BULETIN ŞTIINŢIFIC
SECŢIA DE ŞTIINŢE MATEMATICE ŞI FIZICE
Tomul IX, nr. 2, 1957

(3.)

GENERALIZAREA UNOR FORMULE DE INTERPOLARE PENTRU FUNCŢIILE DE MAI MULTE VARIABILE ŞI UNELE CONSIDERAŢII ASUPRA FORMULEI DE INTEGRARE NUMERICĂ A LUI GAUSS

DE

D. D. STANCU

Comunicare prezentată de T. POPOVICIU, membru corespondent al Academiei R.P.R., în cadrul celui de-al IV-lea Congres al matematicienilor romîni din 27 mai—4 iunie 1956

I

1. Importanţa calculului aproximativ al unei funcţii, definite direct, prin proprietăţile ei, sau ca soluţie a unei anumite ecuaţii diferenţiale, este deosebit de mare în aplicaţiile tehnice.

Teoria interpolării polinomiale are un rol important în această direcţie. Utilizarea în mare măsură a polinoamelor de interpolare este justificată de structura analitică simplă a acestora, de posibilitatea întocmirii unor programe sistematice şi simple de calcul, precum şi de precizia suficient de bună la care ne conduc.

2. În cazul interpolării polinomiale a funcţiilor de mai multe variabile se întîlnesc însă dificultăţi destul de mari. Chiar dacă nodurile de interpolare sînt distincte s-ar putea întîmpla ca un anumit polinom de interpolare să nu existe sau să nu fie unic. Se arată însă uşor că dacă nodurile nu sînt situate pe o hipersuprafaţă de un ordin egal cu gradul polinomului de interpolare atunci existenţa şi unicitatea acestuia este asigurată.

Din punct de vedere practic este util să se dea anumite scheme concrete de noduri relativ la care polinomul de interpolare este perfect determinat şi în plus să se obţină pentru acesta o expresie efectivă comodă pentru aplicaţii, pentru calcule.

3. Vom căuta în cele ce urmează să dăm cîteva distribuţii mai generale de noduri decît cele care s-au folosit pînă acum, distribuţii care permit să se utilizeze o varietate mare de reţele de noduri.

4. Să ne ocupăm mai întîi de cazul a două variabile.

Fie $f(x, y)$ o funcție definită și mărgintă într-un anumit domeni D_2 din plan. Să presupunem că se cunosc valorile funcției $f(x, y)$ pe urm toarele puncte ale acestui domeniu

$$M_{ik}(x_i, y_{ik}), \quad (k = \overline{1, m_i}\,;\ i = \overline{1, n})\ ^{*)}\ . \qquad (1$$

Formula de interpolare a lui Lagrange relativă la variabila x funcției $f(x, y)$ pe șirul de valori

$$x_1, x_2, \ldots, x_n$$

se scrie sub forma

$$f(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \frac{u(x)}{(x - x_i)u'(x_i)}\, f(x_i, y) + u(x)\,[x, x_1, \ldots, x_n\,; f(x, y)], \qquad ($$

unde

$$u(x) = \prod_{i=1}^{n} (x - x_i), \qquad ($$

iar

$$[x_1, x_2, \ldots, x_n\,; f] = \sum_{i=1}^{n} \frac{f(x_i, y)}{u'(x_i)}$$

este diferența divizată de ordinul $n-1$ a funcției $f(x, y)$ pentru valori lui x : $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Dar funcția $\varphi_i(y) = f(x_i, y)$ se poate dezvolta de asemenea du aceeași formulă de interpolare folosind valorile

$$y_{i1}, y_{i2}, \ldots, y_{i, m_i}. \qquad ($$

Se obține

$$\varphi_i(y) = f(x_i, y) = \sum_{k=1}^{m_i} \frac{v_i(y)}{(y - y_{ik})\, v_i'(y_{ik})}\, f(x_i, y) + v_i(y)\,[y, y_{i1}, \ldots$$

$$\ldots, y_{i, m_i}\,; f(x_i, y)], \qquad ($$

unde

$$v_i(y) = \prod_{p=1}^{m_i} (y - y_{ip}).$$

Înlocuind această expresie a lui $f(x_i, y)$ în (2), găsim următoar formulă de interpolare

$$f(x, y) = L_2(x, y) + R_2(x, y), \qquad ($$

unde

$$L_2(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{m_i} \frac{u(x)}{(x - x_i)\, u'(x_i)}\; \frac{v_i(y)}{(y - y_{ik})\, v_i'(y_{ik})}\, f(x_i, y_{ik}) \qquad ($$

*) Prin $N = \overline{\alpha, \beta}$ vom înțelege că N ia succesiv valorile $\alpha, \alpha + 1, \ldots, \beta - 1, \beta$.

este polinomul de interpolare de grad minim care coincide cu funcția $f(x, y)$ pe nodurile (1), iar

$$R_2(x, y) = u(x)\,[x, x_1, \ldots, x_n\,; f(x, y)] + \sum_{i=1}^{n} l_i(x)\, v_i(y)\,[y, y_{i1}, \ldots$$

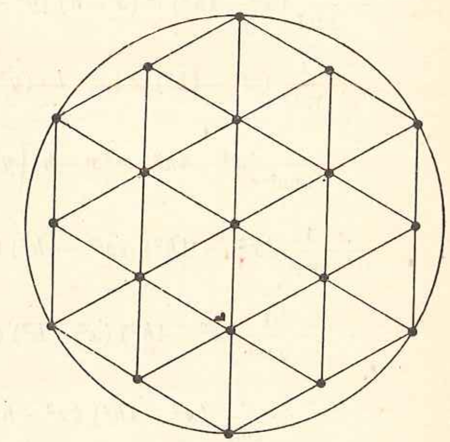
$$\ldots, y_{i, m_i}\,; f(x_i, y)], \qquad (9)$$

cu

$$l_i(x) = \frac{u(x)}{(x - x_i)\; u'(x_i)}, \qquad (10)$$

este restul acestei formule de interpolare.

5. Subliniem că formula de interpolare (7) este mult mai generală decît formula clasică de interpolare a lui Lagrange pentru două variabile, întrucît ordonatele (4) depind de abscisa x_i atît ca valoare cît și ca număr (ceea ce am specificat prin indici).



Formula cunoscută de interpolare a lui Lagrange se obține dacă facem următoarele particularizări

$$y_{ik} = y_k, \quad m_i = m \quad (i = \overline{1, n}). \quad (11)$$

6. Să dăm un exemplu. Presupunînd că

$$n = 5,\ m_1 = 3,\ m_2 = 4,\ m_3 = 5,\ m_4 = 4,\ m_5 = 3,$$

să scriem polinomul de interpolare pe nodurile

$$M_1(-2h, -h),\ M_2(-2h, 0),\ M_3(-2h, h),$$

$$M_4\left(-h, -\frac{3h}{2}\right),\ M_5\left(-h, -\frac{h}{2}\right),\ M_6\left(-h, \frac{h}{2}\right),\ M_7\left(-h, \frac{3h}{2}\right),$$

$$M_8(0, -2h),\ M_9(0, -h),\ M_{10}(0, 0),\ M_{11}(0, h),\ M_{12}(0, 2h),$$

$$M_{13}\left(h, -\frac{3h}{2}\right),\ M_{14}\left(h, -\frac{h}{2}\right),\ M_{15}\left(h, \frac{h}{2}\right),\ M_{16}\left(h, \frac{3h}{2}\right),$$

$$M_{17}(2h, -h),\ M_{18}(2h, 0),\ M_{19}(2h, h),$$

care sînt nodurile unei rețele exagonale (vezi figura).

Obținem

$$L(x,y) = \frac{1}{48h^6}(x^2-h^2)\,x\,(x-2h)\,y\,(y-h)\,f(-2h,-h) -$$

$$-\frac{1}{24h^6}(x^2-h^2)\,x\,(x-2h)\,(y^2-h^2)\,f(-2h,0) +$$

$$+\frac{1}{48h^6}(x^2-h^2)x\,(x-2h)\,(y+h)\,y\,f(-2h,h) +$$

$$+\frac{1}{36h^7}(x^2-4h^2)\,x\,(x-h)\left(y^2-\frac{h^2}{4}\right)\left(y-\frac{3h}{2}\right)f\left(-h,-\frac{3h}{2}\right) -$$

$$-\frac{1}{12h^7}(x^2-4h^2)\,x\,(x-h)\,\left(y^2-\frac{9h^2}{4}\right)\left(y-\frac{h}{2}\right)f\left(-h,-\frac{h}{2}\right) +$$

$$+\frac{1}{12h^7}(x^2-4h^2)\,x\,(x-h)\,\left(y^2-\frac{9h^2}{4}\right)\left(y+\frac{h}{2}\right)f\left(-h,\frac{h}{2}\right) -$$

$$-\frac{1}{36h^7}(x^2-4h^2)\,x\,(x-h)\left(y^2-\frac{h^2}{4}\right)\left(y+\frac{3h}{2}\right)f\left(-h,\frac{3h}{2}\right) +$$

$$+\frac{1}{96h^8}(x^2-4h^2)\,(x^2-h^2)\,(y^2-h^2)\,y\,(y-2h)\,f(0,-2h) -$$

$$-\frac{1}{24h^8}(x^2-4h^2)\,(x^2-h^2)\,(y^2-4h^2)\,y\,(y-h)\,f(0,-h) +$$

$$+\frac{1}{16h^8}(x^2-4h^2)\,(x^2-h^2)\,(y^2-4h^2)\,(y^2-h^2)\,f(0,0) -$$

$$-\frac{1}{24h^8}(x^2-4h^2)\,(x^2-h^2)\,(y^2-4h^2)\,(y+h)\,y\,f(0,h) +$$

$$+\frac{1}{96h^8}(x^2-4h^2)\,(x^2-h^2)\,(y+2h)\,(y^2-h^2)\,y\,f(0,2h) +$$

$$+\frac{1}{36h^7}(x^2-4h^2)\,(x+h)\,x\left(y^2-\frac{h^2}{4}\right)\left(y-\frac{3h}{2}\right)f\left(h,-\frac{3h}{2}\right) -$$

