + 1$, ale unui polinom cu toate rădăcinile reale, au o rădăcină comună, aceasta este o rădăcină a polinomului de ordin de multiplicitate cel puțin egal cu $i + 2$.

Dacă $f(x, y)$ este un polinom de gradul $(\alpha + \gamma, \beta + \delta)$ atunci

$$f(x, y) = L_H(x, y).$$

În acest caz în formula (9) avem $R_2[f] = 0$. Rezultă că gradul parțial de exactitate al formulei (9) este (m_1, m_2) unde

$$m_1 \geqq \alpha + \gamma, \ m_2 \geqq \beta + \delta.$$

Presupunînd că $p \leqq \gamma$ și $q \leqq \delta$, din formula (4) se deduce că

$$R_2[(x - x_0)^\alpha (y - y_0)^\beta g(x) h(y)] = \frac{(p + \alpha)!}{p!} \frac{(q + \beta)!}{q!} g^{(p)}(x_0) h^{(q)}(y_0),$$

$$R_2[(x - x_0)^{\alpha+1} (y - y_0)^\beta g(x) h(y)] = \frac{(p + \alpha)!}{(p - 1)!} \frac{(q + \beta)!}{q!} g^{(p-1)}(x_0) h^{(q)}(y_0),$$

$$R_2[(x - x_0)^\alpha (y - y_0)^{\beta+1} g(x) h(y)] = \frac{(p + \alpha)!}{p!} \frac{(q + \beta)!}{(q - 1)!} g^{(p)}(x_0) h^{(q-1)}(y_0),$$

$$R_2[(x - x_0)^{\alpha+1} (y - y_0)^{\beta+1} g(x) h(y)] = \frac{(p + \alpha)!}{(p - 1)!} \frac{(q + \beta)!}{(q - 1)!} g^{(p-1)}(x_0) h^{(q-1)}(y_0).$$

Dacă $p = 0$ și $q = 0$ atunci $g(x_0) \neq 0$ și $h(y_0) \neq 0$ pe baza definiției lui $g(x)$ și $h(y)$. Dacă $p > 0$ și $q > 0$ nu pot avea loc simultan relațiile

$$g^{(p)}(x_0) h^{(q)}(y_0) = 0, \quad g^{(p-1)}(x_0) h^{(q)}(y_0) = 0,$$
$$g^{(p)}(x_0) h^{(q-1)}(y_0) = 0, \quad g^{(p-1)}(x_0) h^{(q-1)}(y_0) = 0.$$

De acest lucru ne putem convinge imediat ținînd seama de lema amintită, precum și de definiția polinoamelor (3).

Toate aceste rezultate se pot formula în următoarea

Teoremă. *Formula de derivare parțială numerică* (9) *are gradul parțial de exactitate* (m_1, m_2), *unde*

$$m_1 \geqq \alpha + \gamma, \ m_2 \geqq \beta + \delta.$$

În cazurile $p > \gamma$ și $q > \delta$ avem

$$(m_1, m_2) = (p + \alpha - 1, \ q + \beta - 1).$$

Dacă însă $p \leqq \gamma$ și $q \leqq \delta$, avem

$$(m_1, m_2) = \begin{cases} (\alpha + \gamma, \beta + \delta), \text{ dacă } g^{(p)}(x_0) \neq 0, \ h^{(q)}(y_0) \neq 0, \\ (\alpha + \gamma + 1, \beta + \delta + 1), \text{ dacă } g^{(p)}(x_0) = 0, \ h^{(q)}(y_0) = 0, \\ (\alpha + \gamma, \beta + \delta + 1), \text{ dacă } g^{(p)}(x_0) \neq 0, \ h^{(q)}(y_0) = 0, \\ (\alpha + \gamma + 1, \beta + \delta), \text{ dacă } g^{(p)}(x_0) = 0, \ h^{(q)}(y_0) \neq 0. \end{cases}$$

6. Urmînd îndeaproape demonstrația pe care o dă T. Popoviciu în lucrarea [1],*) se poate arăta că:

Dintre toate formulele de tipul (2) există o formulă și numai una, care are gradul parțial de exactitate (m_1, m_2) maxim**) și că această formulă este tocmai formula (9).

Din această cauză formula (9) o vom numi formulă de derivare parțială numerică de exactitate maximă.

§ 2. Evaluarea restului

7. Ne vom ocupa acum de evaluarea restului considerînd mai întîi că punctului de derivare $M_0(t_0^1, t_0^2, \ldots, t_0^s)$ și nodurilor $M_{i_1 i_2 \ldots i_s}(t_{i_1}^1, t_{i_2}^2, \ldots, t_{i_s}^s)$, $(i_k = 1, 2, \ldots, n_k;\ k = 1, 2, \ldots, s)$, li se atașează ordinul de multiplicitate $(1,1, \ldots, 1)$.

Relativ la funcția $f(M)$ și nodurile de mai sus avem formula de interpolare a lui Newton

$$f(M) = \sum_{i_1=0}^{n_1} \sum_{i_2=0}^{n_2} \cdots \sum_{i_s=0}^{n_s} \prod_{\nu=1}^{s} \prod_{\alpha_\nu=1}^{i_\nu} (t^\nu - t_{\alpha_\nu}^\nu) \begin{bmatrix} t_1^1, t_2^1, \ldots, t_{i_1+1}^1 \\ t_1^2, t_2^2, \ldots, t_{i_2+1}^2 \\ \cdots\cdots\cdots \\ t_1^s, t_2^s, \ldots, t_{i_s+1}^s \end{bmatrix}\!;f + r_s(M), \quad (10)$$

unde

$$\begin{bmatrix} t_1^1, t_2^1, \ldots, t_{i_1+1}^1 \\ t_1^2, t_2^2, \ldots, t_{i_2+1}^2 \\ \cdots\cdots\cdots \\ t_1^s, t_2^s, \ldots, t_{i_s+1}^s \end{bmatrix}\!;f = \sum_{\nu_1=1}^{i_1+1} \cdots \sum_{\nu_s=1}^{i_s+1} \frac{f(t_{\nu_1}^1, t_{\nu_2}^2, \ldots, t_{\nu_s}^s)}{\prod_{k=1}^{s} v_k'(t_{\nu_k}^k)}$$

cu

$$v_k(t^k) = \prod_{\nu_k=1}^{i_k+1} (t^k - t_{\nu_k}^k),$$

este diferența divizată parțială de ordinul $(i_1, i_2, \ldots, i_s)$, iar restul formulei de interpolare are expresia***)

$$r_s(M) = \sum u_1(t^1)\,[t^1, t_1^1, \ldots, t_{n_1+1}^1; f] - \sum u_1(t^1)\, u_2(t^2) \begin{bmatrix} t^1, t_1^1, \ldots, t_{n_1+1}^1 \\ t^2, t_1^2, \ldots, t_{n_2+1}^2 \end{bmatrix}\!;f + $$

$$\ldots + (-1)^s \prod_{i=1}^{s} u_i(t^i) \begin{bmatrix} t^1, t_1^1, \ldots, t_{n_1+1}^1 \\ t^2, t_1^2, \ldots, t_{n_2+1}^2 \\ \cdots\cdots\cdots \\ t^s, t_1^s, \ldots, t_{n_s+1}^s \end{bmatrix}\!;f, \quad (11)$$

unde

$$u_k(t^k) = \prod_{i_k=1}^{n_k+1} (t^k - t_{i_k}^k), \quad (k = 1, 2, \ldots, s). \quad (12)$$

*) p. 58–59.

**) Adică m_1 este maxim și m_2 este de asemenea maxim.

***) Vezi J. F. Steffensen [10].

8. Folosind formula de interpolare (10) vom stabili următoarea

Teoremă. *Dacă $f(M)$ este o funcție definită și derivabilă parțial de un număr suficient de ori în domeniul D_s care conține nodurile $M_{i_1 i_2 \cdots i_s}$, restul următoarei formule de derivare parțială numerică, în punctul M_0 al acestui domeniu,*

$$\frac{\partial^{p_1 + \ldots p_s} f(M_0)}{\partial (t_0^1)^{p_1} \ldots \partial (t_0^s)^{p_s}} =$$

$$= \sum_{i_1=p_1}^{n_1} \cdots \sum_{i_s=p_s}^{n_s} \begin{bmatrix} t_1^1, t_2^1, \ldots, t_{i_1+1}^1 \\ t_1^2, t_2^2, \ldots, t_{i_2+1}^2 \\ \cdots\cdots\cdots \\ t_1^s, t_2^s, \ldots, t_{i_s+1}^s \end{bmatrix}\!;f\ D_1(t_0^1) \ldots D_s(t_0^s) + R_s, \quad (13)$$

unde

$$D_\nu(t_0^\nu) = \frac{d^{p_\nu}}{d(t_0^\nu)^{p_\nu}} \left(\prod_{\alpha_\nu=1}^{i_\nu} (t_0^\nu - t_{\alpha_\nu}^\nu) \right), \quad (14)$$

se poate pune sub forma

$$R_s = \sum \frac{u_1^{(p_1)}(t_0^1)}{(n_1+1)!} \frac{\partial^{n_1+p_2+\ldots+p_s+1} f(\xi^1, t_0^2, \ldots, t_0^s)}{\partial(\xi^1)^{n_1+1} \partial(t_0^2)^{p_2} \ldots \partial(t_0^s)^{p_s}} -$$

$$- \sum \frac{u_1^{(p_1)}(t_0^1)\, u_2^{(p_2)}(t_0^2)}{(n_1+1)!\,(n_2+1)!} \frac{\partial^{n_1+n_2+p_3+\ldots+p_s+2} f(\xi^1, \xi^2, t_0^3, \ldots, t_0^s)}{\partial(\xi^1)^{n_1+1} \partial(\xi^2)^{n_2+1} \partial(t_0^3)^{p_3} \ldots \partial(t_0^s)^{p_s}} + \quad (15)$$

$$+ \sum \frac{u_1^{(p_1)}(t_0^1)\, u_2^{(p_2)}(t_0^2)\, u_3^{(p_3)}(t_0^3)}{(n_1+1)!\,(n_2+1)!\,(n_3+1)!} \frac{\partial^{n_1+n_2+n_3+p_4+\ldots+p_s+3} f(\xi^1, \xi^2, \xi^3, t_0^4, \ldots, t_0^s)}{\partial(\xi^1)^{n_1+1} \partial(\xi^2)^{n_2+1} \partial(\xi^3)^{n_3+1} \partial(t_0^4)^{n_4+1} \ldots \partial(t_0^s)^{n_s+1}}$$

$$- \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+ (-1)^s \prod_{i=1}^{s} \frac{u_i^{(p_i)}(t_0^i)}{(n_i+1)!} \frac{\partial^{n_1+n_2+\ldots+n_s+s} f(\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^s)}{\partial(\xi^1)^{n_1+1} \partial(\xi^2)^{n_2+1} \ldots \partial(\xi^s)^{n_s+1}},$$

unde ξ^i *e cuprins în cel mai mic interval care conține numerele* $t_0^i, t_1^i, \ldots, t_{n_i+1}^i$, *iar* t_0^i *e presupus diferit de rădăcinile ecuației*

$$\frac{d^{p_i} u_i(t^i)}{d(t^i)^{p_i}} = u_i^{(p_i)}(t^i) = 0.$$

Demonstrație. Pentru a nu complica expunerea vom dovedi această teoremă în cazul $s = 3$, simplificînd în oarecare măsură notațiile; vom folosi nodurile $M_{ikj}(x_i, y_k, z_j)$, $(i = \overline{1, n+1};\ k = \overline{1, m+1};\ j = \overline{1, l+1})$, și punctul de derivare $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

Formula de interpolare a lui Newton se scrie

$$f(x, y, z) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{k=0}^{m} \sum_{j=0}^{l} u_i(x)\, v_k(y)\, w_j(z) \begin{bmatrix} x_1, x_2, \ldots, x_{i+1} \\ y_1, y_2, \ldots, y_{k+1} \\ z_1, z_2, \ldots, z_{j+1} \end{bmatrix}\!;f + R_3, \quad (16)$$

unde

$$R_3 = u(x)\,[x, x_1, \dots, x_{n+1}\,; f] + v(y)\,[y, y_1, \dots, y_{m+1}\,; f] +$$

$$+ w(z)\,[z, z_1, \dots, z_{l+1}\,; f] - u(x)\,v(y)\left[\begin{matrix} x, x_1, \dots, x_{n+1} \\ y, y_1, \dots, y_{m+1}\end{matrix}\,; f\right] -$$

$$- u(x)\,w(z)\left[\begin{matrix} x, x_1, \dots, x_{n+1} \\ z, z_1, \dots, z_{l+1}\end{matrix}\,; f\right] - v(y)\,w(z)\left[\begin{matrix} y, y_1, \dots, y_{n+1} \\ z, z_1, \dots, z_{l+1}\end{matrix}\,; f\right] +$$

$$+ u(x)\,v(y)\,w(z)\left[\begin{matrix} x, x_1, \dots, x_{n+1} \\ y, y_1, \dots, y_{m+1} \\ z, z_1, \dots, z_{l+1}\end{matrix}\,; f\right], \tag{17}$$

iar

$$u_i(x) = \prod_{\alpha=1}^{i} (x - x_\alpha),\ v_k(y) = \prod_{\beta=1}^{k} (y - y_\beta),\ w_j(z) = \prod_{\gamma=1}^{j} (z - z_\gamma)$$

$$u(x) = \prod_{i=1}^{n+1} (x - x_i),\ v(y) = \prod_{k=1}^{m+1} (y - y_k),\ w(z) = \prod_{j=1}^{l+1} (z - z_j).$$

Derivînd de p ori în raport cu x formula (16) obținem

$$\frac{\partial^p f(x,y,z)}{\partial x^p} = \sum_{i=p}^{n} \sum_{k=0}^{m} \sum_{j=0}^{l} v_k(y)\,w_j(z)\left[\begin{matrix} x_1, \dots, x_{i+1} \\ y_1, \dots, y_{k+1} \\ z_1, \dots, z_{j+1}\end{matrix}\,; f\right] u^{(p)}(x) + R_3' \tag{18}$$

unde

$$R_3' = \frac{\partial^p A(x,y,z)}{\partial x^p} + v(y)\left[y, y_1, \dots, y_{m+1}\,; \frac{\partial^p f}{\partial x^p}\right] +$$

$$+ w(z)\left[z, z_1, \dots, z_{l+1}\,; \frac{\partial^p f}{\partial x^p}\right] - v(y)\left[y, y_1, \dots, y_{m+1}\,; \frac{\partial^p A}{\partial x^p}\right] -$$

$$- w(z)\left[z, z_1, \dots, z_{l+1}\,; \frac{\partial^p A}{\partial x^p}\right] - v(y)\,w(z)\left[\begin{matrix} y, y_1, \dots, y_{m+1} \\ z, z_1, \dots, z_{l+1}\end{matrix}\,; \frac{\partial^p f}{\partial x^p}\right] + \tag{19}$$

$$+ v(y)\,w(z)\left[\begin{matrix} y, y_1, \dots, y_{m+1} \\ z, z_1, \dots, z_{l+1}\end{matrix}\,; \frac{\partial^p A}{\partial x^p}\right]$$

iar

$$A(x, y, z) = u(x)\,[x, x_1, \dots, x_{n+1}\,; f(x, y, z)]. \tag{20}$$

Vom căuta acum să dăm restului o evaluare utilă pentru aplicații, generalizînd o metodă a lui S t e f f e n s e n [4] și M i k e l a d z e [2], folosită de aceștia în cazul unei singure variabile.

Să considerăm funcția ajutătoare

$$\varphi(x, y, z) = u(x)\,[x, x_1, \dots, x_{n+1}\,; f] - u(x)\,v(y)\left[\begin{matrix} x, x_1, \dots, x_{n+1} \\ y, y_1, \dots, y_{m+1}\end{matrix}\,; f\right] -$$

$$- u(x)\,w(z)\left[\begin{matrix} x, x_1, \dots, x_{n+1} \\ z, z_1, \dots, z_{l+1}\end{matrix}\,; f\right] + u(x)\,v(y)\,w(z)\left[\begin{matrix} x, x_1, \dots, x_{n+1} \\ y, y_1, \dots, y_{m+1} \\ z, z_1, \dots, z_{l+1}\end{matrix}\,; f\right] - \alpha u(x), \tag{21}$$

unde α este o constantă.

Se observă că

$$\varphi(x_i, y, z) = 0, \qquad (i = \overline{1, n+1}).$$

Raportîndu-ne la variabila x, prin aplicarea succesivă a teoremei lui Rolle, constatăm că derivata parțială în raport cu x de ordinul $p < n$ a lui $\varphi(x, y, z)$, adică

$$\frac{\partial^p \varphi(x,y,z)}{\partial x^p} = \frac{\partial^p A(x,y,z)}{\partial x^p} - v(y)\left[y, y_1, \dots, y_{m+1}\,; \frac{\partial^p A}{\partial x^p}\right] -$$

$$- w(z)\left[z, z_1, \dots, z_{l+1}\,; \frac{\partial^p A}{\partial x^p}\right] + v(y)\,w(z)\left[\begin{matrix} y, y_1, \dots, y_{m+1} \\ z, z_1, \dots, z_{l+1}\end{matrix}\,; \frac{\partial^p A}{\partial x^p}\right] - \tag{22}$$

$$- \alpha \frac{d^p u(x)}{dx^p}$$

are cel puțin $n - p + 1$ rădăcini în raport cu x.

Dacă presupunem că x este diferit de cele $n + 1 - p$ rădăcini ale ecuației

$$\frac{d^p u(x)}{dx^p} = u^{(p)}(x) = 0, \tag{23}$$

va fi posibil ca să-l determinăm pe α astfel ca să avem încă o valoare a lui x pentru care

$$\frac{\partial^p \varphi(x,y,z)}{\partial x^p} = 0.$$

În aceste condiții se constată că derivata parțială precedentă va avea $n + 2 - p$ rădăcini în raport cu x în intervalul cel mai mic, I_1, care îi conține pe $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$ și x. Făcînd iar uz de teorema lui Rolle, conchidem că derivata parțială de ordinul $n - p + 1$ a funcției de la (22) se va anula cel puțin într-un punct ξ din intervalul I_1. Această derivată este

$$\frac{\partial^{n+1} \varphi(x,y,z)}{\partial x^{n+1}} = \frac{\partial^{n+1} A(x,y,z)}{\partial x^{n+1}} - v(y)\left[y, y_1, \dots, y_{m+1}\,; \frac{\partial^{n+1} A}{\partial x^{n+1}}\right] -$$

$$- w(z)\left[z, z_1, \dots, z_{l+1}\,; \frac{\partial^{n+1} A}{\partial x^{n+1}}\right] + v(y)\,w(z)\left[\begin{matrix} y, y_1, \dots, y_{m+1} \\ z, z_1, \dots, z_{l+1}\end{matrix}\,; \frac{\partial^{n+1} A}{\partial x^{n+1}}\right] -$$

$$- \alpha (n+1)\,!.$$

Scăzînd aceasta din derivata parțială în raport cu x, de ordinul $n + 1$, a lui $f(x, y, z)$ dat de formula (16), adică din

$$\frac{\partial^{n+1} f(x,y,z)}{\partial x^{n+1}} = \frac{\partial^{n+1} A(x,y,z)}{\partial x^{n+1}} + v(y)\left[y, y_1, \dots, y_{m+1}\,; \frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^{n+1}}\right] +$$

$$+ w(z)\left[z, z_1, \dots, z_{l+1}\,; \frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^{n+1}}\right] - v(y)\left[y, y_1, \dots, y_{m+1}\,; \frac{\partial^{n+1} A}{\partial x^{n+1}}\right] -$$

$$- w(z)\left[z, z_1, \dots, z_{l+1}\,; \frac{\partial^{n+1} A}{\partial x^{n+1}}\right] - v(y)\,w(z)\left[\begin{matrix} y, y_1, \dots, y_{m+1} \\ z, z_1, \dots, z_{l+1}\end{matrix}\,; \frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^{n+1}}\right] +$$

$$+ v(y)\,w(z)\left[\begin{matrix} y, y_1, \dots, y_{m+1} \\ z, z_1, \dots, z_{l+1}\end{matrix}\,; \frac{\partial^{n+1} A}{\partial x^{n+1}}\right],$$

primim

$$\frac{\partial^{n+1} f(x,y,z)}{\partial x^{n+1}} - \frac{\partial^{n+1}\varphi(x,y,z)}{\partial x^{n+1}} = v(y)\left[y, y_1, \dots, y_{m+1}; \frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^{n+1}}\right] +$$

$$+ w(z)\left[z, z_1,\dots,z_{l+1}; \frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^{n+1}}\right] - v(y)w(z)\left[\begin{matrix} y,y_1,\dots,y_{m+1} \\ z,z_1,\dots,z_{l+1}\end{matrix}; \frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^{n+1}}\right] +$$

$$+ \alpha(n+1)!.$$

Scriind că

$$\frac{\partial^{n+1}\varphi(\xi,y,z)}{\partial\xi^{n+1}} = 0,$$

deducem că

$$\alpha = \frac{1}{(n+1)!}\frac{\partial^{n+1} f(\xi,y,z)}{\partial \xi^{n+1}} - \frac{v(y)}{(n+1)!}\left[y, y_1, \dots, y_{m+1}; \frac{\partial^{n+1} f(\xi,y,z)}{\partial \xi^{n+1}}\right] -$$

$$- \frac{w(z)}{(n+1)!}\left[z, z_1,\dots,z_{l+1}; \frac{\partial^{n+1} f(\xi,y,z)}{\partial \xi^{n+1}}\right] + \frac{v(y)w(z)}{(n+1)!}\left[\begin{matrix} y,y_1,\dots,y_{m+1} \\ z,z_1,\dots,z_{l+1}\end{matrix}; \frac{\partial^{n+1} f(\xi,y,z)}{\partial \xi^{n+1}}\right].$$

Pentru această valoare, conform celor spuse, rezultă că vom avea

$$\frac{\partial^p A(x,y,z)}{\partial x^p} - v(y)\left[y, y_1,\dots,y_{m+1}; \frac{\partial^p A(x,y,z)}{\partial x^p}\right] - w(z)\left[z,z_1,\dots,z_{l+1}; \frac{\partial^{n+1} A(x,y,z)}{\partial x^p}\right] +$$

$$+ v(y)w(z)\left[\begin{matrix} y,y_1,\dots,y_{m+1} \\ z,z_1,\dots,z_{l+1}\end{matrix}; \frac{\partial^p A(x,y,z)}{\partial x^p}\right] = \frac{u^{(p)}(x)}{(n+1)!}\frac{\partial^{n+1} f(\xi,y,z)}{\partial \xi^{n+1}} -$$

$$- \frac{v(y)}{(n+1)!}\left[y, y_1, \dots, y_{m+1}; \frac{\partial^{n+1} f(\xi,y,z)}{\partial \xi^{n+1}}\right] u^{(p)}(x) -$$

$$- \frac{w(z)}{(n+1)!}\left[z, z_1, \dots, z_{l+1}; \frac{\partial^{n+1} f(\xi,y,z)}{\partial \xi^{n+1}}\right] u^{(p)}(x) +$$

$$+ \frac{v(y)w(z)}{(n+1)!}\left[\begin{matrix} y,y_1,\dots,y_{m+1} \\ z,z_1,\dots,z_{l+1}\end{matrix}; \frac{\partial^{n+1} f(\xi,y,z)}{\partial \xi^{n+1}}\right] u^{(p)}(x).$$

Avînd în vedere acestea, restul (19) se va putea scrie

$$R_3' = \frac{u^{(p)}(x)}{(n+1)!}\frac{\partial^{n+1} f(\xi,y,z)}{\partial \xi^{n+1}} + v(y)\left[y, y_1, \dots, y_{m+1}; \frac{\partial^p f(x,y,z)}{\partial x^p}\right] +$$

$$+ w(z)\left[z, z_1,\dots,z_{l+1}; \frac{\partial^p f(x,y,z)}{\partial x^p}\right] - \frac{v(y)}{(n+1)!}\left[y, y_1,\dots,y_{m+1}; \frac{\partial^{n+1} f(\xi,y,z)}{\partial \xi^{n+1}}\right] u^{(p)}(x) -$$

$$- \frac{w(z)}{(n+1)!}\left[z, z_1,\dots,z_{l+1}; \frac{\partial^{n+1} f(\xi,y,z)}{\partial \xi^{n+1}}\right] u^{(p)}(x) - v(y)w(z)\left[\begin{matrix} y,y_1,\dots,y_{m+1} \\ z,z_1,\dots,z_{l+1}\end{matrix}; \frac{\partial^p f(x,y,z)}{\partial x^p}\right] +$$

$$+ \frac{v(y)w(z)}{(n+1)!}\left[\begin{matrix} y,y_1,\dots,y_{m+1} \\ z,z_1,\dots,z_{l+1}\end{matrix}; \frac{\partial^{n+1} f(\xi,y,z)}{\partial \xi^{n+1}}\right] u^{(p)}(x) \tag{24}$$

sau

$$R_3' = \frac{u^{(p)}(x)}{(n+1)!}\frac{\partial^{n+1} f(\xi,y,z)}{\partial \xi^{n+1}} + w(z)\left[z, z_1, \dots, z_{l+1}; \frac{\partial^p f(x,y,z)}{\partial x^p}\right] +$$

$$+ v(y)\Bigg[y, y_1, \dots, y_{m+1}; \frac{\partial^p f(x,y,z)}{\partial x^p} - \frac{u^{(p)}(x)}{(n+1)!}\frac{\partial^{n+1} f(\xi,y,z)}{\partial x^{n+1}} -$$

$$- w(z)\left[z,z_1,\dots,z_{l+1}; \frac{\partial^p f(x,y,z)}{\partial x^p}\right] + \frac{u^{(p)}(x)w(z)}{(n+1)!}\left[z,z_1,\dots,z_{l+1}; \frac{\partial^{n+1} f(\xi,y,z)}{\partial \xi^{n+1}}\right]\Bigg] -$$

$$- \frac{u^{(p)}(x)w(z)}{(n+1)!}\left[z, z_1, \dots, z_{n+1}; \frac{\partial^{n+1} f(\xi,y,z)}{\partial \xi^{n+1}}\right]. \tag{25}$$

Aplicînd o cunoscută teoremă de medie a diferenţelor divizate

$$[y, y_1, \dots, y_{m+1}; F(x,y,z)] = \frac{1}{(m+1)!}\frac{\partial^{m+1} F(x,\eta,z)}{\partial \eta^{m+1}} \;{}^{*)} \tag{26}$$

se obţine (27)

$$R_3' = \frac{u^{(p)}(x)}{(n+1)!}\frac{\partial^{n+1} f(\xi,y,z)}{\partial \xi^{n+1}} + \frac{v(y)}{(m+1)!}\frac{\partial^{p+m+1} f(x,\eta,z)}{\partial x^p \partial \eta^{m+1}} -$$

$$- \frac{u^{(p)}(x)v(y)}{(n+1)!(m+1)!}\frac{\partial^{n+m+2} f(\xi,\eta,z)}{\partial \xi^{n+1}\partial \eta^{m+1}} - \frac{v(y)w(z)}{(m+1)!}\left[z,z_1,\dots,z_{l+1}; \frac{\partial^{p+m+1} f(x,\eta,z)}{\partial x^p \partial \eta^{m+1}}\right] +$$

$$+ w(z)\left[z, z_1,\dots,z_{l+1}; \frac{\partial^p f(x,y,z)}{\partial x^p}\right] - \frac{w(z)u^{(p)}(x)}{(n+1)!}\left[z, z_1, \dots, z_{l+1}; \frac{\partial^{n+1} f(\xi,y,z)}{\partial \xi^{n+1}}\right] +$$

$$+ \frac{u^{(p)}(x)v(y)w(z)}{(n+1)!(m+1)!}\left[z, z_1, \dots, z_{l+1}; \frac{\partial^{n+m+2} f(\xi,\eta,z)}{\partial \xi^{n+1}\partial \eta^{m+1}}\right]$$

sau

$$R_3' = \frac{u^{(p)}(x)}{(n+1)!}\frac{\partial^{n+1} f(\xi,y,z)}{\partial \xi^{n+1}} + \frac{v(y)}{(m+1)!}\frac{\partial^{p+m+1} f(x,\eta,z)}{\partial x^p \partial \eta^{m+1}} - \tag{28}$$

$$- \frac{u^{(p)}(x)v(y)}{(n+1)!(m+1)!}\frac{\partial^{n+m+2} f(\xi,\eta,z)}{\partial \xi^{n+1}\partial \eta^{m+1}} + w(z)\Bigg[z, z_1, \dots, z_{l+1}; \frac{\partial^p f(x,y,z)}{\partial x^p} -$$

$$- \frac{u^{(p)}(x)}{(n+1)!}\frac{\partial^{n+1} f(\xi,y,z)}{\partial \xi^{n+1}} - \frac{v(y)}{(m+1)!}\frac{\partial^{p+m+1} f(x,\eta,z)}{\partial \eta^{m+1}} + \frac{u^{(p)}(x)v(y)}{(n+1)!(m+1)!}\frac{\partial^{n+m+2} f(\xi,\eta,\zeta)}{\partial \xi^{n+1}\partial \eta^{m+1}}\Bigg]$$