$$-\frac{1}{12h^7}(x^2-4h^2)\,(x+h)\,x\left(y^2-\frac{9h^2}{4}\right)\left(y-\frac{h}{2}\right)f\left(h,-\frac{h}{2}\right) +$$

$$+\frac{1}{12h^7}(x^2-4h^2)\,(x+h)\,x\left(y^2-\frac{9h^2}{4}\right)\left(y+\frac{h}{2}\right)f\left(h,\frac{h}{2}\right) -$$

$$-\frac{1}{36h^7}(x^2-4h^2)\,(x+h)\,x\left(y+\frac{3h}{2}\right)\left(y^2-\frac{h^2}{4}\right)f\left(h,\frac{3h}{2}\right) +$$

$$+\frac{1}{48h^6}(x+2h)\,(x^2-h^2)\,xy\,(y-h)\,f(2h,-h) -$$

$$-\frac{1}{24h^6}(x+2h)\,(x^2-h^2)\,x\,(y^2-h^2)\,f(2h,0) +$$

$$+\frac{1}{48h^6}(x+2h)\,(x^2-h^2)\,x\,(y+h)\,y\,f(2h,h).$$

7. În cazul a trei variabile, folosind nodurile

$$M_{ikj}(x_i, y_{ik}, z_{ikj}) \quad (i=\overline{1,n};\ k=\overline{1,m_i};\ j=\overline{1,p_{ik}}), \tag{12}$$

se obține formula de interpolare

$$f(x,y,z) = L_3(x,y,z) + R_3(x,y,z), \tag{13}$$

unde

$$L_3(x,y,z) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m_i}\sum_{j=1}^{p_{ik}} \frac{u(x)}{(x-x_i)\,u'(x_i)}\,\frac{v_i(y)}{(y-y_{ik})\,v_i'(y_{ik})}\,\frac{w_{ik}(z)}{(z-z_{ikj})\,w_{ik}'(z_{ikj})}\,f(x_i, y_{ik}, z_{ikj}) \tag{14}$$

este polinomul de interpolare de grad minim care coincide cu funcția $f(x,y,z)$ pe nodurile (12), iar restul are expresia

$$R_3(x,y,z) = u(x)\,[x, x_1, \ldots, x_n;\ f(x,y,z)] + \tag{15}$$

$$+\sum_{i=1}^{n} l_i(x)\,v_i(y)\,[y, y_{i1}, \ldots, y_{im_i};\ f(x_i, y, z)] +$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m_i} l_i(x)\,h_{ik}(y)\,w_{ik}(z)\,[z, z_{ik1}, \ldots, z_{ikp_{ik}};\ f(x_i, y_{ik}, z)].$$

Mai sus, alături de notațiile deja explicate, am mai folosit și următoarele

$$w_{ik}(z) = \prod_{s=1}^{p_{ik}}(z - z_{iks}),\quad h_{ik}(y) = \frac{v_i(y)}{(y-y_{ik})\,v_i'(y_{ik})}.$$

8. În cazul general, considerînd funcția

$$f(M) = f(t^1, t^2, \ldots, t^s)$$

efinită și mărginită într-un domeniu D_s al spațiului euclidian s-dimenional E_s și nodurile

$$M_{i_1 i_2 \ldots i_s} = M_{i_1 i_2 \ldots i_s}(t^1_{i_1}, t^2_{i_1 i_2}, \ldots, t^s_{i_1 i_2 \ldots i_s}) \tag{16}$$

$$(i_1 = \overline{1,n};\ i_2 = \overline{1,m_{i_1}};\ \ldots;\ i_s = \overline{1, m_{i_1 \ldots i_{s-1}}}),$$

în număr de

$$N = \sum_{i_1=1}^{n} \sum_{i_2=1}^{m_{i_1}} \cdots \sum_{i_{s-1}=1}^{m_{i_1 \ldots i_{s-2}}} m_{i_1 i_2 \ldots i_{s-1}},$$

se obține formula de interpolare

$$f(M) = L_s(M) + R_s(M), \tag{17}$$

unde

$$L_s(M) = \sum_{i_1=1}^{n} \sum_{i_2=1}^{m_{i_1}} \cdots \sum_{i_s=1}^{m_{i_1 \ldots i_{s-1}}} l^1_{i_1}(t^1) \ldots l^s_{i_1 \ldots i_s}(t^s) f(M_{i_1 \ldots i_s}), \tag{18}$$

cu

$$l^k_{i_1 i_2 \ldots i_k}(t^k) = \frac{u^k_{i_1 i_2 \ldots i_{k-1}}(t^k)}{(t^k - t^k_{i_1 \ldots i_k})\, u'^k_{i_1 \ldots i_{k-1}}(t^k_{i_1 \ldots i_k})}, \tag{19}$$

$$u^k_{i_1 i_2 \ldots i_{k-1}}(t^k) = \prod_{i_k=1}^{m_{i_1 \ldots i_{k-1}}} (t^k - t^k_{i_1 \ldots i_k}),$$

este polinomul de interpolare de grad minim care coincide cu funcția $f(M)$ pe nodurile (16)

Restul formulei de interpolare (17) are expresia

$$R_s(M) = \sum_{k=1}^{s} \sum_{i_1=1}^{n} \sum_{i_2=1}^{m_{i_1}} \cdots \sum_{i_{k-1}=1}^{m_{i_1 \ldots i_{k-2}}} l^1_{i_1}(t^1) \ldots l^{k-1}_{i_1 \ldots i_{k-1}}\, u^k_{i_1 \ldots i_{k-1}}(t^k)\, D^k_{i_1 \ldots i_{k-1}}$$

unde

$$D^k_{i_1 \ldots i_{k-1}} = [t^k, t^k_{i_1 \ldots i_{k-1} 1}, \ldots, t^k_{i_1 \ldots i_{k-1} m_k};\ \varphi_{i_1 \ldots i_{k-1}}],$$

iar

$$\varphi_{i_1 \ldots i_{k-1}} = f(t^1_{i_1}, t^2_{i_1 i_2}, \ldots, t^k_{i_1 \ldots i_{k-1}}, t^k, \ldots, t^s).$$

9. În cazul particular *)

$$n = m_1 + 1,\ m_{i_1} = m_2 + 1,\ \ldots,\ m_{i_1 \ldots i_{s-1}} = m_s + 1$$
$$(i_k = \overline{1, m_k};\ k = \overline{1, s})$$

polinomul de interpolare (18) are gradul $(m_1, m_2, \ldots, m_s)$.

Nodurile de interpolare corespunzătoare

$$P_{i_1 i_2 \ldots i_s}(t^1_{i_1}, t^2_{i_1 i_2}, \ldots, t^s_{i_1 i_2 \ldots i_s})$$
$$(i_k = \overline{1, m_k + 1};\ k = \overline{1, s})$$

vom spune că determină o pseudo-rețea de ordinul $(m_1, m_2, \ldots, m_s)$.

*) De care ne-am ocupat detaliat în lucrarea [1].

Coeficientul lui $(t^1)^{m_1} (t^2)^{m_2} \ldots (t^s)^{m_s}$ din polinomul de interpolare, care se obține în acest caz, este

$$\Delta^{m_1 m_2 \ldots m_s}(f) = \sum_{i_1=1}^{m_1+1} \cdots \sum_{i_s=1}^{m_s+1} \frac{f(P_{i_1 i_2 \ldots i_s})}{\prod_{k=1}^{s} v'^k_{i_1 i_2 \ldots i_{k-1}}(t^k_{i_1 i_2 \ldots i_k})}, \tag{21}$$

unde

$$v^k_{i_1 i_2 \ldots i_{k-1}}(t^k) = \prod_{i_k=1}^{m_k+1} (t^k - t^k_{i_1 i_2 \ldots i_k}).$$

Expresia (21) o vom numi diferența divizată parțială de ordinul $(m_1, m_2, \ldots, m_s)$ a funcției $f(M)$ pe punctele (20).

Menționăm cu acest prilej următoarea formulă care permite să se vadă care este structura acestei diferențe divizate parțiale

$$\Delta^{m_1 m_2 \ldots m_s}(f) =$$

$$= [t^1_1 \ldots, t^1_{m_1+1};\ \sum_{i_1=1}^{m_1+1} l^1_{i_1}(t^1)\, [t^2_{i_1 1}, \ldots, t^2_{i_1 m_2+1};\ \ldots \tag{22}$$

$$\ldots;\ \sum_{i_{s-1}=1}^{m_{s-1}+1} l^{s-1}_{i_1 \ldots i_{s-1}}(t^{s-1})\, [t^s_{i_1 \ldots i_{s-1} 1} \ldots t^s_{i_1 \ldots i_{s-1} m_s+1};\ f(M)] \ldots]].$$

10. Dacă în continuare particularizăm pseudo-rețeaua precedentă astfel ca să se reducă la așa denumita rețea Marchaud *) de ordinul $(m_1, m_2, \ldots, m_s)$, determinată de nodurile

$$Q_{i_1 i_2 \ldots i_s}(t^1_{i_1}, t^2_{i_2}, \ldots, t^s_{i_s}) \quad (i_k = \overline{1, m_k + 1};\ k = \overline{1, s}), \tag{23}$$

rezultatele precedente se simplifică mult.

Polinomul de interpolare (18) se reduce la bine cunoscutul **) polinom de interpolare al lui Lagrange pentru s variabile.

În acest caz diferența divizată parțială (21) ia forma

$$D^{m_1 m_2 \ldots m_s}(f) =$$

$$\left[\begin{matrix} t^1_1, t^1_2, \ldots, t^1_{m_1+1} \\ t^2_1, t^2_2, \ldots, t^2_{m_2+1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ t^s_1, t^s_2, \ldots, t^s_{m_s+1} \end{matrix} ;\ f \right] = \sum_{i_1=1}^{m_1+1} \cdots \sum_{i_s=1}^{m_s+1} \frac{f(t^1_{i_1}, t^2_{i_2}, \ldots, t^s_{i_s})}{\prod_{k=1}^{s} \omega'^k(t^k_{i_k})}, \tag{24}$$

unde

$$\omega^k(t^k) = \prod_{i_k=1}^{m_k+1} (t^k - t^k_{i_k}).$$

*) După numele lui A. Marchaud [2].
**) A se vedea de exemplu: D. L. Berman [3].