Aplicînd aceeaşi teoremă de medie a diferenţelor divizate obţinem în definitiv evaluarea

$$R_3' = \frac{u^{(p)}(x)}{(n+1)!}\frac{\partial^{n+1} f(\xi,y,z)}{\partial \xi^{n+1}} + \frac{v(y)}{(m+1)!}\frac{\partial^{p+m+1} f(x,\eta,z)}{\partial x^p \partial \eta^{m+1}} + \frac{w(z)}{(l+1)!}\frac{\partial^{p+l+1} f(x,y,\zeta)}{\partial x^p \partial \zeta^{l+1}} -$$

$$- \frac{u^{(p)}(x)v(y)}{(n+1)!\,(m+1)!}\frac{\partial^{n+m+2} f(\xi,\eta,z)}{\partial \xi^{n+1}\partial \eta^{m+1}} - \frac{u^{(p)}(x)w(z)}{(n+1)!\,(l+1)!}\frac{\partial^{n+l+2} f(\xi,y,\zeta)}{\partial \xi^{n+1}\partial \zeta^{l+1}} - \tag{29}$$

$$- \frac{v(y)w(z)}{(m+1)!\,(l+1)!}\frac{\partial^{p+m+l+2} f(x,\eta,\zeta)}{\partial x^p \partial \eta^{m+1}\partial \zeta^{l+1}} + \frac{u^{(p)}(x)v(y)w(z)}{(n+1)!\,(m+1)!\,(l+1)!}\frac{\partial^{n+m+l+3} f(\xi,\eta,\zeta)}{\partial \xi^{n+1}\partial \eta^{m+1}\partial \zeta^{l+1}},$$

*) η e un număr cuprins în cel mai mic interval care îi conţine pe $y, y_1, y_2, \dots, y_{m+1}$.

unde ξ, η și ζ sînt respectiv cuprinși în cele mai mici intervale care conțin numerele : $x, x_1, \dots, x_{n+1}$; $y, y_1, \dots, y_{m+1}$; $z, z_1, \dots, z_{l+1}$.
Această evaluare s-a putut vedea că e valabilă pentru orice x diferit de rădăcinile ecuației (23).

Prin urmare, pentru restul formulei de derivare parțială numerică (18) am obținut evaluarea (29).

Într-un mod absolut analog se stabilesc formulele de derivare parțială numerică în raport cu variabilele y și z.

Să derivăm acum de q ori în raport cu y formula (18) ; vom obține

$$\frac{\partial^{p+q} f(x,y,z)}{\partial x^p \partial y^q} = \sum_{i=p}^{n} \sum_{k=q}^{m} \sum_{j=0}^{l} u_i^{(p)}(x)\, v_k^{(q)}(y)\, w_j(z) \begin{bmatrix} x_1, \dots, x_{i+1} & \\ y_1, \dots, y_{k+1} & ; f \\ z_1, \dots, z_{j+1} & \end{bmatrix} + R_3''(x,y,z), \quad (30)$$

unde restul, ținînd seama de (24), se scrie

$$\begin{aligned} R_3'' = {} & \frac{u^{(p)}(x)}{(n+1)!} \frac{\partial^{n+q+1} f(\xi,y,z)}{\partial \xi^{n+1} \partial y^q} + w(z)\left[z, z_1, \dots, z_{l+1}; \frac{\partial^{p+q} f(x,y,z)}{\partial x^p \partial y^q}\right] + \\ & + \frac{\partial^q}{\partial y^q}\left(v(y)\left[y, y_1, \dots, y_{m+1}; \frac{\partial^p f(x,y,z)}{\partial x^p}\right]\right) - \\ & - \frac{u^{(p)}(x)}{(n+1)!} \frac{\partial^q}{\partial y^q}\left(v(y)\left[y, y_1, \dots, y_{m+1}; \frac{\partial^{n+1} f(\xi,y,z)}{\partial \xi^{n+1}}\right]\right) - \\ & - \frac{u^{(p)}(x)\, w(z)}{(n+1)}\left[z, z_1, \dots, z_{l+1}; \frac{\partial^{n+q+1} f(\xi,y,z)}{\partial \xi^{n+1} \partial y^q}\right] - \\ & - w(z) \frac{\partial^q}{\partial y^q}\left(v(y)\begin{bmatrix} y, y_1, \dots, y_{m+1} \\ z, z_1, \dots, z_{l+1} \end{bmatrix}; \frac{\partial^p f(x,y,z)}{\partial x^p}\right]\right) + \\ & + \frac{u^{(p)}(x)\, w(z)}{(n+1)!} \frac{\partial^q}{\partial y^q}\left(v(y)\begin{bmatrix} y, y_1, \dots, y_{m+1} \\ z, z_1, \dots, z_{l+1} \end{bmatrix}; \frac{\partial^{n+1} f(\xi,y,z)}{\partial \xi^{n+1}}\right]\right). \end{aligned}$$

Pentru a obține o evaluare a acestui rest se poate folosi o metodă analogă întru totul cu cea care ne-a condus la evaluarea (29) pentru restul formulei (18).

Vom folosi acum funcția auxiliară

$$\begin{aligned} \psi(x,y,z) = {} & v(y)\left[y, y_1, \dots, y_{m+1}; \frac{\partial^p f(x,y,z)}{\partial x^p}\right] - \\ & - \frac{u^{(p)}(x)\, v(y)}{(n+1)!}\left[y, y_1, \dots, y_{m+1}; \frac{\partial^{n+1} f(\xi,y,z)}{\partial \xi^{n+1}}\right] - \\ & - v(y)\, w(z)\begin{bmatrix} y, y_1, \dots, y_{m+1} \\ z, z_1, \dots, z_{l+1} \end{bmatrix}; \frac{\partial^p f(x,y,z)}{\partial x^p}\bigg] + \\ & + \frac{u^{(p)}(x)\, v(y)\, w(z)}{(n+1)!}\begin{bmatrix} y, y_1, \dots, y_{m+1} \\ z, z_1, \dots, z_{l+1} \end{bmatrix}; \frac{\partial^{n+1} f(\xi,y,z)}{\partial \xi^{n+1}}\bigg]. \end{aligned}$$

Relativ la variabila y această funcție se bucură de proprietăți analoge cu ale funcției $\varphi(x, y, z)$ privită ca funcție numai de x.

Folosind această funcție auxiliară și aplicînd ca și mai înainte teoremele de suprapunere și de medie a diferențelor divizate, se obține evaluarea

$$\begin{aligned} R_3''(x,y,z) = {} & \frac{u^{(p)}(x)}{(n+1)!} \frac{\partial^{n+q+1} f(\xi,y,z)}{\partial \xi^{n+1} \partial y^q} + \frac{v^{(q)}(y)}{(m+1)!} \frac{\partial^{p+m+1} f(x,\eta,z)}{\partial x^p \partial \eta^{m+1}} + \\ & + \frac{w(z)}{(l+1)!} \frac{\partial^{p+q+l+1} f(x,y,\zeta)}{\partial x^p \partial y^q \partial \zeta^{l+1}} - \frac{u^{(p)}(x)\, v^{(q)}(y)}{(n+1)!\,(m+1)!} \frac{\partial^{n+m+2} f(\xi,\eta,z)}{\partial \xi^{n+1} \partial \eta^{m+1}} - \\ & - \frac{u^{(p)}(x)\, w(z)}{(n+1)!\,(l+1)!} \frac{\partial^{n+q+l+2} f(\xi,y,\zeta)}{\partial \xi^{n+1} \partial y^q \partial \zeta^{l+1}} - \frac{v^{(q)}(y)\, w(z)}{(m+1)!\,(l+1)!} \frac{\partial^{p+m+l+2} f(x,\eta,\zeta)}{\partial x^p \partial \eta^{m+1} \partial \zeta^{l+1}} + \\ & + \frac{u^{(p)}(x)\, v^{(q)}(y)\, w(z)}{(n+1)!\,(m+1)!\,(l+1)!} \frac{\partial^{n+m+l+3} f(\xi,\eta,\zeta)}{\partial \xi^{n+1} \partial \eta^{m+1} \partial \zeta^{l+1}}. \end{aligned} \quad (31)$$

Această evaluare este valabilă pentru orice x diferit de rădăcinile ecuației (23) și orice y diferit de rădăcinile ecuației

$$\frac{d^q v(y)}{dy^q} = v^{(q)}(y) = 0. \quad (32)$$

Așadar avem formula de derivare parțială numerică (30) cu restul (31).

Într-un mod cu totul analog se stabilește și formula de derivare parțială numerică

$$\frac{\partial^{p+q+r} f(x,y,z)}{\partial x^p \partial y^q \partial z^r} = \sum_{i=p}^{n} \sum_{k=q}^{m} \sum_{j=r}^{l} u_i^{(p)}(x)\, v_k^{(q)}(y)\, w_j^{(r)}(z) \begin{bmatrix} x_1, x_2, \dots, x_{i+1} & \\ y_1, y_2, \dots, y_{k+1} & ; f \\ z_1, z_2, \dots, z_{j+1} & \end{bmatrix} + R_3''', \quad (33)$$

unde

$$\begin{aligned} R_3''' = {} & \frac{u^{(p)}(x)}{(n+1)!} \frac{\partial^{p+q+r+1} f(\xi,y,z)}{\partial \xi^{n+1} \partial y^q \partial z^r} + \frac{v^{(q)}(y)}{(m+1)!} \frac{\partial^{p+m+r+1} f(x,\eta,z)}{\partial x^p \partial \eta^{m+1} \partial z^r} + \\ & + \frac{w^{(r)}(z)}{(l+1)!} \frac{\partial^{p+q+l+1} f(x,y,\zeta)}{\partial x^p \partial y^q \partial \zeta^{l+1}} - \frac{u^{(p)}(x)\, v^{(q)}(y)}{(n+1)!\,(m+1)!} \frac{\partial^{n+m+r+2} f(\xi,\eta,\zeta)}{\partial \xi^{n+1} \partial \eta^{m+1} \partial z^r} - \\ & - \frac{u^{(p)}(x)\, w^{(r)}(z)}{(n+1)!\,(l+1)!} \frac{\partial^{n+q+m+2} f(\xi,y,\zeta)}{\partial \xi^{n+1} \partial y^q \partial \zeta^{l+1}} - \frac{v^{(q)}(y)\, w^{(r)}(z)}{(m+1)!\,(l+1)!} \frac{\partial^{p+m+l+2} f(x,\eta,\zeta)}{\partial x^p \partial \eta^{m+1} \partial \zeta^{l+1}} + \\ & + \frac{u^{(p)}(x)\, v^{(q)}(y)\, w^{(r)}(z)}{(n+1)!\,(m+1)!\,(l+1)!} \frac{\partial^{n+m+l+3} f(\xi,\eta,\zeta)}{\partial \xi^{n+1} \partial \eta^{m+1} \partial \zeta^{l+1}}; \end{aligned} \quad (34)$$

această expresie a restului fiind valabilă pentru orice x, y și z diferiți respectiv de rădăcinile ecuațiilor (23), (32) și

$$\frac{d^r w(z)}{dz^r} = w^{(r)}(z) = 0.$$

Observație. Subliniem că ξ, η și ζ care figurează, de exemplu, în expresia (34) a restului sînt aceiași în toate derivatele parțiale care intervin.

Acest lucru am căutat cu atenție să-l punem în evidență în toate evaluările pe care le-am dat pentru restul formulelor de derivare parțială numerică de care ne-am ocupat mai sus.

9. În cazul a două variabile avem formula de derivare parțială numerică

$$\frac{\partial^{p+q} f(x,y)}{\partial x^p\, \partial y^q} = \sum_{i=p}^{n} \sum_{k=q}^{m} u_i^{(p)}(x)\, v_k^{(q)}(y) \begin{bmatrix} x_1, x_2, \dots, x_{i+1} \\ y_1, y_2, \dots, y_{k+1} \end{bmatrix}; f \Big] + R_2(x, y), \tag{35}$$

unde restul are expresia

$$R_2(x,y) = \frac{u^{(p)}(x)}{(n+1)!} \frac{\partial^{n+q+1} f(\xi, y)}{\partial \xi^{n+1} \partial y^q} + \frac{v^{(q)}(y)}{(m+1)!} \frac{\partial^{p+m+1} f(x,\eta)}{\partial x^p \partial \eta^{m+1}} - \frac{u^{(p)}(x)\, v^{(q)}(y)}{(n+1)!\,(m+1)!} \frac{\partial^{n+m+2} f(\xi, \eta)}{\partial \xi^{n+1} \partial \eta^{m+1}}, \tag{36}$$

care e valabilă pentru orice x și y care nu sînt rădăcini respectiv ale ecuațiilor (23) și (32).

Din punct de vedere practic, este avantajos, ca diferențele divizate care intervin mai sus să se calculeze cu ajutorul tabelelor de diferențe divizate [11].

10. Se înțelege că în locul formulei de interpolare (10) a lui Newton poate fi utilizată formula de interpolare a lui Lagrange. Întrucît în formula de interpolare a lui Lagrange restul are tot expresia de la (11), rezultă că restul formulei de derivare parțială numerică ce se obține întrebuințînd această formulă pentru calculul aproximativ al derivatei parțiale

$$\frac{\partial^{p_1+p_2 \dots + p_s} f(M_0)}{\partial (t_0^1)^{p_1} \partial (t_0^2)^{p_2} \dots \partial (t_0^s)^{p_s}}$$

va putea fi pus de asemenea sub forma (15).

Din punct de vedere practic găsim că e mai avantajos să se întrebuințeze formula de interpolare a lui Newton. Iată cîteva motive care ne fac să afirmăm acest lucru:

1° Aceasta ne conduce la formule în care se introduc succesiv diferențele divizate și ne permite să întrebuințăm cu succes tabelele de diferențe divizate.

2° Calculele făcute pentru o derivată parțială se pot folosi în continuare pentru calculul unei derivate parțiale de ordin mai înalt.

3° Formulele de derivare parțială numerică au o formă simplă, simetrică. Acestea se pot exprima foarte ușor printr-o singură formulă generală (13); din aceasta — particularizînd convenabil indicii de derivare $p_1, p_2, \dots, p_s$—, se pot obține imediat formulele de derivare parțială numerică pe care le dorim.

4° Formula (13) care se obține e valabilă și în cazul cînd nodurilor li se atașează diferite ordine de multiplicitate. În acest caz diferențele divizate se exprimă prin anumite derivate parțiale luate în nodurile respective — fapt bine cunoscut din cazul unei variabile.

Observație. Subliniem că evaluarea (15) pe care am dat-o pentru rest este valabilă și în cazul nodurilor multiple.

§ 3. Formule de derivare parțială numerică cu diferențe

11. Ne vom ocupa acum de un caz particular important care permite ca formulele de derivare parțială numerică din paragraful precedent să fie aduse la forme utile pentru aplicații practice. Este vorba despre formulele de derivare parțială numerică simetrice, exprimate cu ajutorul diferențelor simple.

În cazul a două variabile schimbînd pe X în $x_0 - hx$, pe Y în $y_0 - ky$ și luînd nodurile

$$x_i = x_0 - \overline{i-1}\,h,\ y_j = y_0 - \overline{j-1}\,k,\ (i = \overline{1, n+1};\ j = \overline{1, m+1}) \tag{37}$$

formula de interpolare (10) *) devine

$$f(x_0 - hx,\ y_0 - ky) =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} (-1)^{i+j} \prod_{\alpha=0}^{i-1} (x + \alpha) \prod_{\beta=0}^{j-1} (y + \beta) \frac{\Delta_x^i \Delta_i^j f(x_0, y_0)}{i!\, j!} + r(x, y),$$

unde

$$\Delta_x^i f(x_0, y) = \sum_{\nu=0}^{i} (-1)^{n-\nu} \binom{n}{\nu} f(x_0 - \nu h,\ y)$$

iar

$$\Delta_x^i \Delta_y^j f(x_0, y_0) = \sum_{\nu=0}^{i} \sum_{\mu=0}^{j} (-1)^{n+m-\nu-\mu} \binom{n}{\nu} \binom{m}{\mu} f(x_0 - \nu h,\ y_0 - \mu k).$$

Restul acestei formule de interpolare este

$$r(x, y) = (-1)^{n+1} h^{n+1} \prod_{\alpha=0}^{n} (x + \alpha)[x_0 - hx,\ x_0,\ x_0 + h, \dots, x_0 + nh; f] +$$

$$+ (-1)^{m+1} k^{m+1} \prod_{\beta=0}^{m} (y + \beta)[y_0 - ky,\ y_0,\ y_0 + k, \dots, y_0 + mk; f] +$$

$$+ (-1)^{n+m+1} h^{n+1} k^{m+1} \prod_{\alpha=0}^{n} (x + \alpha) \prod_{\beta=0}^{m} (y + \beta) \begin{bmatrix} x_0 - hx, x_0, x_0 + h, \dots, x_0 + nh \\ y_0 - ky, y_0, y_0 + k, \dots, y_0 + mk \end{bmatrix}; f \Big].$$

Ținînd seama de acestea, formula (35) ne conduce la formula de derivare parțială numerică

$$(-1)^{p+q} h^p k^q \frac{\partial^{p+q} f(x_0 - hx,\ y_0 - ky)}{\partial X^p \partial Y^q} = \tag{38}$$

$$= \sum_{i=p}^{n} \sum_{j=q}^{m} (-1)^{i+j} \frac{\Delta_x^i \Delta_y^j f(x_0 y_0)}{i!\, j!} \left(\frac{d^p}{dx^p} \prod_{\alpha=0}^{i-1} (x + \alpha) \right) \left(\frac{d^q}{dy^q} \prod_{\beta=0}^{j-1} (y + \beta) \right) + R(x, y),$$

*) În care variabilele independente le notăm cu X și Y.

unde

$$R(x,y)=\frac{(-1)^{n+q+1}h^{n+1}k^{q}}{(n+1)!}\,\frac{\partial^{n+q+1}f(\xi,y_0-ky)}{\partial\xi^{n+1}\partial Y^{q}}\,\frac{d^{p}}{dx^{p}}\prod_{\alpha=0}^{n}(x+\alpha)+$$

$$+\frac{(-1)^{m+p+1}h^{p}k^{m+1}}{(m+1)!}\,\frac{\partial^{p+m+1}f(x_0-hx,\eta)}{\partial X^{p}\partial\eta^{m+1}}\,\frac{d^{q}}{dy^{q}}\prod_{\beta=0}^{m}(y+\beta)+$$

$$+\frac{(-1)^{n+m+1}h^{n+1}k^{m+1}}{(n+1)!\,(m+1)!}\,\frac{\partial^{n+m+2}f(\xi,\eta)}{\partial\xi^{n+1}\partial\eta^{m+1}}\left(\frac{d^{p}}{dx^{p}}\prod_{\alpha=0}^{n}(x+\alpha)\right)\left(\frac{d^{q}}{dy^{q}}\prod_{\beta=0}^{m}(y+\beta)\right).\quad(39)$$

12. Făcînd în (38) $x=0$ și $y=0$ se obțin formule de derivare parțială numerică analoge cu cunoscuta formulă de derivare numerică dată de A. A. Markov [6]

$$(-1)^{p+q}h^{p}k^{q}\frac{\partial^{p+q}f(x_0,y_0)}{\partial x_0^{p}\partial y_0^{q}}=$$

$$=\sum_{i=p}^{n}\sum_{j=q}^{m}(-1)^{i+j}\frac{\Delta_x^{i}\Delta_y^{j}f(x_0,y_0)}{i!\,j!}\left[\frac{d^{p}}{dx^{p}}\prod_{\alpha=0}^{i-1}(x+\alpha)\right]_{x=0}\cdot\left[\frac{d^{q}}{dy^{q}}\prod_{\beta=0}^{j-1}(y+\beta)\right]_{y=0}+R',\quad(40)$$

unde

$$R'=\frac{(-1)^{n+q+1}h^{n+1}k^{q}}{(n+1)!}\,\frac{\partial^{n+q+1}f(\xi,y_0)}{\partial\xi^{n+1}\partial y_0^{q}}\left[\frac{d^{p}}{dx^{p}}\prod_{\alpha=0}^{n}(x+\alpha)\right]_{x=0}+$$

$$+\frac{(-1)^{p+m+1}h^{p}k^{m+1}}{(m+1)!}\,\frac{\partial^{p+m+1}f(x_0,\eta)}{\partial x_0^{p}\partial\eta^{m+1}}\left[\frac{d^{q}}{dy^{q}}\prod_{\beta=0}^{m}(y+\beta)\right]_{y=0}+$$

$$+\frac{(-1)^{n+m+1}h^{n+1}k^{m+1}}{(n+1)!\,(m+1)!}\,\frac{\partial^{n+m+2}f(\xi,\eta)}{\partial\xi^{n+1}\partial\eta^{m+1}}\left[\frac{d^{p}}{dx^{p}}\prod_{\alpha=0}^{n}(x+\alpha)\right]_{x=0}\cdot\left[\frac{d^{q}}{dy^{q}}\prod_{\beta=0}^{m}(y+\beta)\right]_{y=0}.$$

13. Pentru $p=n$, $q=0$ și $x=0$ formula (38) devine

$$\frac{\partial^{n}f(x_0,y_0\,ky)}{\partial x_0^{n}}=\sum_{j=0}^{m}(-1)^{j}\prod_{\beta=0}^{j-1}(y+\beta)\frac{\Delta_x^{n}\Delta_y^{j}f(x_0,y_0)}{h^{n}\,j!}+R_1',$$

unde

$$R_1'=-\frac{nh}{2}\frac{\partial^{n+1}f(\xi,y_0-ky)}{\partial\xi^{n+1}}+(-1)^{m+1}\frac{k^{m+1}}{(m+1)!}\prod_{\beta=0}^{m}(y+\beta)\frac{\partial^{n+m+1}f(x_0,\eta)}{\partial x_0^{n}\partial\eta^{m+1}}+$$

$$+(-1)^{m+1}\frac{nhk^{m+1}}{2(m+1)!}\prod_{\beta=0}^{m}(y+\beta)\frac{\partial^{n+m+2}f(\xi,\eta)}{\partial\xi^{n+1}\partial\eta^{m+1}}.$$

Pentru $y=0$ această formulă devine

$$\frac{\partial^{n}f(x_0,y_0)}{\partial x_0^{n}}=\frac{\Delta_x^{n}f(x_0,y_0)}{h^{n}}-\frac{nh}{2}\frac{\partial^{n+1}f(\xi,y_0)}{\partial\xi^{n+1}}.\quad(41)$$

Făcînd $p=n$ și $q=m$ în formula (40), obținem formula de derivare parțială numerică

$$\frac{\partial^{n+m}f(x_0,y_0)}{\partial x_0^{n}\partial y_0^{m}}=\frac{\Delta_x^{n}\Delta_y^{m}f(x_0,y_0)}{h^{n}k^{m}}+R_2',\quad(42)$$

unde

$$R_2'=-\frac{nh}{2}\frac{\partial^{n+m+1}f(\xi,y_0)}{\partial\xi^{n+1}\partial y_0^{m}}-\frac{mk}{2}\frac{\partial^{n+m+1}f(x_0,\eta)}{\partial x_0^{n}\partial\eta^{m+1}}-$$

$$-\frac{nmhk}{4}\frac{\partial^{n+m+2}f(\xi,\eta)}{\partial\xi^{n+1}\partial\eta^{m+1}}.$$

14. Să mai vedem cîteva cazuri particulare pe care credem că e util să le subliniem.

Pentru $p=1$ și $q=0$ formula (40) devine

$$h\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x_0}=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}\frac{\Delta_x^{i}f(x_0,y_0)}{i}+\frac{(-h)^{n}}{n+1}\frac{\partial^{n+1}f(\xi,y_0)}{\partial\xi^{n+1}}$$

iar pentru $p=q=1$ din aceeași formulă se găsește

$$hk\frac{\partial^{2}f(x_0,y_0)}{\partial x_0\partial y_0}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(-1)^{i+j}\frac{\Delta_x^{i}\Delta_y^{j}f(x_0,y_0)}{ij}+\rho,\quad(43)$$

unde

$$\rho=\frac{(-1)^{n}h^{n+1}k}{n+1}\frac{\partial^{n+2}f(\xi,y_0)}{\partial\xi^{n+1}\partial y_0}+\frac{(-1)^{m}hk^{m+1}}{m+1}\frac{\partial^{m+2}f(x_0,\eta)}{\partial x_0\partial\eta^{m+1}}+$$

$$+(-1)^{n+m+1}\frac{h^{n+1}k^{m+1}}{(n+1)(m+1)}\frac{\partial^{n+m+2}f(\xi,\eta)}{\partial\xi^{n+1}\partial\eta^{m+1}}.$$

15. Se ajunge la formule de derivare parțială numerică cu diferențe ascendente dacă se folosește formula de interpolare de două variabile a lui Newton în care se schimbă X în x_0+hx, Y în y_0+ky și se iau nodurile

$$x_i=x_0-\overline{i-1}h,\quad y_j=y_0-\overline{j-1}k,\quad(i=\overline{1,n+1};\ j=\overline{1,m+1}).$$

Ținînd seama că

$$\left[\begin{matrix}x_0-ih,\ldots,x_0-h,x_0\\ y_0-jk,\ldots,y_0-k,y_0\end{matrix};f\right]=\frac{\Delta_x^{i}\Delta_y^{j}f(x_0-ih,y_0-jk)}{i!\,j!\,h^{i}k^{j}},$$

obținem următoarea formulă, corespunzătoare formulei (38),

$$h^{p}k^{q}\frac{\partial^{p+q}f(x_0+hx,y_0+ky)}{\partial X^{p}\partial Y^{q}}=\quad(44)$$

$$=\sum_{i=p}^{n}\sum_{j=q}^{m}\frac{\Delta_x^{i}\Delta_y^{j}f(x_0-ih,y_0-jk)}{i!\,j!}\left(\frac{d^{p}}{dx^{p}}\prod_{\alpha=0}^{i-1}(x+\alpha)\right)\left(\frac{d^{q}}{dy^{q}}\prod_{\beta=0}^{j-1}(y+\beta)\right)+\rho_2,$$

unde

$$\rho_2 = \frac{h^{n+1}k^q}{(n+1)!}\,\frac{\partial^{n+q+1} f(\xi, y_0+ky)}{\partial\xi^{n+1}\partial Y^q}\left(\frac{d^p}{dx^p}\prod_{\alpha=0}^{n}(x+\alpha)\right) +$$

$$+\frac{h^p\,k^{m+1}}{(m+1)!}\,\frac{\partial^{p+m+1} f(x_0+hx,\eta)}{\partial X^p\,\partial\eta^{m+1}}\left(\frac{d^q}{dy^q}\prod_{\beta=0}^{m}(y+\beta)\right) -$$

$$-\frac{h^{n+1}\,k^{m+1}}{(n+1)!\,(m+1)!}\,\frac{\partial^{n+m+2} f(\xi,\eta)}{\partial\xi^{n+1}\,\partial\eta^{m+1}}\left(\frac{d^p}{dx^p}\prod_{\alpha=0}^{n}(x+\alpha)\right)\left(\frac{d^q}{dy^q}\prod_{\beta=0}^{m}(y+\beta)\right).$$