Formula (22) se simplifică foarte mult:

$$D^{m_1 m_2 \dots m_s}(f) =$$
$$=[t_1^1, \dots, t_{m_1+1}^1; [t_1^2, \dots, t_{m_2+1}^2; [t_1^s, \dots, t_{m_s+1}^s; f] \dots]].$$

Aceasta ne spune că în cazul unei rețele Marchaud o diferență diviz parțială de ordinul $(m_1, m_2, \dots, m_s)$ este o suprapunere de s difere divizate de o variabilă, ordinea de suprapunere fiind oarecare.

11. Relativ la diferența divizată parțială (24) vom da cîteva forn de medie utile pentru stabilirea structurii restului multor formule aproximare.

O primă formulă de medie este

$$\left[\begin{matrix} t_1^1, t_2^1, \dots, t_{m_1+1}^1 \\ t_1^2, t_2^2, \dots, t_{m_2+1}^2 \\ \dots\dots\dots\dots \\ t_1^s, t_2^s, \dots, t_{ms+1}^s \end{matrix}; f\right] = \frac{1}{m_1!\, m_2! \dots m_s!} \frac{\partial^{m_1 + \dots + m_s} f(\xi^1, \dots, \xi^s)}{\partial(\xi^1)^{m_1} \dots \partial(\xi^s)^{m_s}},$$

unde ξ^i este cuprins în cel mai mic interval care conține numerele $t_2^i, \dots, t_{m_i+1}^i$.

Această formulă, pentru cazul $s = 2$, se poate vedea în [4].

12. Să considerăm s numere naturale $p_1, p_2, \dots, p_s$ astfel ca

$$1 \leqq p_i \leqq m_i + 2, \ (i = \overline{1, s}).$$

Ținînd seama de formula (24) se verifică ușor că avem

$$\left[\begin{matrix} t_1^1, \dots, t_{m_1+2}^1 \\ t_1^2, \dots, t_{m_2+2}^2 \\ \dots\dots\dots \\ t_1^s, \dots, t_{m_s+2}^s \end{matrix}; \prod_{i=1}^{s} (t^i - t_{p_i}^i) f(M)\right] =$$

$$= \left[\begin{matrix} t_1^1, \dots, t_{p_1-1}^1, t_{p_1+1}^1, \dots, t_{m_1+2}^1 \\ t_1^2, \dots, t_{p_2-1}^2, t_{p_2+1}^2, \dots, t_{m_2+2}^2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ t_1^s, \dots, t_{p_s-1}^s, t_{p_s+1}^s, \dots, t_{m_s+2}^s \end{matrix}; f(M)\right].$$

Folosind identitățile

$$t^i - t_{p_i}^i = \frac{(t_{p_i}^i - t_1^i)(t^i - t_{m_i+2}^i) + (t_{m_i+2}^i - t_{p_i}^i)(t^i - t_1^i)}{t_{m_i+2}^i - t_1^i},$$

formula precedentă ne va conduce la formula de medie

$$\left[\begin{matrix} t_1^1, \dots, t_{p_1-1}^1, t_{p_1+1}^1, \dots, t_{m_1+2}^1 \\ t_1^2, \dots, t_{p_2-1}^1, t_{p_2+1}^2, \dots, t_{m_2+2}^2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ t_1^s, \dots, t_{p_s-1}^s, t_{p_s+1}^s, \dots, t_{p_s+2}^s \end{matrix}; f(M)\right] =$$

$$= \frac{1}{\prod\limits_{i=1}^{s} (t_{m_i+2}^i - t_1^i)} \sum_{j_1=1}^{2} \dots \sum_{j_s=1}^{2} A_{j_1}^1 \dots A_{j_s}^s D_{j_1 j_2 \dots j_s}^{m_1 m_2 \dots m_s},$$

unde

$$A_1^k = t_{p_k}^k - t_1^k, \ A_2^k = t_{m_k+2}^k - t_{p_k}^k,$$

iar

$$D_{j_1 j_2 \dots j_s}^{m_1 m_2 \dots m_s} = \left[\begin{matrix} t_{j_1}^1, t_{j_1+1}^1, \dots, t_{j_1+m_1}^1 \\ t_{j_2}^2, t_{j_2+1}^2, \dots, t_{j_2+m_2}^2 \\ \dots\dots\dots \\ t_{j_s}^s, t_{j_s+1}^s, \dots, t_{j_s+m_s}^s \end{matrix}; f(M)\right].$$

De exemplu în cazul $s = 2$ această formulă de medie se scrie

$$\left[\begin{matrix} x_1, \dots, x_{p-1}, x_{p+1}, \dots, x_{n+2} \\ y_1, \dots, y_{q-1}, y_{q+1}, \dots, y_{m+2} \end{matrix}; f(x, y)\right] =$$

$$= \frac{1}{(x_{n+2} - x_1)(y_{m+2} - y_1)} \left\{ (x_p - x_1)(y_q - y_1) \left[\begin{matrix} x_1, \dots, x_{n+1} \\ y_1, \dots, y_{m+1} \end{matrix}; f\right] + \right.$$

$$+ (x_{n+2} - x_p)(y_q - y_1) \left[\begin{matrix} x_2, \dots, x_{n+2} \\ y_1, \dots, y_{m+1} \end{matrix}; f\right] +$$

$$+ (x_p - x_1)(y_{m+2} - y_1) \left[\begin{matrix} x_1, \dots, x_{n+1} \\ y_2, \dots, y_{m+2} \end{matrix}; f\right] +$$

$$\left. + (x_{n+2} - x_p)(y_{m+2} - y_q) \left[\begin{matrix} x_2, \dots, x_{n+2} \\ y_2, \dots, y_{m+2} \end{matrix}; f\right] \right\}.$$

13. Ținînd seama de formula (25), se poate extinde imediat, la s variabile, o importantă teoremă de medie dată, în cazul unidimensional, de prof. T. Popoviciu [5], [6].

Considerînd următorul sistem de $N = m_1 m_2 \dots m_s$ puncte

$$P_{i_1 i_2 \dots i_s}(t_{i_1}^1, t_{i_2}^2, \dots, t_{i_s}^s) \ (i_k = \overline{1, m_k}; \ k = \overline{1, s}) \tag{27}$$

și presupunînd că

$$t_1^r < t_2^r < \dots < t_{m_r}^r, \ m_r \geqslant n_r + 2 \ (r = \overline{1, s}),$$

orice diferență divizată parțială de ordinul $(n_1 + 1, n_2 + 1, \ldots, n_s +$
pe $N = \prod_{k+1}^{s} (n_k + 1)$ puncte, din cele de la (27), este o medie aritme
(generalizată) de felul următor :

$$\begin{bmatrix} t^1_{i_{1,1}}, & t^1_{i_{1,2}}, & \ldots, & t^1_{i_{1,n_1+2}} \\ t^2_{i_{2,1}}, & t^2_{i_{2,2}}, & \ldots, & t^2_{i_{2,n_2+2}} & ; f\,(M) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ t^s_{i_{s,1}}, & t^s_{i_{s,2}}, & \ldots, & t^s_{i_{s,n_s+2}} \end{bmatrix} =$$

$$= \sum_{j_1=1}^{m_1-n_1-1} \cdots \sum_{j_s=1}^{m_s-n_s-1} C_{j_1 j_2 \ldots j_s} \begin{bmatrix} t^1_{j_1}, & t^1_{j_1+1}, & \ldots, & t^1_{j_1+n_1+1} \\ t^2_{j_2}, & t^2_{j_2+1}, & \ldots, & t^2_{j_2+n_2+1} & ; f\,(M) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ t^s_{j_s}, & t^s_{j_s+1}, & \ldots, & t^s_{j_s+n_s+1} \end{bmatrix},$$

unde coeficienții

$$C_{j_1 j_2 \ldots j_s} \geqq 0 \ (j_k = \overline{1, m_k - n_k - 1}\ ;\ k = \overline{1, s})$$

sînt independenți de funcția $f\,(M)$ și

$$\sum_{j_1=1}^{m_1-n_1-1} \cdots \sum_{j_s=1}^{m_s-n_s-1} C_{j_1 j_2 \ldots j_s} = 1,$$

iar

$$1 = i_{p,1} < i_{p,2} < \ldots < i_{p,n_p+2} = m_p \qquad (p = 1, 2, \ldots, s).$$

14. În cazul particular al nodurilor (23) restul formulei (17)
poate exprima cu ajutorul diferențelor divizate parțiale *).

Pe baza formulei (25) și teoremelor de medie pe care le-am
se poate arăta **) că restul acesta se poate exprima, bineînțeles în ipot
că funcția $f\,(M)$ e derivabilă parțial de un număr suficient de ori,
forma

$$R_s\,(M) = \sum \frac{u^1\,(t^1)}{(m_1+1)\,!} \frac{\partial^{m_1+1} f\,(\xi^1, t^2, \ldots t^s)}{\partial\,(\xi^1)^{m_1+1}} -$$

$$- \sum \frac{u^1\,(t^1)\, u^2\,(t^2)}{(m_1+1)\,!\,(m_2+1)\,!} \frac{\partial^{m_1+m_2+2} f\,(\xi^1, \xi^2, t^3, \ldots, t^s)}{\partial\,(\xi^1)^{m_1+1}\,\partial\,(\xi^2)^{m_2+1}} +$$

$$+ \sum \frac{u^1\,(t^1)\, u^2\,(t^2)\, u^3\,(t^3)}{(m_1+1)\,!\,(m_2+1)\,!\,(m_3+1)\,!} \frac{\partial^{m_1+m_2+m_3+3} f\,(\xi^1, \xi^2, \xi^3, t^4, \ldots, t^s)}{\partial\,(\xi^1)^{m_1+1}\,\partial\,(\xi^2)^{m_2+1}\,\partial\,(\xi^3)^{m_3+1}} -$$

$$- \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

$$+ (-1)^s \prod_{i=1}^{s} \frac{u^i\,(t^i)}{(m_i+1)\,!} \frac{\partial^{m_1+\ldots+m_s+s} f\,(\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^s)}{\partial\,(\xi^1)^{m_1+1} \ldots \partial\,(\xi^s)^{m_s+1}},$$

*) Vezi J. F. Steffensen [4].
**) Demonstrația am dat-o în lucrarea [1].

unde ξ^i e cuprins în cel mai mic interval care conține numerele t^i,
$t^i_1, \ldots, t^i_{m_i+1}$.

Menționăm că numerele $\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^s$ sînt aceleași în toate deriva-
ele parțiale care intervin.

Dacă se aplică fiecărei diferențe divizate parțiale, care intervine în
xpresia restului, doar formula de medie (26), cum au făcut unii autori
n cazul $s = 2$, atunci nu se poate obține acest rezultat, care pare să fie
important atît din punct de vedere teoretic cît și practic.

II

15. În această parte a lucrării ne vom ocupa de formulele de inte-
rare numerică de tip Gauss, folosind formulele de interpolare care sînt
efinite pe distribuția particulară de noduri de la (23).

Mai întîi vom face o observație asupra formulei de cvadratură a
ui Gauss.

16. Să considerăm polinomul de interpolare al lui Lagrange-Her-
nite de gradul $2n-1$:

$$L(x) = L\,(x_1, x_1, x_2, x_2, \ldots, x_n, x_n\,;\ f \mid x) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} h_i\,(x)\, f\,(x_i) + \sum_{i=1}^{n} k_i\,(x)\, f'\,(x_i), \qquad (29)$$

nde

$$h_i\,(x) = \left(1 - \frac{\omega''\,(x_i)}{\omega'\,(x_i)}\,(x - x_i)\right) l_i^2\,(x),\ k_i\,(x) = (x - x_i)\, l_i^2\,(x),$$

ar

$$\omega\,(x) = \prod_{i=1}^{n} (x - x_i),\ l_i\,(x) = \frac{\omega\,(x)}{(x - x_i)\,\omega'\,(x_i)}.$$

A. Markov [7] a observat că dacă se aleg nodurile $x_1, x_2, \ldots, x_n$
ocmai rădăcinile polinomului lui Legendre

$$P_n\,(x) = C_n \frac{d^n}{dx^n}\,(x^2 - 1)^n, \qquad (30)$$

tunci în formula de cvadratură

$$\int_{-1}^{+1} f\,(x)\, dx \approx \int_{-1}^{+1} L\,(x)\, dx = \sum_{i=1}^{n} A_i\, f\,(x_i) + \sum_{i=1}^{n} B_i\, f'\,(x_i) \qquad (31)$$

ispar coeficienții B_i și se ajunge la formula de cvadratură a lui Gauss

$$\int_{-1}^{+1} f\,(x)\, dx = \sum_{i=1}^{n} A_i\, f\,(x_i), \qquad (32)$$

alabilă pentru orice polinom $f\,(x)$ de grad cel mult $2n-1$.

Această observație i-a permis lui A. A. M a r k o v să stabilea expresia restului acestei formule de cvadratură în cazul cînd $f(x)$ est funcție oarecare derivabilă de $2n$ ori.

17. Noi vom arăta că această situație are loc și în cazuri ceva generale.

Să considerăm numerele distincte x_i, λ_j $(i = \overline{1, n}$; $j = \overline{1, k})$. Form de interpolare a lui Lagrange relativă la aceste noduri și o funcție oa care $f(x)$ se scrie

$$f(x) = L(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_k; f \mid x) + R(x),$$

unde

$$R(x) = Q_n(x) S_k(x) [x, x_1, \ldots, x_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_k; f],$$

$$Q_n(x) = \prod_{i=1}^{n} (x - x_i), \quad S_k(x) = \prod_{i=1}^{k} (x - \lambda_i).$$

Folosind formula de interpolare (33) la calculul integralei *)

$$I_1 = \int_{-1}^{+1} f(x)\, dx,$$

se ajunge la formula de cvadratură

$$\int_{-1}^{+1} f(x)\, dx = \sum_{i=1}^{n} A_i f(x_i) + \sum_{j=1}^{k} B_j f(\lambda_j) + \int_{-1}^{+1} R(x)\, dx.$$

De remarcat că dacă se ia $Q_n(x) \equiv P_n(x)$, adică dacă nod $x_1, x_2, \ldots, x_n$ se aleg tocmai rădăcinile polinomului lui Legendre (iar $k \leqq n$, atunci avem de asemenea

$$B_j = 0 \quad (j = \overline{1, k})$$

și, se obține, oricare ar fi $k \leqq n$, formula de integrare numerică lui Gauss.

Într-adevăr, dacă în formula (37) se înlocuiește $f(x)$ cu

$$\varphi(x) = P_n(x) \frac{S_k(x)}{(x - \lambda_j) S_k'(\lambda_j)},$$

se obține

$$\int_{-1}^{+1} \varphi(x) dx = B_j P_n(\lambda_j) + \int_{-1}^{+1} P_n(x) S_k(x) [x, x_1, \ldots, x_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_k; \varphi(x)]$$

*) În cele ce urmează vom folosi intervalul de integrare $[-1, +1]$; formulele ca obțin se pot transcrie imediat pentru un interval oarecare $[a, b]$ făcînd schimbarea de vari $x = \frac{b-a}{2} y + \frac{b+a}{2}$.

Dar

$$\int_{-1}^{+1} \varphi(x)\, dx = \int_{-1}^{+1} P_n(x) \frac{S_k(x)}{(x - \lambda_j) S_k'(\lambda_j)}\, dx = 0$$

și

$$[x, x_1, \ldots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k; \varphi(x)] \equiv 0, \tag{38}$$

căci $\varphi(x)$ este un polinom de gradul $n + k - 1$ iar diferența divizată (38) are ordinul $n + k$.

Întrucît $P_n(\lambda_j) \neq 0$, rezultă că

$$B_j = 0 \quad (j = \overline{1, n})$$

și formula de cvadratură (37) se reduce la

$$\int_{-1}^{+1} f(x)\, dx = A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2) + \ldots + A_n f(x_n) + \rho, \tag{39}$$

unde

$$\rho = \int_{-1}^{+1} R(x)\, dx. \tag{40}$$

Pentru a determina coeficienții $A_1, A_2, \ldots, A_n$ să facem în formula (39)

$$f(x) = \frac{P_n(x)}{(x - x_i) P_n'(x_i)}, \quad (i = \overline{1, n}); \tag{41}$$

se obține imediat

$$A_i = \int_{-1}^{+1} \frac{P_n(x)\, dx}{(x - x_i) P_n'(x_i)}, \quad (i = \overline{1, n}). \tag{42}$$

18. Avînd în vedere că oricare ar fi polinomul $S_k(x)$ de gradul $k \leq n$, avem

$$S_k(x) = C P_n(x) + \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{P_n(x)}{(x - x_\alpha) P_n'(x_\alpha)} S_k(x_\alpha), \tag{43}$$

unde $C \neq 0$ dacă $k = n$ și $C = 0$ dacă $k < n$, atunci polinomul de interpolare

$$L(x) = L(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k; f|x) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{P_n(x) S_k(x)}{(x - x_i) P_n'(x_i) S_k(x_i)} f(x_i) + \sum_{j=1}^{k} \frac{P_n(x) S_k(x)}{(x - \lambda_j) P_n(\lambda_j) S_k'(\lambda_j)} f(\lambda_j),$$

se va putea pune sub forma

$$L(x) = C \sum_{i=1}^{n} P_n(x) \frac{P_n(x)}{(x - x_i) P_n'(x_i) S_k(x_i)} f(x_i) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{P_n(x)}{(x - x_i) P_n'(x_i)} \frac{P_n(x)}{(x - x_\alpha) P_n'(x_\alpha)} \frac{S_k(x_\alpha)}{S_k(x_i)} f(x_i) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{k} P_n(x) \frac{S_k(x) f(\lambda_j)}{(x - \lambda_j) P_n(\lambda_j) S_k'(\lambda_j)}.$$

Integrînd găsim că

$$\int_{-1}^{+1} L(x)\, dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{-1}^{+1} \left(\frac{P_n(x)}{(x - x_i) P_n'(x_i)} \right)^2 f(x_i)\, dx.$$

Deci coeficienții formulei de cvadratură (39) se mai pot exprima pr formula

$$A_i = \int_{-1}^{+1} \left(\frac{P_n(x)}{(x - x_i) P_n'(x_i)} \right)^2 dx \quad (i = \overline{1, n}) \qquad (4$$

care ne arată că formula de cvadratură (39) are toți coeficienții poziti Acest rezultat se datorește lui Stieltjes [8].

Formula (39) este formula de integrare numerică a lui Gauss.

Pentru coeficienții acestei formule se pot da de asemenea, cum arătat Christoffel [9], și următoarele expresii simple

$$A_i = \frac{2}{(1 - x_i^2)\left[P_n'(x_i)\right]^2} \quad (i = \overline{1, n}). \qquad (4$$

Afară de aceasta, dacă se ține seama că între rădăcinile polinomului Legendre există relația $x_i = -x_{n-i+1}$, se deduce imediat *) că avem asemenea

$$A_i = A_{n-i+1} \quad (i = \overline{1, n}). \qquad (4$$

Formula de cvadratură a lui Gauss are, după cum bine se știe, gra de exactitate $2n-1$.

Dacă se ia $k = n$, restul (40) devine **)

$$\rho = \frac{n!}{[(2n)!]^2} \int_{-1}^{+1} S_n(x) \left[(x^2 - 1)^n\right]^n f^{(2n)}(\xi)\, dx. \qquad (4$$

Aici ξ este cuprins în cel mai mic interval care conține valo $x, x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

*) Vezi de exemplu [10].

**) Coeficientul lui x^n din $P_n(x)$ trebuie să fie egal cu 1, cum se vede din (35), din motiv în (30) am ales $C_n = (n!) : (2n)!$

19. Mai sus am presupus că numerele $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ sînt distincte și diferite de rădăcinile lui $P_n(x)$ *).

Să presupunem acum că numerele $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$, nu sînt în general distincte și anume: λ_j are ordinul de multiplicitate r_j, unde $j = \overline{1, s}$ iar $r_1 + r_2 + \ldots + r_s = k \leqq n$.