Dacă luăm $x = y = 0$ primim următoarea formulă de derivare parțială numerică cu diferențe crescătoare

$$h^p\,k^q\,\frac{\partial^{p+q} f(x_0,y_0)}{\partial x_0^p\,\partial y_0^q} =$$

$$= \sum_{i=p}^{n}\sum_{j=q}^{m}\frac{\Delta_x^i\Delta_y^j f(x_0-ih, y_0-jk)}{i!\,j!}\left[\frac{d^p}{dx^p}\prod_{\alpha=0}^{i-1}(x+\alpha)\right]_{x=0}\cdot\left[\frac{d^q}{dy^q}\prod_{\beta=0}^{j-1}(y+\beta)\right]_{x=0} + \rho_2', \quad (45)$$

unde

$$\rho_2' = \frac{h^{n+1}\,k^q}{(n+1)!}\,\frac{\partial^{n+q+1} f(\xi, y_0)}{\partial\xi^{n+1}\,\partial y_0^q}\left[\frac{d^p}{dx^p}\prod_{\alpha=0}^{n}(x+\alpha)\right]_{x=0} +$$

$$+\frac{h^p\,k^{m+1}}{(m+1)!}\,\frac{\partial^{p+m+1} f(x_0,\eta)}{\partial x_0^p\,\partial\eta^{m+1}}\left[\frac{d^q}{dy^q}\prod_{\beta=0}^{m}(y+\beta)\right]_{y=0} -$$

$$-\frac{h^{n+1}\,k^{m+1}}{(n+1)!\,(m+1)!}\,\frac{\partial^{n+m+2} f(\xi,\eta)}{\partial\xi^{n+1}\,\partial\eta^{m+1}}\left[\frac{d^p}{dx^p}\prod_{\alpha=0}^{n}(x+\alpha)\right]_{x=0}\cdot\left[\frac{d^q}{dy^q}\prod_{\beta=0}^{m}(y+\beta)\right]_{y=0}.$$

Din aceasta se obțin formulele

$$\frac{\partial^n f(x_0,y_0)}{\partial x_0^n} = \frac{\Delta_x^n f(x_0-nh, y_0)}{h^n} + \frac{nh}{2}\,\frac{\partial^{n+1} f(\xi, y_0)}{\partial\xi^{n+1}}$$

$$\frac{\partial^{n+m} f(x_0,y_0)}{\partial x_0^n\,\partial y_0^m} = \frac{\Delta_x^n\Delta_y^m f(x_0-nh, y_0-mk)}{h^n\,k^m} + \rho_2'', \quad (46)$$

unde

$$\rho_2'' = \frac{nh}{2}\,\frac{\partial^{n+m+1} f(\xi, y_0)}{\partial\xi^{n+1}\,\partial y_0^m} + \frac{mk}{2}\,\frac{\partial^{n+m+1} f(x_0,\eta)}{\partial x_0^n\,\partial\eta^{m+1}} - \frac{nmhk}{4}\,\frac{\partial^{n+m+2} f(\xi,\eta)}{\partial\xi^{n+1}\partial\eta^{m+1}}.$$

16. Să vedem acum cîteva formule de derivare parțială numerică cu diferențe în cazul a trei variabile.

Corespunzătoare formulei (40) este formula

$$(-1)^{p+q+r}\,\frac{\partial^{p+q+r} f(x_0,y_0,z_0)}{\partial x_0^p\,\partial y_0^q\,\partial z_0^r} =$$

$$= \sum_{\nu=p}^{n}\sum_{\mu=q}^{m}\sum_{\sigma=r}(-1)^{\nu+\mu+\sigma}\,\frac{\Delta_x^\nu\,\Delta_y^\mu\,\Delta_z^\sigma f(x_0,y_0,z_0)}{\nu!\,\mu!\,\sigma!}\,D^1_{\nu-1}\,D^2_{\mu-1}\,D^3_{\sigma-r} + R_3, \quad (47)$$

unde

$$D^1_{\nu-1} = \left(\frac{d^p}{dx^p}\prod_{\alpha=0}^{\nu-1}(x+\alpha)\right)_{x=0},\quad D^2_{\mu-1} = \left(\frac{d^q}{dy^q}\prod_{\beta=0}^{\mu-1}(y+\beta)\right)_{y=0} \quad (48)$$

$$D^3_{\sigma-1} = \left(\frac{d^r}{dz^r}\prod_{\gamma=0}^{\sigma-1}(z+\gamma)\right)_{z=0}$$

iar restul are expresia

$$R_3 = \frac{(-1)^{n+q+r+1}h^{n+1}k^q\,l^r}{(n+1)!}\,D^1_n\,\frac{\partial^{n+q+r+1} f(\xi, y_0, z_0)}{\partial\xi^{n+1}\partial y_0^q\,\partial z_0^r} +$$

$$+\frac{(-1)^{p+m+r+1}h^p\,k^{m+1}l^r}{(m+1)!}\,D^2_m\,\frac{\partial^{p+m+r+1} f(x_0,\eta,z_0)}{\partial x_0^p\,\partial\eta^{m+1}\partial z_0^r} +$$

$$+\frac{(-1)^{p+q+s+1}h^p\,k^q\,l^{s+1}}{(s+1)!}\,D^3_s\,\frac{\partial^{p+q+s+1} f(x_0,y_0,\zeta)}{\partial x_0^p\,\partial y_0^q\,\partial\zeta^{s+1}} +$$

$$+\frac{(-1)^{n+m+r+1}h^{n+1}k^{m+1}l^r}{(n+1)!\,(m+1)!}\,D^1_n\,D^2_m\,\frac{\partial^{n+m+r+2} f(\xi,\eta,z_0)}{\partial\xi^{n+1}\partial\eta^{m+1}\partial z_0^r} +$$

$$+\frac{(-1)^{n+q+s+1}h^{n+1}k^q\,l^{s+1}}{(n+1)!\,(s+1)!}\,D^1_n\,D^3_s\,\frac{\partial^{n+q+s+2} f(\xi, y_0,\zeta)}{\partial\xi^{n+1}\partial y_0^q\,\partial\zeta^{s+1}} +$$

$$+\frac{(-1)^{p+m+s+1}h^p\,k^{m+1}l^{s+1}}{(m+1)!\,(s+1)!}\,D^2_m\,D^3_s\,\frac{\partial^{p+m+s+2} f(x_0,\eta,\zeta)}{\partial x_0^p\,\partial\eta^{m+1}\partial\zeta^{s+1}} +$$

$$+\frac{(-1)^{n+m+s+1}h^{n+1}k^{m+1}l^{s+1}}{(n+1)!\,(m+1)!\,(s+1)!}\,D^1_n\,D^2_m\,D^3_s\,\frac{\partial^{n+m+s+3} f(\xi,\eta,\zeta)}{\partial\xi^{n+1}\partial\eta^{m+1}\partial\zeta^{s+1}}. \quad (49)$$

Pentru $p = n$, $q = m$, $r = s$, obținem formula

$$\frac{\partial^{n+m+s} f(x_0,y_0,z_0)}{\partial x_0^n\,\partial y_0^m\,\partial z_0^s} = \frac{\Delta_x^n\,\Delta_y^m\,\Delta_z^s f(x_0,y_0,z_0)}{h^n\,k^m\,l^s} + R_3', \quad (50)$$

unde

$$R_3' = -\frac{nh}{2}\,\frac{\partial^{n+m+s+1} f(\xi,y_0,z_0)}{\partial\xi^{n+1}\partial y_0^m\,\partial z_0^s} - \frac{mk}{2}\,\frac{\partial^{n+m+s+1} f(x_0,\eta,z_0)}{\partial x_0^n\,\partial\eta^{m+1}\partial z_0^s} -$$

$$-\frac{sl}{2}\,\frac{\partial^{n+m+s+1} f(x_0,y_0,\zeta)}{\partial x_0^n\,\partial y_0^m\,\partial\zeta^{s+1}} - \frac{nmhk}{4}\,\frac{\partial^{n+m+s+2} f(\xi,\eta,z_0)}{\partial\xi^{n+1}\partial\eta^{m+1}\partial z_0^s} -$$

$$-\frac{nshl}{4}\,\frac{\partial^{n+m+s+2} f(\xi,y_0,\zeta)}{\partial\xi^{n+1}\partial y_0^m\,\partial\zeta^{s+1}} - \frac{mskl}{4}\,\frac{\partial^{n+m+s+2} f(x_0,\eta,\zeta)}{\partial x_0^n\,\partial\eta^{m+1}\partial\zeta^{s+1}} -$$

$$-\frac{nmshkl}{8}\,\frac{\partial^{n+m+s+3} f(\xi,\eta,\zeta)}{\partial\xi^{n+1}\partial\eta^{m+1}\partial\zeta^{s+1}}.$$

Corespunzătoare formulei (45) este formula cu diferențe ascendente

$$h^p\, k^q\, l^r\, \frac{\partial^{p+q+r} f(x_0, y_0, z_0)}{\partial x_0{}^p\, \partial y_0{}^q\, \partial z_0{}^r} =$$

$$= \sum_{\nu=p}^{n} \sum_{\mu=q}^{m} \sum_{\sigma=r}^{s} D^1_{\nu-1}\, D^2_{\mu-1}\, D^3_{\sigma-1}\, \frac{\Delta^\nu_x\, \Delta^\mu_y\, \Delta^\sigma_z f(x_0-\nu h,\ y_0-\mu k,\ z_0-\sigma l)}{\nu!\, \mu!\, \sigma!} + \rho_3\,, \qquad (51)$$

unde

$$\rho_3' = \frac{h^{n+1} k^q\, l^r}{(n+1)!}\, D^1_n\, \frac{\partial^{n+q+r+1} f(\xi, y_0, z_0)}{\partial \xi^{n+1} \partial y_0^q\, \partial z_0^r} + \frac{h^p\, k^{m+1}\, l^r}{(m+1)!}\, \frac{\partial^{p+m+r+1} f(x_0, \eta, z_0)}{\partial x_0^p\, \partial \eta^{m+1}\, \partial z_0^r} +$$

$$+ \frac{h^p\, k^q\, l^{s+1}}{(s+1)!}\, D^3_s\, \frac{\partial^{p+q+s+1} f(x_0, y_0, \zeta)}{\partial x_0^p\, \partial y_0^q\, \partial \zeta^{s+1}} - \frac{h^{n+1}\, k^{m+1} l^r}{(n+1)!\,(m+1)!}\, \frac{\partial^{n+m+r+2} f(\xi, \eta, z_0)}{\partial \xi^{n+1}\, \partial \eta^{m+1}\, \partial z_0^r} -$$

$$- \frac{h^{n+1}\, k^q\, l^{s+1}}{(n+1)!\,(s+1)!}\, \frac{\partial^{n+q+s+2} f(\xi, y_0, \zeta)}{\partial \xi^{n+1}\, \partial y_0^q\, \partial \zeta^{s+1}} - \frac{h^p\, k^{m+1}\, l^{s+1}}{(m+1)!\,(s+1)!}\, \frac{\partial^{p+m+s+2} f(x_0, \eta, \zeta)}{\partial x_0^p\, \partial \eta^{m+1}\, \partial \zeta^{s+1}} +$$

$$+ \frac{h^{n+1}\, k^{m+1}\, l^{s+1}}{(n+1)!\,(m+1)!\,(s+1)!}\, \frac{\partial^{n+m+s+3} f(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \xi^{n+1}\, \partial \eta^{m+1}\, \partial \zeta^{s+1}}\,.$$

Din aceasta se obține formula

$$\frac{\partial^{n+m+s} f(x_0, y_0, z_0)}{\partial x_0^n\, \partial y_0^m\, \partial z_0^s} = \frac{\Delta^n_x\, \Delta^m_y\, \Delta^s_z\, f(x_0-nh,\ y_0-mk,\ z_0-sl)}{h^n\, k^m\, l^s} + \rho_3'', \qquad (52)$$

unde

$$\rho_3'' = \frac{nh}{2}\, \frac{\partial^{n+m+s+1} f(\xi, y_0, z_0)}{\partial \xi^{n+1}\, \partial y_0^m\, \partial z_0^s} + \frac{mk}{2}\, \frac{\partial^{n+m+s+1} f(x_0, \eta, z_0)}{\partial x_0^n\, \partial \eta^{m+1}\, \partial z_0^s} +$$

$$+ \frac{sl}{2}\, \frac{\partial^{n+m+s+1} f(x_0, y_0, \zeta)}{\partial x_0^n\, \partial y_0^m\, \partial \zeta^{s+1}} - \frac{nmhk}{4}\, \frac{\partial^{n+m+s+2} f(\xi, \eta, z_0)}{\partial \xi^{n+1}\, \partial \eta^{m+1}\, \partial z_0^s} -$$

$$- \frac{nshl}{4}\, \frac{\partial^{n+m+s+2} f(\xi, y_0, \zeta)}{\partial \xi^{n+1}\, \partial y_0^m\, \partial \zeta^{s+1}} - \frac{mskl}{4}\, \frac{\partial^{n+m+s+2} f(x_0, \eta, \zeta)}{\partial x_0^n\, \partial \eta^{m+1}\, \partial \zeta^{s+1}} +$$

$$+ \frac{nmshkl}{8}\, \frac{\partial^{n+m+s+3} f(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \xi^{n+1}\, \partial \eta^{m+1}\, \partial \zeta^{s+1}}\,.$$

17. Să presupunem că p și q sînt două numere naturale impare și că pentru coordonatele nodurilor luăm, în primul rînd,

$$x_1 = x_0,\ x_2 = x_0 + h,\ x_3 = x_0 - h, \ldots, x_{2i-1} = x_0 + ih,\ x_{2i} = x_0 - ih, \ldots$$

$$y_1 = y_0,\ y_2 = y_0 + k,\ y_3 = y_0 - k, \ldots, y_{2j-1} = y_0 + jk,\ y_{2j} = y_0 - jk, \ldots$$

iar în al doilea rînd (53

$$x_1 = x_0,\ x_2 = x_0 - h,\ x_3 = x_0 + h, \ldots, x_{2i-1} = x_0 - ih,\ x_{2i} = x_0 + ih, \ldots$$

$$y_1 = y_0, y_2 = y_0 - k, y_3 = y_0 + k, \ldots, y_{2j-1} = y_0 - jk, y_{2j} = y_0 + jk, \ldots \qquad (54)$$

În loc de variabila X să luăm $x_0 + hx$ iar în loc de Y să luăm $y_0 + ky$.