Să scriem expresia polinomului de interpolare al lui Lagrange-Hermite **), pe nodurile reprezentate de rădăcinile polinomului

$$\omega(x) = \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{s} (x - x_i)(x - \lambda_j)^{r_j}. \qquad (48)$$

Avem

$$L_H(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\omega(x)}{(x - x_i)\, \omega'(x_i)} f(x_i) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=0}^{r_i-1} \sum_{k=0}^{r_i-j-1} \frac{\omega(x)}{(x - \lambda_i)^{r_i}} \left\{ \frac{(x - \lambda_i)^j}{j!} \left[\frac{(x - \lambda_i)^k}{k!} \left(\frac{(x - \lambda_i)^{r_i}}{\omega(x)} \right)_{\lambda_i}^{(k)} \right] f^{(j)}(\lambda_i) \right\}. \qquad (49)$$

În formula de interpolare

$$f(x) = L_H(x) + R(x) \qquad (49')$$

restul are expresia

$$R(x) = \omega(x)\, [x, x_1, \ldots, x_n, \underbrace{\lambda_1, \ldots, \lambda_1}_{r_1}, \ldots, \underbrace{\lambda_s, \ldots, \lambda_s}_{r_s}; f]. \qquad (50)$$

Folosind formula (49) pentru calculul integralei (36) se ajunge la o formulă de cvadratură de forma

$$\int_{-1}^{+1} f(x)\, dx = \sum_{i=1}^{n} A_i f(x_i) + \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=0}^{r_i-1} B_{ij} f^{(j)}(\lambda_i) + \rho, \qquad (51)$$

unde

$$\rho = \int_{-1}^{+1} R(x)\, dx.$$

Dacă $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sînt rădăcinile polinomului lui Legendre $P_n(x)$, atunci, ținînd seama de (49), se observă că

$$A_i = \int_{-1}^{+1} \frac{\omega(x)\, dx}{(x - x_i)\, \omega'(x_i)}, \quad (i = \overline{1, n}), \qquad (52)$$

iar

$$B_{ij} = 0 \quad (j = \overline{1, r_i - 1};\ i = \overline{1, s}),$$

*) Dacă $S_n(x) \equiv P_n(x)$ se dă peste cazul lui A. A. Markov [7].

**) Expresia explicită a polinomului lui Lagrange-Hermite se poate vedea de exemplu în [11].

oricare ar fi rădăcinile polinomului de gradul $k \leqq n$

$$S_k^{\cdot}(x) = \prod_{j=1}^{s} (x - \lambda_j)^{r_j}. \quad (53)$$

Ținînd seama de notațiile introduse, polinomul (48) se scrie

$$\omega(x) = P_n(x)\, S_k^{\cdot}(x).$$

Avînd în vedere că oricare ar fi polinomul $S_k^{\cdot}(x)$, de gradul $k \leqq n$, el se poate pune sub forma (43), se găsește, ca și la punctul 18, expresi[a] (44) pentru coeficienții A_i ai formulei de cvadratură (51).

În definitiv constatăm că și în cazul de care ne-am ocupat în ace[st] aliniat se ajunge la formula de cvadratură a lui Gauss *)

$$\int_{-1}^{+1} f(x)\, dx = \sum_{i=1}^{n} A_i f(x_i) + \rho. \quad (54)$$

Luînd $k = n$, restul acestei formule va fi

$$\rho = \int_{-1}^{+1} P_n(x)\, S_n(x)\, [x, x_1, \ldots, x_n, \underbrace{\lambda_1, \ldots, \lambda_1}_{r_1}, \ldots, \underbrace{\lambda_s, \ldots, \lambda_s}_{r_s}; f]\, dx =$$

$$= \frac{1}{(2n)!} \int_{-1}^{+1} P_n(x)\, S_n(x)\, f^{(2n)}(\xi)\, dx =$$

$$= \frac{n!}{[(2n)!]^2} \int_{-1}^{+1} S_n(x)\, [(x^2-1)^n]^{(n)}\, f^{(2n)}(\xi)\, dx. \quad (55)$$

20. Considerațiile precedente se pot face și asupra integralelo[r] multiple. Să ne ocupăm, pentru ușurarea expunerii, de cazul integralelo[r] duble.

Ne propunem să stabilim o formulă de cubatură cu un număr mini[m] de termeni pentru integrala dublă

$$I_2 = \iint_D f(x, y)\, dx\, dy, \quad (56)$$

unde D este patratul

$$-1 \leqq x \leqq 1, \quad -1 \leqq y \leqq 1.$$

Să considerăm formula de interpolare

$$f(x, y) = L(x, y) + R(x, y), \quad (57)$$

unde

$$L(x, y) = L\begin{pmatrix} x_1, \ldots, x_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_r \\ y_1, \ldots, y_m, \beta_1, \ldots, \beta_s \end{pmatrix}; f \left| \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \right), \quad (58)$$

*) Într-o nouă lucrare [12] am dat o importantă generalizare acestei formule clasice [a] lui Gauss.

iar

$$R(x, y) = u(x)\,[x, x_1, \ldots, x_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_r; f] + v(y)\,[y, y_1, \ldots, y_m, \beta_1, \ldots, \beta_s; f] -$$

$$- u(x)\, v(y) \begin{bmatrix} x, x_1, \ldots, x_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_r \\ y, y_1, \ldots, y_m, \beta_1, \ldots, \beta_s \end{bmatrix}; f \Bigg], \quad (59)$$

în care

$$u(x) = \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=0}^{r} (x - x_j)(x - \alpha_i) \qquad (r \leqslant n;\ s \leqslant m). \quad (60)$$
$$v(y) = \prod_{i=1}^{m} \prod_{j=1}^{s} (y - y_i)(y - \beta_i)$$

Folosind formula de interpolare (57) pentru calculul integralei (56) se obține o formulă de cubatură de forma

$$\iint_D f(x, y)\, dx\, dy = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} A_{ik} f(x_i, y_k) + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{s} B_{ij} f(x_i, \beta_j) +$$

$$+ \sum_{l=1}^{r} \sum_{k=1}^{m} C_{lk} f(\alpha_l, y_k) + \sum_{l=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} D_{lj} f(\alpha_l, \beta_j) + \rho, \quad (61)$$

unde

$$\rho = \iint_D R(x, y)\, dx\, dy. \quad (62)$$

Dacă se aleg numerele

$$x_1, x_2, \ldots, x_n;\ y_1, y_2, \ldots, y_m$$

astfel încît ele să fie respectiv rădăcinile polinoamelor lui Legendre $P_n(x)$, $P_m(y)$ și notăm

$$E_r(x) = \prod_{i=1}^{r} (x - \alpha_i), \quad F_s(y) = \prod_{k=1}^{s} (y - \beta_k), \quad (63)$$

se constată că

$$B_{ij} = 0,\ C_{lk} = 0,\ D_{lj} = 0, \quad (64)$$

$$(i = \overline{1, n};\ k = \overline{1, m};\ l = \overline{1, r};\ j = \overline{1, s}).$$

Coeficienții rămași au expresiile

$$A_{ik} = \frac{1}{P_n'(x_i) P_m'(y_k)\, E_r(x_i) F_s(y_k)} \iint_D \frac{P_n(x) E_r(x) P_m(y) F_s(y)}{(x - x_i)(y - y_k)}\, dx\, dy.$$

Întrucît oricare ar fi polinoamele (63), cu $r \leqq n$, $s \leqq m$, avem

$$E_r(x) = C_1 P_n(x) + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{P_n(x) E_r(x_\nu)}{(x - x_\nu) P_n'(x_\nu)}$$

$$F_s(y) = C_2 P_m(y) + \sum_{\mu=1}^{m} \frac{P_m(y) F_s(y_\mu)}{(y - y_\mu) P_m'(y_\mu)},$$

unde $C_1 \neq 0$, $C_2 \neq 0$ dacă $r = n$ și $s = m$, iar $C_1 = C_2 = 0$ dacă $r < n$ și $s < m$, se găsesc pentru coeficienții (64) expresiile

$$A_{ik} = \iint_D \left(\frac{P_n(x)}{(x - x_i) P_n'(x_i)}\right)^2 \left(\frac{P_m(y)}{(y - y_k) P_m'(y_k)}\right)^2 dx\, dy. \tag{65}$$

Ținînd seama de (64), formula de cubatură (61) se reduce la

$$\iint_D f(x, y)\, dx\, dy = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} A_{ik} f(x_i, y_k') + \rho. \tag{66}$$

Dacă luăm

$$f(x, y) = \frac{P_n(x) P_m(y)}{(x - x_i)(y - y_k)},$$

se găsesc și următoarele expresii pentru coeficienții acestei formule de cubatură

$$A_{ik} = \iint_D \frac{P_n(x)}{(x - x_i) P_n'(x_i)} \frac{P_m(y)}{(y - y_k) P_m'(y_k)}\, dx\, dy. \tag{67}$$

Se observă că

$$A_{ik} = C_i D_k,$$

unde

$$C_i = \int_{-1}^{+1} \frac{P_n(x)}{(x - x_i) P_n'(x_i)}\, dx, \quad D_k = \int_{-1}^{+1} \frac{P_m(y)}{(y - y_k) P_m'(y_k)}\, dy.$$

Pe baza rezultatului lui Christoffel, semnalat la punctul 18, se găsește că

$$A_{ik} = \frac{4}{(1 - x_i^2)(1 - y_k^2)\left[P_n'(x_i) P_m'(y_k)\right]^2}. \tag{68}$$

Avem de asemenea relațiile

$$A_{ik} = A_{n-i+1,\, m-k+1} \quad (i = \overline{1, n};\ k = \overline{1, m}).$$

21. Printr-un procedeu asemănător cu cel folosit în cazul unei variabile, se arată că rezultatele precedente se păstrează și atunci cînd rădăcinile polinoamelor (63) nu sînt distincte.

22. Să căutăm acum expresia restului formulei de cubatură de tip Gauss (66), care are gradul de exactitate $(2n-1, 2m-1)$.