În aceste condiții se obțin două formule de derivare parțială numerică de tipul (35). Făcînd media aritmetică a acestor două formule obținem următoarea formulă de derivare

$$\frac{h^p\, k^q\, \partial^{p+q} f(x_0 + hx,\ y_0 + ky)}{\partial X^p\, \partial Y^q} =$$

$$= \sum_{i=\frac{p+1}{2}}^{n} \sum_{j=\frac{q+1}{2}}^{m} \left\{ \frac{A^{(p)}_{i-1}(x)\, B^{(q)}_{j-1}(y)}{4\,(2i-1)!\,(2j-1)!}\, \Delta^{2i-1}_x\, \Delta^{2j-1}_y\, [f(x_0 - ih,\ y_0 - jk) + f(x_0 - \overline{i-1}h,\ y_0 - jk) + f(x_0 - ih,\ y_0 - \overline{j-1}k) + f(x_0 - \overline{i-1}\,h, y_0 - \overline{j-1}\,k)] + \right.$$

$$+ \frac{C^{(p)}_{i-1}(x)\, B^{(q)}_{j-1}(y)}{2\,(2i)!\,(2j-1)!}\, [f(x_0 - ih, y_0 - jk) + f(x_0 - ih,\ y_0 - \overline{j-1}k)] +$$

$$+ \frac{A^{(p)}_{i-1}(x)\, D^{(q)}_{j-1}(y)}{2\,(2i-1)!\,(2j)!}\, \Delta^{2i-1}_x\, \Delta^{2j}_y\, [f(x_0 - ih,\ y_0 - jk) + f(x_0 - \overline{i-1}h, y_0 - jk)] +$$

$$\left. + \frac{C^{(p)}_{i-1}(x)\, D^{(q)}_{j-1}(y)}{(2i)!\,(2j)!}\, \Delta^{2i}_x\, \Delta^{2j}_y\, f(x_0 - ih,\ y_0 - jk) \right\} + r_2(x, y), \qquad (55)$$

unde

$$r_2(x, y) = \frac{h^{2n+1}\, k^q}{(2n+1)!}\, A_n(x)\, \frac{\partial^{2n+q+1} f(\xi, y_0 + ky)}{\partial \xi^{2n+1}\, \partial Y^q} +$$

$$+ \frac{h^p\, k^{2m+1}}{(2m+1)!}\, B_m(y)\, \frac{\partial^{p+2m+1} f(x_0 + hx, \eta)}{\partial X^p\, \partial \eta^{2m+1}} -$$

$$- \frac{h^{2n+1} k^{2m+1}}{(2n+1)!\,(2m+1)!}\, A_n(x) B_m(y)\, \frac{\partial^{2n+2m+2} f(\xi, \eta)}{\partial \xi^{2n+1}\, \partial \eta^{2m+1}}$$

iar

$$A_{i-1}(x) = x \prod_{\alpha=1}^{i-1} (x^2 - \alpha^2),\quad B_{j-1}(y) = y \prod_{\beta=1}^{j-1} (y^2 - \beta^2),$$

$$C_{i-1}(x) = \prod_{\alpha=0}^{i-1} (x^2 - \alpha^2),\ D_{j-1}(y) = \prod_{\beta=0}^{j-1} (y^2 - \beta^2), \qquad (56)$$

$$F^{(s)}(u) = \frac{d^s F(u)}{du^s}.$$

18. Din (55) se pot obţine formule utile din punct de vedere practic pentru calculul aproximativ al derivatelor parţiale de ordin impar. Pentru aceasta este suficient să luăm $x = 0$ şi $y = 0$ şi obţinem formula

$$h^p k^q \frac{\partial^{p+q} f(x_0, y_0)}{\partial x_0^p \, \partial y_0^q} =$$

$$= \sum_{i=\frac{p+1}{2}}^{n} \sum_{j=\frac{q+1}{2}}^{m} \frac{A_{i-1}^{(p)}(0)\, B_{j-1}^{(q)}(0)}{4\,(2i-1)!\,(2j-1)!}\, \Delta_x^{2i-1} \Delta_y^{2j-1} [f(x_0 - ih,\ y_0 - jk) +$$

$$+ f(x_0 - \overline{i-1}\,h,\ y_0 - jk) + f(x_0 - ih,\ y_0 - \overline{j-1}\,k) + f(x_0 - \overline{i-1}\,h,$$

$$y_0 - \overline{j-1}\,k)] + r_2', \tag{57}$$

unde

$$r_2' = \frac{h^{2n+1} k^q}{(2n+1)!}\, A_n^{(p)}(0)\, \frac{\partial^{2n+q+1} f(\xi, y_0)}{\partial \xi^{2n+1} \partial y_0^q} +$$

$$+ \frac{h^p k^{2m+1}}{(2m+1)!}\, B_m^{(q)}(0)\, \frac{\partial^{p+2m+1} f(x_0, \eta)}{\partial x_0^p \, \partial \eta^{2m+1}} -$$

$$- \frac{h^{2n+1} k^{2m+1}}{(2n+1)!\,(2m+1)!}\, A_n^{(p)}(0)\, B_m^{(q)}(0)\, \frac{\partial^{2n+2m+2} f(\xi, \eta)}{\partial \xi^{2n+1} \partial \eta^{2m+1}}.$$

19. În cazul cînd p şi q sînt pari avem formula

$$h^p k^q \frac{\partial^{p+q} f(x_0 + hx, y_0 + ky)}{\partial X^p \, \partial Y^q} = \tag{58}$$

$$= \sum_{i=\frac{p}{2}}^{n-1} \sum_{j=\frac{q}{2}}^{m-1} \frac{C_{i-1}^{(p)}(x)\, D_{j-1}^{(q)}(y)}{(2i)!\,(2j)!}\, \Delta_x^{2i} \Delta_y^{2j} f(x_0 - ih,\ y_0 - jk) +$$

$$+ \sum_{i=\frac{p}{2}}^{n-1} \sum_{j=1+\frac{q}{2}}^{m} \frac{C_{i-1}^{(p)}(x)\, B_{j-1}^{(q)}(y)}{2\,(2i)!\,(2j-1)!}\, \Delta_x^{2i} \Delta_y^{2j-1} [f(x_0 - ih,\ y_0 - jk) +$$

$$+ f(x_0 - ih,\ y_0 - \overline{j-1}\,k)] + \sum_{i=1+\frac{p}{2}}^{n} \sum_{j=\frac{q}{2}}^{m-1} \frac{A_{i-1}^{(p)}(x)\, D_{j-1}^{(q)}(y)}{2\,(2i-1)!\,(2j)!}\, \Delta_x^{2i-1} \Delta_y^{2j} [f(x_0 -$$

$$- ih,\ y_0 - jk) + f(x_0 - \overline{i-1}\,h,\ y_0 - jk)] +$$

$$+ \sum_{i=1+\frac{p}{2}}^{n} \sum_{j=1+\frac{q}{2}}^{m} \frac{A_{i-1}^{(p)}(x)\, B_{j-1}^{(q)}(y)}{4\,(2i-1)!\,(2j-1)!}\, \Delta_x^{2i-1} \Delta_y^{2j-1} [f(x_0 - ih,\ y_0 - jk) + f(x_0 -$$

$$- \overline{i-1}\,h,\ y_0 - jk) + f(x_0 - ih,\ y_0 - \overline{j-1}\,k) + f(x_0 - \overline{i-1}\,h, y_0 -$$

$$- \overline{j-1}\,k)] + \rho_3(x, y),$$

unde

$$\rho_3(x, y) = \frac{h^{2n} k^q}{2\,(2n)!} \left[H_{(x)}^{(p)} \frac{\partial^{2n+q} f(\xi, y_0 + ky)}{\partial \xi^{2n} \partial Y^q} + h_{(x)}^{(p)} \frac{\partial^{2n+q} f(\xi_1, y_0 + ky)}{\partial \xi_1^{2n} \partial Y^q} \right] +$$

$$+ \frac{h^p k^{2m}}{2(2m)!} \left[G_{(y)}^{(q)} \frac{\partial^{p+2m} f(x_0 + hx, \eta)}{\partial x^p \, \partial \eta^{2m}} + g_{(y)}^{(q)} \frac{\partial^{p+2m} f(x_0 + hx, \eta_1)}{\partial x^p \, \partial \eta_1^{2m}} \right] -$$

$$- \frac{h^{2n} k^{2m}}{2\,(2n)!\,(2m)!} \left[H_{(x)}^{(p)} G_{(y)}^{(q)} \frac{\partial^{2n+2m} f(\xi, \eta)}{\partial \xi^{2n} \partial \eta^{2m}} + h_{(x)}^{(p)} g_{(y)}^{(q)} \frac{\partial^{2n+2m} f(\xi_1, \eta_1)}{\partial \xi_1^{2n} \partial \eta_1^{2m}} \right]$$

iar

$$H(x) = x(x + n) \prod_{\alpha=1}^{n-1} (x^2 - \alpha^2), \quad h(x) = x(x - n) \prod_{\alpha=1}^{n-1} (x^2 - \alpha^2)$$

$$G(y) = y\,(y + m) \prod_{\beta=1}^{m-1} (y^2 - \beta^2), \quad g(y) = y\,(y - m) \prod_{\beta=1}^{m-1} (y^2 - \beta^2).$$

20. Făcînd în (58) $q = 0$ şi $x = y = 0$ obţinem următoarea formulă care ne dă derivatele parţiale de ordin par în raport cu x

$$h^p \frac{\partial^p f(x_0, y_0)}{\partial x_0^p} = \sum_{i=\frac{p}{2}}^{n-1} \frac{C_{i-1}^{(p)}(0)}{(2i)!}\, \Delta_x^{2i} f(x_0 - ih,\ y_0) +$$

$$+ \frac{h^{2n}}{(2n)!}\, C_{n-1}^{(p)}(0)\, \frac{\partial^{2n} f(\xi, y_0)}{\partial \xi^{2n}}. \tag{59}$$

Pentru derivata mixtă obţinem formula

$$h^p k^q \frac{\partial^{p+q} f(x_0, y_0)}{\partial x_0^p \, \partial y_0^q} =$$

$$= \sum_{i=\frac{p}{2}}^{n-1} \sum_{j=\frac{q}{2}}^{m-1} \frac{C_{i-1}^{(p)}(0)\, D_{j-1}^{(q)}(0)}{(2i)!\,(2j)!}\, \Delta_x^{2i} \Delta_y^{2j} f(x_0 - ih,\ y_0 - jk) + \rho_2', \tag{60}$$

cu restul

$$\rho_2' = \frac{h^{2n} k^q}{(2n)!}\, C_{n-1}^{(p)}(0)\, \frac{\partial^{2n+q} f(\xi, y_0)}{\partial \xi^{2n} \partial y_0^q} + \frac{h^p k^{2m}}{(2m)!}\, D_{m-1}^{(q)}(0)\, \frac{\partial^{p+2m} f(x_0, \eta)}{\partial x_0^p \, \partial \eta^{2m}} -$$

$$- \frac{h^{2n} k^{2m}}{(2n)!\,(2m)!}\, C_{n-1}^{(p)}(0)\, D_{m-1}^{(q)}(0)\, \frac{\partial^{2n+2m} f(\xi, \eta)}{\partial \xi^{2n} \partial \eta^{2m}}.$$

21. În cazul cînd p este impar iar q este par se obţine formula

$$\frac{h^p k^q \partial^{p+q} f(x_0, y_0)}{\partial x_0^p \, \partial y_0^q} =$$

$$= \sum_{i=\frac{p+1}{2}}^{n} \sum_{j=\frac{q}{2}}^{m-1} \frac{A_{i-1}^{(p)}(0)\, D_{j-1}^{(q)}(0)}{2\,(2i-1)!\,(2j)!}\, \Delta_x^{2i-1} \Delta_y^{2j} [f(x_0 - ih,\ y_0 - jk) +$$

$$+ f(x_0 - \overline{i-1}\,h,\ y_0 - jk)] + R, \tag{61}$$

unde

$$R = \frac{h^{2n+1}k^q}{2(2n+1)!} A_n^{(p)}(0) \frac{\partial^{2n+q+1} f(\xi, y_0)}{\partial \xi^{2n+1}\partial y_0^q} + \frac{h^p k^{2m}}{(2m)!} D_{m-1}^{(q)}(0) \frac{\partial^{p+2m} f(x_0,\eta)}{\partial x_0^p \partial \eta^{2m}} - \frac{h^{2n+1}k^{2m}}{(2n+1)!(2m)!} A_n^{(p)}(0) D_{m-1}^{(q)}(0) \frac{\partial^{2n+2m+1} f(\xi,\eta)}{\partial\xi^{2n+1}\partial\eta^{2m}}.$$

22. Să mai dăm acum și cîteva formule de derivare parțială numerică, de felul celor precedente, pentru funcțiile de trei variabile.

Dacă p, q și r sînt impari, avem următoarea formulă, corespunzătoare formulei (57),

$$h^p k^q l^r \frac{\partial^{p+q+r} f(x_0, y_0, z_0)}{\partial x_0^p \partial y_0^q \partial z_0^r} = \tag{62}$$

$$= \sum_{\nu=\frac{p+1}{2}}^{n} \sum_{\mu=\frac{q+1}{2}}^{m} \sum_{\sigma=\frac{r+1}{2}}^{s} \frac{A_{\nu-1}^{(p)}(0)\, B_{\mu-1}^{(q)}(0)\, E_{\sigma-1}^{(r)}(0)}{8(2\nu-1)!\,(2\mu-1)!\,(2\sigma-1)!} \Delta_x^{2\nu-1} \Delta_y^{2\mu-1} \Delta_z^{2\sigma-1} [f(x_0 - \nu h, y_0 - \mu k, z_0 - \sigma l) + f(x_0 - \overline{\nu-1}h, y_0 - \mu k, z_0 - \sigma l) + f(x_0 - \nu h, y_0 - \overline{\mu-1}k, z_0 - \sigma l) + f(x_0 - \nu h, y_0 - \mu k, z_0 - \overline{\sigma-1}l) + f(x_0 - \overline{\nu-1}h, y_0 - \overline{\mu-1}k, z_0 - \sigma l) + f(x_0 - \overline{\nu-1}h, y_0 - \mu k, z_0 - \overline{\sigma-1}\,l) + f(x_0 - \nu h, y_0 - \overline{\mu-1}k, z_0 - \overline{\sigma-1}\,l) + f(x_0 - \overline{\nu-1}h, y_0 - \overline{\mu-1}k, z_0 - \overline{\sigma-1}\,l)] + r'_3),$$

unde

$$r'_3 = \frac{h^{2n+1}k^q l^r}{(2n+1)!} A_n^{(p)}(0) \frac{\partial^{2n+q+r+1} f(\xi, y_0, z_0)}{\partial\xi^{2n+1}\partial y_0^q \partial z_0^r} + \frac{h^p k^{2m+1} l^r}{(2m+1)!} \frac{\partial^{p+2m+r+1} f(x_0, \eta, z_0)}{\partial x_0^p \partial\eta^{2m+1}\partial z_0^r} + \frac{h^p k^q l^{2s+1}}{(2s+1)!} E_s^{(r)}(0) \frac{\partial^{p+q+2s+1} f(x_0, y_0, \zeta)}{\partial x_0^p \partial y_0^q \partial\zeta^{2s+1}} -$$

$$- \frac{h^{2n+1}k^{2m+1}l^r}{(2n+1)!\,(2m+1)!} A_n^{(p)}(0)\, B_m^{(q)}(0) \frac{\partial^{2n+2m+r+2} f(\xi,\eta,z_0)}{\partial\xi^{2n+1}\partial\eta^{2m+1}\partial z_0^r} - \frac{h^{2n+1}k^q l^{2s+1}}{(2n+1)!\,(2s+1)!} A_n^{(p)}(0)\, E_s^{(r)}(0) \frac{\partial^{2n+q+2s+2} f(\xi, y_0, \zeta)}{\partial\xi^{2n+1}\partial y_0^q \partial\zeta^{2s+1}} -$$

$$- \frac{h^p k^{2m+1} l^{2s+1}}{(2m+1)!\,(2s+1)!} B_m^{(q)}(0)\, E_s^{(r)}(0) \frac{\partial^{p+2m+2s+2} f(x_0,\eta,\zeta)}{\partial x_0^p \partial\eta^{2m+1}\partial\zeta^{2s+1}} + \frac{h^{2n+1}k^{2m+1}l^{2s+1}}{(2n+1)!\,(2m+1)!\,(2s+1)!} A_n^{(p)}(0)\, B_m^{(q)}(0)\, E_s^{(r)}(0) \frac{\partial^{2n+2m+2s+3} f(\xi,\eta,\zeta)}{\partial\xi^{2n+1}\partial\eta^{2m+1}\partial\zeta^{2s+1}}$$

iar

$$E_{i-1}(z) = z \prod_{\gamma=1}^{i-1} (z^2 - \gamma^2).$$

23. În cazul cînd p, q și r sînt pari avem formula

$$h^p k^q l^r \frac{\partial^{p+q+r} f(x_0, y_0, z_0)}{\partial x_0^p \partial y_0^q \partial z_0^r} =$$

$$= \sum_{\nu=\frac{p}{2}}^{n-1} \sum_{\mu=\frac{q}{2}}^{m-1} \sum_{\sigma=\frac{r}{2}}^{s-1} \frac{C_{\nu-1}^{(p)}(0)\, D_{\mu-1}^{(q)}(0)\, F_{\sigma-1}^{(r)}(0)}{(2\nu)!\,(2\mu)!\,(2\sigma)!} \Delta_x^{2\nu} \Delta_y^{2\mu} \Delta_z^{2\sigma} f(x_0 - \nu h, y_0 - \mu k, z_0 - \sigma l) + \rho'_3,$$

unde restul are expresia

$$\rho'_3 = \frac{h^{2n}k^q l^r}{(2n)!} C_{n-1}^{(p)}(0) \frac{\partial^{2n+q+r} f(\xi, y_0, z_0)}{\partial\xi^{2n}\partial y_0^q \partial z_0^r} + \frac{h^p k^{2m} l^r}{(2m)!} D_{m-1}^{(q)}(0) \frac{\partial^{p+2m+r} f(x_0,\eta,z_0)}{\partial x_0^p \partial\eta^{2m}\partial z_0^r} + \frac{h^p k^q l^{2s}}{(2s)!} F_{s-1}^{(r)}(0) \frac{\partial^{p+q+2s} f(x_0, y_0, \zeta)}{\partial x_0^p \partial y_0^q \partial\zeta^{2s}} -$$

$$- \frac{h^{2n}k^{2m}l^r}{(2n)!\,(2m)!} C_{n-1}^{(p)}(0)\, D_{m-1}^{(q)}(0) \frac{\partial^{2n+2m+r} f(\xi,\eta,z_0)}{\partial\xi^{2n}\partial\eta^{2m}\partial z_0^r} - \frac{h^{2n}k^q l^{2s}}{(2n)!\,(2s)!} C_{n-1}^{(p)}(0)\, F_{s-1}^{(r)}(0) \frac{\partial^{2n+q+2s} f(\xi, y_0, \zeta)}{\partial\xi^{2n}\partial y_0^q \partial\zeta^{2s}} -$$

$$- \frac{h^p k^{2m} l^{2s}}{(2m)!\,(2s)!} D_{m-1}^{(q)}(0)\, F_{s-1}^{(r)}(0) \frac{\partial^{p+2m+2s} f(x_0,\eta,\zeta)}{\partial x_0^p \partial\eta^{2m}\partial\zeta^{2s}} + \frac{h^{2n}k^{2m}l^{2s}}{(2n)!\,(2m)!\,(2s)!} C_{n-1}^{(p)}(0)\, D_{m-1}^{(q)}(0)\, F_{s-1}^{(r)}(0) \frac{\partial^{2n+2m+2s} f(\xi,\eta,\zeta)}{\partial\xi^{2n}\partial\eta^{2m}\partial\zeta^{2s}}$$

iar

$$F_{i-1}(z) = \prod_{\gamma=0}^{i-1} (z^2 - \gamma^2).$$

24. Dacă p și r sînt impari iar q par avem formula

$$h^p k^q l^r \frac{\partial^{p+q+r} f(x_0, y_0, z_0)}{\partial x_0^p \partial y_0^b \partial z_0^r} = \tag{63}$$

$$= \sum_{\nu=\frac{p+1}{2}}^{n} \sum_{\mu=\frac{q}{2}}^{m-1} \sum_{\sigma=\frac{r+1}{2}}^{s} \frac{A_{\nu-1}^{(p)}(0)\, D_{\mu-1}^{(q)}(0)\, F_{\sigma-1}^{(r)}(0)}{4(2\nu-1)!\,(2\mu)(2\sigma-1)!} \Delta_x^{2\nu-1} \Delta_y^{2\mu} \Delta_z^{2\sigma-1} [f(x_0 - \nu h, y_0 - \mu k, z_0 - \sigma l) + f(x_0 - \overline{\nu-1}h, y_0 - \mu k, z_0 - \sigma l) + f(x_0 - \nu h, y_0 - \mu k, z_0 - \overline{\sigma-1}l) + f(x_0 - \overline{\nu-1}h, y_0 - \mu k, z_0 - \overline{\mu-1}l)] + \rho''_3,$$

unde

$$\rho_3'' = \frac{h^{2n+1}\, k^q\, l^r}{(2n+1)\,!} A_n^{(p)}(0) \frac{\partial^{2n+q+r+1} f(\xi, y_0\, z_0)}{\partial \xi^{2n+1} \partial y_0{}^q\, \partial z_0{}^r} +$$

$$+ \frac{h^p\, k^{2m}\, l^r}{(2m)\,!} D_{m-1}^{(q)}(0) \frac{\partial^{p+2m+r} f(x_0,\eta,z_0)}{\partial x_0{}^p\, \partial \eta^{2m} \partial z_0{}^r} +$$

$$+ \frac{h^p\, k^q\, l^{2s+1}}{(2s+1)\,!} E_{s-1}(0) \frac{\partial^{p+q+2s+1} f(x_0,y_0,\zeta)}{\partial x_0{}^p\, \partial y_0{}^q\, \partial \zeta^{2s+1}} -$$

$$- \frac{h^{2n+1}\, k^{2m}\, l^r}{(2n+1)\,!\,(2m)} A_n^{(p)}(0)\, D_{m-1}^{(q)}(0) \frac{\partial^{2n+2m+r+1} f(\xi,\eta,\, z_0)}{\partial \xi^{2n+1} \partial \eta^{2m}\, \partial z_0{}^r} -$$

$$- \frac{h^{2n+1}\, k^q\, l^{2s+1}}{(2n+1)\,!(2s+1)\,!} A_n^{(p)}(0)\, E_{s-1}^{(r)}(0) \frac{\partial^{2n+q+2s+2} f(\xi,y_0,\zeta)}{\partial \xi^{2n+1}\, \partial y_0{}^q\, \partial \zeta^{2s+1}} -$$

$$- \frac{h^p\, k^{2m}\, l^{2s+1}}{(2m)\,!\,(2s+1)\,!} D_{m-1}^{(q)}(0)\, E_{s-1}^{(r)}(0) \frac{\partial^{p+2m+2s+1} f(x_0,\eta,\zeta)}{\partial x_0{}^p\, \partial \eta^{2m} \partial \zeta^{2s+1}} +$$

$$+ \frac{h^{2n+1}\, k^{2m}\, l^{2s+1}}{(2n+1)\,!\,(2m)\,!\,(2s+1)} A_n^{(p)}(0)\, D_{m-1}^{(q)}(0)\, E_{s-1}^{(r)}(0) \frac{\partial^{2n+2m+2s+2} f(\xi,\eta,\zeta)}{\partial \xi^{2n+1} \partial \eta^{2m} \partial \zeta^{2s+1}}.$$

25. Din formulele care au fost date pînă aici se pot obține, în particular, o serie de formule explicite utile. Notăm că toate formulele răzlețe care sînt date în formularele lui G. S c h u l z [9] și D. I. P a n o v [10], se pot obține imediat din formulele noastre; pe de altă parte se pot obține și expresiile pentru resturi.

Să dăm cîteva exemple:

1° Făcînd în formula (59) $n = m = p = 2$ obținem

$$\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x_0{}^2} = \frac{\Delta_x^2 f(x_0-h,y_0)}{h^2} - \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 f(\xi,y_0)}{\partial \xi^4}$$

sau

$$\frac{\partial^2 f(x_0 y_0)}{\partial x_0^2} = \frac{1}{h^2}\,[f(x_0+h,\, y_0) - 2f(x_0,\, y_0) + f(x_0-h,\, y_0)] - \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 f(\xi,y_0)}{\partial \xi^4}.$$

Această formulă se poate vedea (fără rest) și în formularul lui D. I. P a n o v [10].

La fel se obține

$$\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y_0^2} = \frac{\Delta_y^2 f(x_0,y_0-k)}{k^2} - \frac{k^2}{12} \frac{\partial^4 f(x_0,\eta)}{\partial \eta^4}$$

sau

$$\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y_0^2} = \frac{1}{k^2}\,[f(x_0,\, y_0+k) - 2f(x_0,\, y_0) + f(x_0, y_0-k)] - \frac{k^2}{12} \frac{\partial^4 f(x_0,\eta)}{\partial \eta^4}.$$

2° Dacă se ia $h = k$ și se adună membru cu membru cele două formule date mai sus se găsește pentru laplacian expresia

$$\Delta f(x_0,\, y_0) = \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y_0^2} =$$

$$= \frac{1}{h^2}\left[\Delta_n^2 f(x_0-h,\, y_0) + \Delta_v^2 f(x_0,\, y_0-h)\right] - \frac{h^2}{12}\left[\frac{\partial^4 f(\xi,y_0)}{\partial \xi^4} + \frac{\partial^4 f(x_0,\eta)}{\partial \eta^4}\right]$$

sau dezvoltat

$$\Delta f(x_0, y_0) = \frac{1}{h^2}\,[f(x_0+h, y_0) + f(x_0, y_0+h) + f(x_0-h, y_0) +$$

$$f(x_0, y_0-h) - 4f(x_0,\, y_0)] - \frac{h^2}{12}\left[\frac{\partial^4 f(\xi,y_0)}{\partial \xi^4} + \frac{\partial^4 f(x_0,\eta)}{\partial \eta^4}\right].$$

Această formulă se poate vedea, însă fără o expresie precisă a restului, în formularul lui G. S c h u l z [9]*).

3° Pentru valorile particulare $n = m = p = q = 1$ se obține din (57) următoarea formulă

$$\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x_0 \partial y_0} = \frac{1}{4hk} \Delta_x\, \Delta_y\, [f(x_0-h,y_0-k) + f(x_0,\, y_0-k) +$$

$$+ f(x_0-h,\, y_0) + f(x_0,\, y_0)] + R,$$

sau

$$\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x_0 \partial y_0} = \frac{1}{4hk}\,[f(x_0+h,\, y_0+k) + f(x_0-h,\, y_0-k) -$$

$$- f(x_0-h,\, y_0+k) - f(x_0+h,\, y_0-k)] + R$$

unde

$$R = -\frac{h^2}{6} \frac{\partial^4 f(\xi,y_0)}{\partial \xi^3 \partial y_0} - \frac{k^2}{6} \frac{\partial^4 f(x_0,\eta)}{\partial x_0 \partial \eta^3} - \frac{h^2 k^2}{36} \frac{\partial^6 f(\xi,\eta)}{\partial \xi^3\, \partial \eta^3}.$$

Formula aceasta (fără rest) se poate găsi în [10].