Făcînd $r = n$, și $s = m$, formulele (59) și (62) ne conduc la următoarea expresie a restului

$$\rho = \iint_D R(x, y)\, dx\, dy, \tag{69}$$

unde

$$\begin{aligned} R(x, y) = {} & P_n(x) E_n(x) [x, x_1, \ldots, x_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_n; f] + \\ & + P_m(y) F_m(y) [y, y_1, \ldots, y_m, \beta_1, \ldots, \beta_m; f] - \\ & - P_n(x) E_n(x) P_m(y) F_m(y) \begin{bmatrix} x, x_1, \ldots, x_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \\ y, y_1, \ldots, y_m, \beta_1, \ldots, \beta_m \end{bmatrix}; f \Big]. \end{aligned}$$

Cazului tratat de A. A. Markov pentru o variabilă îi corespunde pentru două variabile cazul

$$E_n(x) \equiv P_n(x), \quad F_m(y) \equiv P_m(y), \tag{69'}$$

cînd restul precedent va deveni

$$\begin{aligned} R(x, y) = {} & P_n^2(x) [x, x_1, x_1, \ldots, x_n, x_n; f] + \\ & + P_m^2(y) [y, y_1, y_1, \ldots, y_m, y_m; f] - \\ & - P_n^2(x) P_m^2(y) \left[\begin{matrix} x, x_1, x_1, \ldots, x_n, x_n \\ y, y_1\ y_1, \ldots, y_m, y_m \end{matrix}; f\right]. \end{aligned}$$

Vrem să găsim o evaluare a restului (69) în acest caz.

Ținînd seama de formula (25), de proprietatea de aditivitate a diferențelor divizate și de formula de medie (26), putem scrie succesiv,

$$\iint_D \left\{ P_n^2(x) [x, x_1, x_1, \ldots, x_n, x_n; f] - P_n^2(x) P_m^2(y) \left[\begin{matrix} x, x_1, x_1, \ldots, x_n, x_n \\ y, y_1, y_1, \ldots, y_m, y_m \end{matrix}; f\right] \right\} dx\, dy$$

$$= \int_{-1}^{+1} \left\{ \int_{-1}^{+1} P_n^2(x) [x, x_1, x_1, \ldots, x_n, x_n; f(x,y) - P_m^2(y) [y, y_1, y_1, \ldots, y_m, y_m; f(x, y)]] dx \right\} dy =$$

$$= \int_{-1}^{+1} \{ [\xi', x_1, x_1, \ldots, x_n, x_n; f(\xi', y) - P_m^2(y) [y, y_1, y_1, \ldots, y_m, y_m; f(\xi', y)]] \int_{-1}^{+1} P_n^2(x)\, dx \} dy =$$

$$= \int_{-1}^{+1} A_n \left\{ \frac{1}{(2n)!} \frac{\partial^{2n} f(\xi, y)}{\partial \xi^{2n}} - \frac{P_m^2(y)}{(2n)!} \left[y, y_1, y_1, \ldots, y_m, y_m; \frac{\partial^{2n} f(\xi, y)}{\partial \xi^{2n}} \right] \right\} dy =$$

$$= \frac{2A_n}{(2n)!} \frac{\partial^{2n} f(\xi, \eta_1)}{\partial \xi^{2n}} - \frac{A_n}{(2n)!} \int_{-1}^{+1} P_m^2(y) \left[y, y_1, y_1, \ldots, y_n, y_m; \frac{\partial^{2n} f(\xi, y)}{\partial \xi^{2n}} \right] dy,$$

unde

$$A_n=\int_{-1}^{+1} P_n^2(x)\,dx=\frac{2^{2n+1}(n\,!)^2}{(2n)\,!\,(2n+1)\,!},$$

iar η_1 și ξ sînt respectiv cuprinși în intervalul $[-1,\ +1]$ și cel mai m[ic] interval care conține valorile $x, x_1, \dots, x_n$.

Cu acestea restul devine

$$\rho=\frac{2A_n}{(2n)\,!}\,\frac{\partial^{2n}f(\xi,\eta_1)}{\partial\xi^{2n}}+\int_{-1}^{1}P_m^2(y)\Big[y,y_1,y_1,\dots,y_m,y_m;\int_{-1}^{1}f(x,y)\,dx-\frac{A_n}{(2n)\,!}\,\frac{\partial^{2n}f(\xi,y)}{\partial\xi^{2n}}\Big]dy=\frac{2A_n}{(2n)\,!}\,\frac{\partial^{2n}f(\xi,\eta_1)}{\partial\xi^{2n}}+A_m\Big[\eta',y_1,y_1,\dots,y_m,y_m;$$

$$\int_{-1}^{1}f(x,\eta')\,dx-\frac{A_n}{(2n)\,!}\,\frac{\partial^{2n}f(\xi,\eta')}{\partial\xi^{2n}}\Big]=\frac{2A_n}{(2n)\,!}\,\frac{\partial^{2n}f(\xi,\eta_1)}{\partial\xi^{2n}}+\frac{2A_m}{(2m)\,!}\,\frac{\partial^{2m}f(\xi_1,\eta)}{\partial\eta^{2m}}-$$

$$-\frac{A_nA_m}{(2n)\,!\,(2m)\,!}\,\frac{\partial^{2n+2m}f(\xi,\eta)}{\partial\xi^{2n}\,\partial\eta^{2m}}.$$

În felul acesta se ajunge la următoarea expresie pentru restul formu[lei] de cubatură (66)

$$\rho=\frac{2^{2n+2}}{2n+1}\,\frac{n\,!}{[(n+1)(n+2)\dots 2n]^3}\,\frac{\partial^{2n}f(\xi,\eta_1)}{\partial\xi^{2n}}+\frac{2^{2m+2}}{2m+1}\,\frac{m\,!}{[(m+1)(m+2)\dots 2m]^3}\,\frac{\partial^{2m}f(\xi_1,\mu)}{\partial\eta^{2m}}-$$

$$-\frac{2^{2n+2m+2}}{(2n+1)(2m+1)}\,\frac{n\,!\,m\,!}{[(n+1)(n+2)\dots 2n]^3\,[(m+1)(m+2)\dots 2m]^3}\,\frac{\partial^{2n+2m}f(\xi,\eta)}{\partial\xi^{2n}\,\partial\eta^{2m}} \quad ([illegible])$$

Să considerăm acum cîteva cazuri particulare ale formulei (66).

1°. $n=m=1$.

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy=4f(0,0)+\rho_1,$$

$$\rho_1=\frac{2}{3}\,\frac{\partial^2 f(\xi,\eta_1)}{\partial\xi^2}+\frac{2}{3}\,\frac{\partial^2 f(\xi_1,\eta)}{\partial\eta^2}-\frac{1}{9}\,\frac{\partial^4 f(\xi,\eta)}{\partial\xi^2\,\partial\eta^2}.$$

2°. $n=m=2$.

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy=f\Big(-\frac{1}{\sqrt3},-\frac{1}{\sqrt3}\Big)+f\Big(-\frac{1}{\sqrt3},\frac{1}{\sqrt3}\Big)+f\Big(\frac{1}{\sqrt3},\frac{-1}{\sqrt3}\Big)+f\Big(\frac{1}{\sqrt3},\frac{1}{\sqrt3}\Big)+\rho_2\ ^{*)}, \quad (71)$$

$$\rho_2=\frac{2}{135}\,\frac{\partial^4 f(\xi,\eta_1)}{\partial\xi^4}+\frac{2}{135}\,\frac{\partial^4 f(\xi_1,\eta)}{\partial\eta^4}-\frac{1}{18225}\,\frac{\partial^8 f(\xi,\eta)}{\partial\xi^4\,\partial\eta^4}. \quad (72)$$

3°. $m=n=3$.

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy=\frac{1}{81}\Big\{25\Big[f\Big(-\sqrt{\frac{3}{5}},\sqrt{\frac{3}{5}}\Big)+f\Big(-\sqrt{\frac{3}{5}},\sqrt{\frac{3}{5}}\Big)+f\Big(\sqrt{\frac{3}{5}},-\sqrt{\frac{3}{5}}\Big)+f\Big(\sqrt{\frac{3}{5}},\sqrt{\frac{3}{5}}\Big)\Big]+40\Big[f\Big(-\sqrt{\frac{3}{5}},0\Big)+$$

$$+f\Big(0,-\sqrt{\frac{3}{5}}\Big)+f\Big(0,\sqrt{\frac{3}{5}}\Big)+f\Big(\sqrt{\frac{3}{5}},0\Big)\Big]+64\,f(0,0)\Big\}+\rho_3, \quad (73)$$

$$\rho_3=\frac{1}{7875}\,\frac{\partial^6 f(\xi,\eta_1)}{\partial\xi^6}+\frac{1}{7875}\,\frac{\partial^6 f(\xi_1,\eta)}{\partial\eta^6}-\frac{1}{248062500}\,\frac{\partial^{12} f(\xi,\eta)}{\partial\xi^6\,\partial\eta^6}.$$

23. Dacă polinoamele $E_n(x)$ și $F_m(y)$ nu se aleg ca la stabilirea restului (70), determinarea restului e destul de complicată.

Să dăm un exemplu.

Dacă se alege $m=n=2$ am văzut că se obține formula de cubatură (72). Pentru evaluarea restului ei să alegem

$$E_2(x)=x^2-1,\ F_2(y)=y^2-1.$$

Restul conform formulei (69) și următoarei va fi

$$\rho=\iint_D r(x,y)\,dx\,dy,$$

unde

$$r(x,y)=(x^2-1)\Big(x^2-\frac{1}{3}\Big)\Big[x,-1,-\frac{1}{\sqrt3},\frac{1}{\sqrt3},1;f\Big]+(y^2-1)\Big(y^2-\frac{1}{3}\Big)\Big[y,-1,-\frac{1}{\sqrt3},\frac{1}{\sqrt3},1;f\Big]-$$

$$-(x^2-1)\Big(x^2-\frac{1}{3}\Big)(y^2-1)\Big(y^2-\frac{1}{3}\Big)\left[\begin{matrix}x,-1,-\frac{1}{\sqrt3},\frac{1}{\sqrt3},1\\ y,-1,-\frac{1}{\sqrt3},\frac{1}{\sqrt3},1\end{matrix};f\right].$$

---

*) Această formulă a mai fost întîlnită în mod incidental de către M i k e l a d z e [13] și T y l e r [14] dar ei nu au dat expresia restului ei.