4° Tot din formula (59), pentru $n = m = 3$ și $p = 4$, se obține

$$\frac{\partial^4 f(x_0,y_0)}{\partial x_0^4} = \frac{1}{h^4} \Delta_x^4 f(x_0-2h,\, y_0) - \frac{h^2}{6} \frac{\partial^6 f(\xi,y_0)}{\partial \xi^6}.$$

Analog se găsește

$$\frac{\partial^4 f(x_0,y_0)}{\partial y_0^4} = \frac{1}{k^4} \Delta_v^4 f(x_0,\, y_0-2k) - \frac{k^2}{6} \frac{\partial^6 f(x_0,\eta)}{\partial \eta^6}.$$

*) p. 133.

5° Din aceeași formulă, pentru $n = m = 3$ și $p = q = 2$ primim

$$\frac{\partial^4 f(x_0,y_0)}{\partial x_0^2 \partial y_0^2} = \frac{1}{h^2k^2}\Big[\Delta_x^2\,\Delta_y^2 f(x_0-h,\ y_0-k) - \frac{1}{12}\ \Delta_x^2\Delta_y^4 f(x_0-h,\ y_0-2k) -$$

$$-\frac{1}{12}\,\Delta_x^4\Delta_y^2 f(x_0-2h,\ y_0-k) + \frac{1}{144}\ \Delta_x^4\Delta_y^4 f(x_0-2h,\ y_0-2k)\Big] + R,$$

cu

$$R = \frac{h^4}{90}\,\frac{\partial^8 f(\xi,y_0)}{\partial \xi^6\,\partial y_0^2} + \frac{k^4}{90}\,\frac{\partial^8 f(x_0,\eta)}{\partial x_0^2\partial\eta^6} - \frac{h^4k^4}{90^2}\,\frac{\partial^{12} f(\xi,\eta)}{\partial\xi^6\partial\eta^6}.$$

În vederea rezolvării numerice a ecuației biarmonice este necesar să se dea o expresie aproximativă pentru

$$E = \frac{\partial^4 f(x_0,y_0)}{\partial x_0^4} + 2\,\frac{\partial^4 f(x_0 y_0)}{\partial x_0^2\partial y_0^2} + \frac{\partial^4 f(x_0,y_0)}{\partial y_0^4}.$$

Ținînd seama de rezultatele precedente se găsește că

$$E = \frac{1}{h^4}\,\Delta_x^4 f(x_0-2h,\ y_0) + \frac{1}{h^2k^2}\Big[2\,\Delta_x^2\,\Delta_y^2 f(x_0-h,\ y_0-k) -$$

$$-\frac{1}{6}\,\Delta_x^2\,\Delta_y^4 f(x_0-h,\ y_0-2k) - \frac{1}{6}\ \Delta_x^4\,\Delta_y^2 f(x_0-2h,\ y_0-k) +$$

$$+\frac{1}{72}\ \Delta_x^4\,\Delta_y^4 f(x_0-2h, y_0-2k)\Big] + \frac{1}{k^4}\,f(x_0,\ y_0-2k) + R.$$

Făcînd $h = k$ și dezvoltînd obținem

$$E = \frac{1}{72\,h^4}\Big\{(1764 f(x_0,y_0) - 768[f(x_0+h,\ y_0) + f(x_0,\ y_0+h) +$$

$$+ f(x_0-h,y_0) + f(x_0,\ y_0-h)] + 102[f(x_0+2h,y_0) + f(x_0-2h,\ y_0) + f(x_0,y_0+$$

$$+2h) + f(x_0,\ y_0-2h)] - 16[f(x_0+h,\ y_0+2h) + f(x_0+h,\ y_0-2h) +$$

$$+ f(x_0-h,\ y_0+2h) + f(x_0-h,\ y_0-2h) + f(x_0+2h,\ y_0+h) + f(x_0+$$

$$+2h,\ y_0-h) + f(x_0-2h,\ y_0+h) + f(x_0-2h,\ y_0-h)] + 256[f(x_0+$$

$$+h,\ y_0+h) + f(x_0+h,\ \ y_0-h) + f(x_0-h,\ \ y_0+h) + f(x_0-h, y_0-$$

$$-h)] + f(x_0+2h, y_0+2h) + f(x_0+2h, y_0-2h) + f(x_0-2h, y_0+2h) +$$

$$+ f(x_0-2h\ \ y_0-2h)\Big\} + R,$$

unde

$$R = -\frac{h^2}{6}\left(\frac{\partial^6 f(\xi_1, y_0)}{\partial\xi_1^6} + \frac{\partial^6 f(x_0,\eta_1)}{\partial\eta_1^6}\right) + \frac{h^4}{45}\left(\frac{\partial^8 f(\xi,y_0)}{\partial\xi^6\partial y_0^2} + \frac{\partial^8 f(x_0,\eta)}{\partial x_0^2\partial\eta^6}\right) -$$

$$-\frac{h^8}{4050}\ \frac{\partial^{12} f(\xi,\eta)}{\partial\xi^6\partial\eta^6}.$$

6° În cazul a trei variabile, pentru $n = m = s = 2$ se găsește următoarea expresie pentru laplacian

$$\Delta f(\ x_0,\ y_0,\ z_0) = \frac{\partial^2 f(x_0,y_0,z_0)}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2 f(x_0,y_0,z_0)}{\partial y_0^2} + \frac{\partial^2\ f(x_0,y_0,z_0)}{\partial z_0^2} =$$

$$= \frac{1}{h^2}\,[\,\Delta_x^2 f(x-h,\ y_0,\ z_0) + \Delta_y^2\ f(x_0,\ y_0-h,\ z_0) + \Delta_z^2\ f(x_0,\ y_0,\ z_0-h)] + \rho =$$

$$= \frac{1}{h^2}\,[f(x_0+h,y_0,z_0) + f(x_0-h,y_0,z_0) + f(x_0,y_0+h,\ z_0) + f(x_0,\ y_0-h,z_0) +$$

$$+ f(x_0,y_0,z_0+h) + f(x_0,y_0,z_0-h) - 8\,f(x_0,y_0,z_0)] + \rho,$$

unde

$$\rho = -\frac{h^2}{12}\left[\frac{\partial^4 f(\xi,y_0,z_0)}{\partial\xi^4} + \frac{\partial^4 f(x_0,\eta,z_0)}{\partial\eta^4} + \frac{\partial^4 f(x_0,y_0,\zeta)}{\partial\zeta^4}\right].$$

7° Pentru $n = m = s = p = q = r = 1$, din formula (62) se obține

$$\frac{\partial^3 f(x_0,y_0,z_0)}{\partial x_0\,\partial y_0\,\partial z_0} =$$

$$= \frac{1}{8\,hkl}\,[f(x_0+h,\ y_0+k,\ \ z_0+l) + f(x_0+h, y_0-k, z_0-l) +$$

$$+ f(x_0-h, y_0+k, z_0-l) + f(x_0-h,\ y_0-k, z_0+l) - f(x_0+h, y_0+k, z_0-l) -$$

$$- f(x_0-h, y_0+k, z_0+l) - f(x_0-h,\ \ y_0-k, z_0-l)] + \rho,$$

unde

$$\rho = -\frac{h^3\,k\,l}{6}\,\frac{\partial^5 f(\xi,y_0,z_0)}{\partial\xi^3\,\partial y_0\,\partial z_0} - \frac{h\,k^3\,l}{6}\,\frac{\partial^5 f(x_0,\eta,z_0)}{\partial x_0\,\partial\eta^3\,\partial z_0} -$$

$$-\frac{h\,k\,l^3}{6}\,\frac{\partial^5 f(x_0,y_0,\zeta)}{\partial x_0\,\partial y_0\,\partial\zeta^3} - \frac{h^3\,k^3\,l}{36}\,\frac{\partial^7 f(\xi,\eta,z_0)}{\partial\xi^3\,\partial\eta^3\,\partial z_0} -$$

$$-\frac{h^3\,k\,l^3}{36}\,\frac{\partial^7 f(\xi,y_0\zeta)}{\partial\xi^3\,\partial y_0\ \partial\zeta^3} - \frac{h\,k^3\,l^3}{36}\,\frac{\partial^7 f(x_0,\eta,\zeta)}{\partial x_0\,\partial\eta^3\,\partial\zeta^3} -$$

$$-\frac{h^3\ k^3\ l^3}{216}\,\frac{\partial^9 f(\xi,\eta,\zeta)}{\partial\xi^3\,\partial\eta^3\,\partial\zeta^3}.$$

К ЧАСТНОМУ ЧИСЛОВОМУ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЮ ФУНКЦИЙ ДВУХ И БОЛЕЕ ПЕРЕМЕННЫХ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

В § 1, после определения в общей форме понятия о формуле числового частного дифференцирования с частной степенью точности $(m_1, m_2, \ldots, m_s)$, приводятся некоторые общие соображения

В § 2 показываются, что остаток формулы числового частного дифференцирования (13) может быть представлен в форме (15) при условии, что координята t_0^i $(i = 1,2, \ldots, s)$ точки дифференцирования M_0 не является корнем уравнения

$$u_i^{(p_i)}(t^i) = 0, \quad \text{где} \quad u_i(t^i) = \prod_{j_k=1}^{n_i+1} (t^i - t_{j_k}^i)\ (i = 1,2, \ldots, s) \tag{a}$$

Подчеркивается, что неизвестные числа $\xi^1, \xi^2, \ldots \xi^s$, входящие в выражение (15) остатка, одинаковы во всех частных производных, в которых они фигурируют. Даются подробные доказательства для случая с тремя переменными, причем обобщается метод И. Ф. Стефенсена [4], дополненный С. Е. Микеладзе [2]. Для трех переменных общая формула числового частного дифференцирования дана в (33). Оценки, данные для остатка, справедливы и в том случае, когда вместо интерполяции одной фодмулы Ньютона (10) применяется формула Лагранжа. Результаты сохраняются и для кратных узлов. В № 10 указаны преимущества применения формул числового частного дифференцирования разделенными разностями.

В § 3 рассматривается частный случай узлов с равноудаленными координатами. В этом порядке получен ряд формул числового частного дифференцирования с обыкновенными разностями. Отмечаются здесь несколько формул типа Маркова. Интерполяционные формулы с центральными разностями для двух и трех переменных, а также и результаты, полученные в § 2, позволили дать много формул, которые могут быть полезны на практике для приближенного вычисления частных производных.

Для остаточного члена даны значения, содержащие минимальное число членов.

CONTRIBUTION À LA DÉRIVATION PARTIELLE NUMÉRIQUE DES FONCTIONS DE DEUX OU PLUSIEURS VARIABLES

(RÉSUMÉ)

Dans le § 1, après avoir défini, sous forme générale, la notion de formule de dérivation partielle numérique de degré partiel d'exactitude $(m_1, m_2, \ldots, m_s)$, l'auteur fait là-dessus quelques considérations générales.

Dans le § 2, on fait ressortir que le reste de la formule de dérivation partielle numérique (13) peut se mettre sous la forme (15), à condition que la coordonnée t_0^i $(i = 1,2, \ldots, s)$ du point de dérivation M_0 ne soit pas racine de l'équation

$$u_i^{(p_i)}(t\ ) = 0, \text{ où } u_i(t^i\ ) = \prod_{j_k=1}^{n_i+1} (t^i - t_{j_k}^i), \ (i = 1,2, \ldots, s). \tag{a}$$

On souligne que les nombres inconnus $\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^s$, qui interviennent dans l'expression (15) du reste sont les mêmes dans toutes les dérivées partielles dans lesquelles ils figurent. On donne une démonstration détaillé pour le cas de trois variables, généralisant une méthode de J. F. Steffensen [4] complétée par S. E. Mikéladzé [2]. Pour le cas de trois variables, la formule générale de dérivation partielle numérique a été donnée par (33). Les évaluations données pour le reste sont également valables si, au lieu de la formule d'interpolation de Newton (10), on emploie la formule de Lagrange. Les résultats données se mantiennent aussi dans le cas des nœuds multiples. Au n° 10, on a mis en évidence les avantages de l'utilisation des formules de dérivation partielle numérique aux différences divisées.

Dans le § 3, on a considéré le cas particulier des nœuds à coordonnées équidistantes. On a obtenu ainsi un certain nombre de formules de dérivations numérique partielle à différences ordinaires. A retenir de celles-ci plusieurs formules du type Markov. Les formules d'interpolation à differences centrales pour deux et trois variables, ainsi que les résultats obtenus au § 2 ont permis de donner plusieurs formules trouvant application dans le calcul approché des dérivées partielles.

Pour le reste, on a donné des évaluations contenant un nombre minimum de termes.

BIBLIOGRAFIE

1. T. Popoviciu, *Asupra restului în unele formule de derivare numerică.* Studii şi cercetări matematice t. III, 1952, nr. 1—2.
2. S. E. Mikeladze, *Cislennoe integrirovanie.* Uspehi Mat. nauk, 1948, t.III, fascicula 6.
3. — *Cislennîe metodî matematiceskogo analiza,* Moscova, 1953.
4. J. F. Steffensen, *Interpolation,* 1950.
5. G. D. Birkhoff, *General Mean Value and Remainder Theorems.* Trans. Amer. Math. Soc., 1906, t. 7, p. 107—136.
6. A. A. Markov, *Differenzenrechnung.* Leipzig, 1896.
7. E. Pflanz, *Zur Bestimmung finiter Ausdrücke für die gemischten partiellen Ableitungen von Functionen zweier Variabeln.* Jber. Deutsch. Math. Vereinig., 1939, t. 49, partea 1, 76—85.
8. L. Collatz, *Das Differenzenverfahren mit höherer Approximation für lineare Differentialgleichungen.* Schriften d. Math. Sem. u.d. Inst. f. angew. Math. d. Univ. Berlin, 1935, 3, t. 1.
9. G. Schulz, *Formelsammlung zur praktischen Mathematik.* Berlin, 1937.
10. D. I. Panov, *Spravocinik po cislennomu reşeniu differenţialnîh uravnenii v ciastnîh proizvodnîh.* Moscova-Leningrad, 1951.
11. D. D. Stancu, *Consideraţii asupra interpolării polinomiale a funcţiilor de mai multe variabile.* Buletinul Universităţii „V. Babeş" din Cluj, Seria ştiinţelor naturii, nr. 1—2, 1956 (sub tipar).