Acum apar unele dificultăți din cauză că polinoamele care înmulțe diferențele divizate de mai sus nu păstrează un semn constant în domeni de integrare.

Făcînd o descompunere convenabilă a domeniului de integrare poate obține, după unele transformări, următoarea expresie a restul

$$\begin{aligned}\rho = {} & \frac{14\sqrt{3}}{1215}\frac{\partial^4 f(\xi_1, \eta)}{\partial \xi_1^4} + \frac{2(9-7\sqrt{3})}{1215}\frac{\partial^4 f(\xi_2, \eta)}{\partial \xi_2^2} + \\ & + \frac{14\sqrt{3}}{1215}\frac{\partial^4 f(\xi, \eta_1)}{\partial \eta_1^4} + \frac{2(9-7\sqrt{3})}{1215}\frac{\partial^4 f(\xi, \eta_2)}{\partial \eta_2^4} - \\ & - \frac{49}{492075}\frac{\partial^8 f(\xi_1, \eta_1)}{\partial \xi_1^4 \partial \eta_1^4} - \frac{14(3\sqrt{3}-7)}{492075}\frac{\partial^8 f(\xi_3, \eta_3)}{\partial \xi_3^4 \partial \eta_3^4} - \\ & - \frac{2(38-21\sqrt{3})}{492075}\frac{\partial^8 f(\xi_2, \eta_2)}{\partial \xi_2^4 \partial \eta_2^4}. \end{aligned} \quad (7$$

În ipoteza că în patratul D avem

$$\left|\frac{\partial^4 f(x, y)}{\partial x^4}\right| \leqq L, \left|\frac{\partial^4 f(x, y)}{\partial y^4}\right| \leqq M, \left|\frac{\partial^8 f(x, y)}{\partial x^4 \partial y^4}\right| \leqq N,$$

rezultă următoarea delimitare a acestui rest

$$|\rho| \leqq \frac{2}{135}(L + M) + \frac{N}{18225}.$$

De remarcat că aceeași delimitare se obține dacă se pleacă de expresia (72) a restului. De fapt restul (70) trebuie să fie și el independe de parametri α_i, β_k. În exemplul precedent expresia corectă a restul este cea de la (72). Formula (72′) diferă doar în aparență de cea de la (7

24. Rezultatele care preced se pot extinde acum foarte ușor la cazu mai multe variabile.

Să prezentăm pe scurt cîteva rezultate din cazul a trei variabi Fie integrala triplă

$$I_3 = \iiint_V f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz,$$

unde V este cubul

$$-1 \leqq x, y, z \leqq +1.$$

Folosind formula de interpolare

$$f(x, y, z) = L(x, y, z) + R(x, y, z),$$

unde

$$L(x,y,z) = L\left(\begin{matrix} x_1, \ldots, x_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_r \\ y_1, \ldots, y_m, \beta_1, \ldots, \beta_s \\ z_1, \ldots, z_p, \gamma_1, \ldots, \gamma_t \end{matrix} ; f \left| \begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix} \right.\right)$$

este polinomul de interpolare care coincide cu funcția $f(x, y, z)$ pe nodurile

$$M_{ijk}(x_i, y_j, z_k) \quad (i = \overline{1,n};\ j = \overline{1,m};\ k = \overline{1,p})$$

$$P_{\mu\nu\lambda}(\alpha_\mu, \beta_\nu, \gamma_\lambda) \quad (\mu = \overline{1,r};\ \nu = \overline{1,s};\ \lambda = \overline{1,t}),$$

iar

$$\begin{aligned} R(x, y, z) = {} & u(x)[x, x_1, \ldots, x_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_r; f] + \\ & + v(y)[y, y_1, \ldots, y_m, \beta_1, \ldots, \beta_s; f] + \\ & + w(z)[z, z_1, \ldots, z_p, \gamma_1, \ldots, \gamma_t; f] - \\ & - u(x)v(y)\begin{bmatrix} x, x_1, \ldots, x_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_r \\ y, y_1, \ldots, y_m, \beta_1, \ldots, \beta_s \end{bmatrix} ; f \Big] - \\ & - u(x)w(z)\begin{bmatrix} x, x_1, \ldots, x_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_r \\ z, z_1, \ldots, z_p, \gamma_1, \ldots, \gamma_t \end{bmatrix} ; f \Big] - \\ & - v(y)w(z)\begin{bmatrix} y, y_1, \ldots, y_m, \beta_1, \ldots, \beta_s \\ z, z_1, \ldots, z_p, \gamma_1, \ldots, \gamma_t \end{bmatrix} ; f \Big] + \\ & + u(x)v(y)w(z)\begin{bmatrix} x, x_1, \ldots, x_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_r \\ y, y_1, \ldots, y_m, \beta_1, \ldots, \beta_s ; f \\ z, z_1, \ldots, z_p, \gamma_1, \ldots, \gamma_t \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

în care

$$u(x) = P_n(x)E_r(x), \quad E_r(x) = \prod_{i=1}^{r}(x - \alpha_i)$$

$$v(y) = P_m(y)F_s(y), \quad F_s(y) = \prod_{j=1}^{s}(y - \beta_j)$$

$$w(z) = P_p(z)G_t(z), \quad G_t(z) = \prod_{k=1}^{t}(z - \gamma_k)$$

$$P_q(u) = C_q \frac{d^q}{du^q}(u^2 - 1)^q,$$

se obține, indiferent dacă α_i, β_j, γ_k $(i = 1, 2, \ldots, r \leqq n;\ j = 1, 2, \ldots, s \leqq m;\ k = 1, 2, \ldots, t \leqq p)$ sînt distincți sau nu, formula de cubatură

$$\iiint_V f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{p} A_{ijk} f(x_i, y_j, z_k) + \rho, \quad (74)$$

unde

$$\rho = \iiint_V R(x, y, z)\, dx\, dy\, dz,$$

iar

$$A_{ijk} = \iiint_V \frac{P_n(x)}{(x-x_i)\,P'_n(x_i)}\,\frac{P_m(y)}{(y-y_j)\,P'_m(y_j)}\,\frac{P_p(z)}{(z-z_k)\,P'_p(z_k)}\,dx\,dy\,dz =$$

$$= \iiint_V \left(\frac{P_n(x)}{(x-x_i)\,P'_n(x_i)}\,\frac{P_m(y)}{(y-y_j)\,P'_m(y_j)}\,\frac{P_p(z)}{(z-z_k)\,P'_p(z_k)}\right)^2 dx\,dy\,dz =$$

$$= \frac{8}{(1-x_i^2)(1-y_j^2)(1-z_k^2)\,[P'_n(x_i)\,P'_m(y_j)\,P'_p(z_k)]^2}.$$

În aceste expresii polinomul lui Legendre $P_q(u)$ conține facto[r] numeric $C_q = \frac{1}{2^q \cdot q!}$.

Între acești coeficienți există relațiile

$$A_{i,j,k} = A_{n-i+1,\,m-j+1,\,p-k+1}\ (i=\overline{1,n};\ j=\overline{1,m};\ k=\overline{1,p}).$$

Dacă se presupune că

$$r=n,\quad s=m,\quad t=p$$

și

$$E_n(x)\equiv P_n(x),\quad F_m(y)\equiv P_m(y),\quad G_p(z)\equiv P_p(z),$$

pentru restul formulei de cubatură (74) se obține următoarea expre[sie]

$$\rho = \frac{2^{2n+3}}{2n+1}\,\frac{n!}{[(n+1)(n+2)\dots 2n]^3}\,\frac{\partial^{2n} f(\xi,\eta',\zeta')}{\partial\xi^{2n}} +$$

$$+\frac{2^{2m+3}}{2m+1}\,\frac{m!}{[(m+1)(m+2)\dots 2m]^3}\,\frac{\partial^{2m} f(\xi',\eta,\zeta')}{\partial\eta^{2m}} +$$

$$+\frac{2^{2p+3}}{2p+3}\,\frac{p!}{[(p+1)(p+2)\dots 2p]^3}\,\frac{\partial^{2p} f(\xi',\eta',\zeta)}{\partial\zeta^{2p}} -$$

$$-\frac{2^{2n+2m+2}}{(2n+1)(2m+1)}\,\frac{n!\,m!}{[(n+1)(n+2)\dots 2n]^3\,[(m+1)(m+2)\dots 2m]^3}\,\frac{\partial^{2n+2m} f(\xi,\eta,\zeta')}{\partial\xi^{2n}\,\partial\eta^{2m}}$$

$$-\frac{2^{2n+2p+2}}{(2n+1)(2p+1)}\,\frac{n!\,p!}{[(n+1)(n+2)\dots 2n]^3\,[(p+1)(p+2)\dots 2p]^3}\,\frac{\partial^{2n+2p} f(\xi,\eta',\zeta)}{\partial\xi^{2n}\,\partial\zeta^{2p}}$$

$$-\frac{2^{2m+2p+2}}{(2m+1)(2p+1)}\,\frac{m!\,p!}{[(m+1)(m+2)\dots 2m]^3\,[(p+1)(p+2)\dots 2p]^3}\,\frac{\partial^{2m+2p} f(\xi',\eta,\zeta)}{\partial\eta^{2m}\,\partial\zeta^{2p}}$$

$$+\frac{2^{2n+2m+2p+1}}{(2n+1)(2m+1)(2p+1)}\,\frac{n!\,m!\,p!}{[(n+1)\dots 2n]^3\,[(m+1)\dots 2m]^3\,[(p+1)\dots 2p]^3}\,\frac{\partial^{2n+2m+2p} f(\xi,\eta,\zeta)}{\partial\xi^{2n}\,\partial\eta^{2m}\,\partial\zeta^{2p}}$$

25. Să considerăm două cazuri particulare ale formulei de cubatură (74).

1°. $n = m = p = 1$.

$$\iiint_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = 8\,f(0,0,0) + \rho,$$

$$\rho = \frac{4}{3}\left[\frac{\partial^2 f(\xi,\eta',\zeta')}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2 f(\xi',\eta,\zeta')}{\partial\eta^2} + \frac{\partial^2 f(\xi',\eta',\zeta)}{\partial\zeta^2}\right] -$$

$$-\frac{1}{9}\left[\frac{\partial^4 f(\xi,\eta,\zeta')}{\partial\xi^2\partial\eta^2} + \frac{\partial^4 f(\xi,\eta',\zeta)}{\partial\xi^2\partial\zeta^2} + \frac{\partial^4 f(\zeta',\eta,\zeta)}{\partial\eta^2\partial\zeta^2}\right] +$$

$$+\frac{1}{108}\,\frac{\partial^6 f(\xi,\eta,\zeta)}{\partial\xi^2\partial\eta^2\partial\zeta^2}.$$

2°. $n = m = p = 2$.

$$\iiint_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = f\left(\frac{1}{\sqrt3},\frac{1}{\sqrt3},\frac{1}{\sqrt3}\right) + f\left(\frac{-1}{\sqrt3},\frac{1}{\sqrt3},\frac{1}{\sqrt3}\right) +$$

$$+ f\left(\frac{1}{\sqrt3},\frac{-1}{\sqrt3},\frac{1}{\sqrt3}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt3},\frac{1}{\sqrt3},\frac{-1}{\sqrt3}\right) + f\left(\frac{-1}{\sqrt3},\frac{-1}{\sqrt3},\frac{1}{\sqrt3}\right) + f\left(\frac{-1}{\sqrt3},\frac{1}{\sqrt3},\frac{-1}{\sqrt3}\right) +$$

$$+ f\left(\frac{1}{\sqrt3},\frac{-1}{\sqrt3},\frac{-1}{\sqrt3}\right) + f\left(\frac{-1}{\sqrt3},\frac{-1}{\sqrt3},\frac{-1}{\sqrt3}\right) + \rho,$$

$$\rho = \frac{4}{135}\left[\frac{\partial^4 f(\xi,\eta',\zeta')}{\partial\xi^4} + \frac{\partial^4 f(\xi',\eta,\zeta')}{\partial\eta^4} + \frac{\partial^4 f(\xi',\eta',\zeta)}{\partial\zeta^4}\right] -$$

$$-\frac{1}{18225}\left[\frac{\partial^8 f(\xi,\eta,\zeta')}{\partial\xi^4\partial\eta^4} + \frac{\partial^8 f(\xi,\eta',\zeta)}{\partial\xi^4\partial\zeta^4} + \frac{\partial^8 f(\xi',\eta,\zeta)}{\partial\eta^4\partial\zeta^4}\right] + \frac{1}{9841500}\,\frac{\partial^{12} f(\xi,\eta,\zeta)}{\partial\xi^4\partial\eta^4\partial\zeta^4}.$$

26. Într-o lucrare viitoare vom construi, plecînd de la formulele de interpolare pe care le-am dat în această lucrare, formule de cubatură pentru integralele duble și triple în cazul cînd domeniul de integrare este un poligon regulat, un cerc, un poliedru regulat sau sferă.

ОБОБЩЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ ФОРМУЛ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ И НЕКОТОРЫЕ СООБРАЖЕНИЯ ОТНОСИТЕЛЬНО ФОРМУЛЫ ЧИСЛЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ ГАУССА

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

В первой части работы автор рассматривает обобщение интерполяционной формулы Лагранжа для функций нескольких переменных. Так, для функции $f(M) = f(t^1, t^2, \cdots t^s)$ и узлов (16) автор дал интерполяционную форулу (17), в которой полином (18) является интерполяционным полиномом наименьшей степени, совпадающим с f (M) на узлах (16), а

остаток R_s (M) этой формулы выражен при помощи разделенных раз-
стей. Для разделенных частичых разностей, определенных на узлах (2
даны формулы средних значений в пунктах 11, 12 и 13.

Для остатка интерполяционной формулы Лагранжа относительно у
лов (23) и функции f (M), частично дифференцируемой достаточное чис
раз, дано выражение (28), в котором неизвестные ξ_1, $\xi_2, \cdots$ ξ_s те же о
мые во всех входящих частных производных.

Во второй части работы автор прежде всего делает следующие з
мечания относительно квадратурной формулы Гаусса. Если рассматри
ется интерполяционная формула Лагранжа-Эрмита (49), в которой испол
зуются в качестве узлов корни полинома (48), то в квадратурной фо
муле (51), выводимой на основании этой формулы, выпадут все коэ
фициенты B_{ij}, в предположении что x_1, $x_2, \cdots$, x_n являются корнями п
линома Лежандра (30). Случай А. А. Маркова [7] имеет место тог
когда $k = n, r_1 = r_2 = \cdots = r_s = 1$ и $\lambda_i = x_i$ $(i = 1,\ 2, \cdots,\ n)$. Квадратур
формула (54), к которой таким образом приходят, является класси
ской формулой Гаусса.

На основании этих замечаний выводится кубатурная формула ти
Гаусса (66), степень точности которой $(2n—1,\ 2m—1)$.

Для коэффициентов этой формулы даются формулы (67), (65), (6
в которых P_n (x) и P_m (y) являются полиномами Лежандра n-й степе
соответственно m-й степени. Используя предельный случай (69), авт
выводит эффективное выражение (70) остатка (69) формулы (66).

Предыдущие результаты распространяются затем на три переменн

GÉNÉRALISATION DE CERTAINES FORMULES D'INTERPOLATION POUR LES FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES; QUELQUES CONSIDÉRATIONS SUR LA FORMULE D'INTÉGRATION NUMÉRIQUE DE GAU

(RÉSUMÉ)

Dans la première partie du travail, l'auteur traite une générali-
tion de la formule d'interpolation de Lagrange pour les fonctions
plusieurs variables. Il donne ainsi, pour la fonction $f(M) = f(t^1,$
$\ldots, t^s)$ et les nœuds (16), la formule d'interpolation (17), où le polynô
(18) est le polynôme d'interpolation de degré minimum qui coïnc
avec $f(M)$ sur les nœuds (16). Pour ce qui est du reste R_s (M) de ce
formule, il a été exprimé à l'aide des différences divisées. Relativem
aux différences divisées partiellement définies sur les nœuds (23), l'
teur donne les formules de moyenne des points 11, 12 et 13.

Pour le reste de la formule d'interpolation de Langrange, relat
aux nœuds (23), et la fonction $f(M)$ partiellement dérivable un nom
suffisant de fois, l'expression (28) est donnée. Dans cette expressi
les inconnues ξ_1, ξ_2, $\ldots$, ξ_s sont les mêmes dans toutes les dérivées p
tielles qui interviennent.

Dans la seconde partie du travail, l'auteur fait d'abord l'observation ci-après sur la formule de quadrature de Gauss. Si l'on considère la formule d'interpolation de Lagrange-Hermite (49), qui prend pour nœuds les racines du polynôme (48), dans la formule de quadrature (51) — obtenue en raison de la première (49) — tous les coefficients B_{ij} viendront à disparaître, dans l'hypothèse que x_1, x_2, $\ldots$, x_n sont les racines du polynôme de Legendre (30). Le cas de A. A. Markoff [7] est obtenu pour $k = n$, $r_1 = r_2 = \ldots = r_s = 1$ et $\lambda_i = x_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. La formule de quadrature (54) à laquelle on aboutit de cette manière est la formule classique de Gauss.

Fondé sur cette observation, l'auteur établit la formule de cubature du type Gauss (66), de degré d'exactitude $(2n - 1,\ 2m - 1)$.

Pour les coefficients de cette dernière, les formules (67), (65), (68) sont données; dans ces formules $P_n(x)$ et $P_m(y)$ sont les polynômes de Legendre de degré n, respectivement m. A l'aide du cas limite (69), l'auteur déduit l'expression effective (70) pour le reste (69) de la formule (66).

Les résultats ci-dessus sont ensuite étendus à trois variables.

BIBLIOGRAFIE

1. D. D. Stancu, *Considerații asupra interpolării polinomiale a funcțiilor de mai multe variabile*. Bul. Univ. „Babeș-Bolyai", Seria Șt. Mat., nr. 1–2, 1956.
2. A. Marchaud, *Sur les dérivées et les différences des fonctions de variables réelles*. Journ. de Math. 1927, t. VI, p. 332.
3. D. L. Berman, *O nekotorîh elementarnîh extremalnîh svoistvah mnogocilenov neskolki peremenîh*. DAN, SSSR. 1951, t. 81, nr. 1, p. 9–12.
4. J. F. Steffensen, *Interpolation*. Baltimore, 1950.
5. T. Popoviciu, *Notes sur les fonctions convexes d'ordre supérieur (IX)*. Bull. Math. Soc. Roum. de Sci., 1941, t. 43, p. 85.
6. — *Folytonos függvények középértektételeiről*. Magyar Tudom. Akad. III. (Matem. Fiz.) osztalyanak közlemenyeibol. 1954, nr. 3, p. 353.
7. A. A. Markov, *Differenzenrechnung*. Leipzig, 1896.
8. T. J. Stieltjes, *Quelques recherches sur la théorie des quadratures dites mécaniques*. Ann. l'École Norm. Sup. 1884, m. (3), p. 409.
9. E. Christoffel, *Über die Gaussische Quadratur und eine Veralgemeinerung derselben*. Journ. f. reine u. angew. Math., 1858. t. 55.
10. E. W. Hobson, *The Teory of Spherical and Ellipsoidal Harmonics*, Cambridge, 1931.
11. V. L. Gonciarov, *Teoria interpolirovania i priblijenia funkții*. Moscova, 1954.
12. D. D. Stancu, *Generalizarea formulei de cuadratură a lui Gauss-Christoffel*. Studii și cercetări științifice, Filiala Iași, Seria matematică, 1957, fasc. 1.
13. Ș. E. Mikeladze, *Cislennie metodi matematiceskogo analiza*. Moskova, 1953 p. 492.
14. G. W. Tyler, *Numerical Integration of Functions of Several Variables*. Canad. Journ. of. Math., 1953, vol. V, 393.