CONSIDERAŢII ASUPRA INTERPOLĂRII POLINOMIALE A FUNCŢIILOR DE MAI MULTE VARIABILE

DE

D. D. STANCU

§ 1.—*Formularea generală a problemei interpolării polinomiale a funcţiilor de mai multe variabile. Polinoame de interpolare de grad* $(n_1, n_2, \ldots, n_s)$ *şi polinoame de interpolare de grad global* n.

1. — Să considerăm un spaţiu euclidian cu s dimensiuni E_s şi să notăm cu $f(M) = f(t^1, t^2, \ldots, t^s)$ o funcţie continuă şi mărginită definită într-un domeniu D al acestui spaţiu.

Să presupunem că se cunosc valorile funcţiei $f(M)$ în N puncte

$$M_i\ (t_i^1, t_i^2, \ldots, t_i^s),\ i = \overline{1, N}^{1)} \tag{1}$$

care aparţin acestui domeniu — şi se cere să se aproximeze această funcţie cu ajutorul unei funcţii continue $\varphi(M)$ care în punctele (1) coincide cu valorile ei, adică

$$f(M_i) = \varphi(M_i),\ i = \overline{1, N} \tag{2}$$

iar în celelalte puncte ale domeniului D $\varphi(M)$ reprezintă exact sau aproximativ funcţia $f(M)$.

Procesul calculării lui $f(M)$ cu ajutorul funcţiei $\varphi(M)$ în punctele lui D, care nu coincid cu cele de la (1), se numeşte — după cum bine se ştie — interpolare. Funcţia $f(M)$ a cărei expresie analitică n-o cunoaştem, sau aceasta e prea complicată pentru a putea fi utilizată în practică, şi ale cărei valori în punctele (1) sînt date (într-un tabel), se numeşte funcţia de interpolat, punctele (1) se numesc nodurile sau punctele de interpolare iar funcţia $\varphi(M)$, definită mai sus, se numeşte funcţie interpolatoare.

Din punct de vedere geometric a înlocui funcţia $f(M)$ cu funcţia interpolatoare $\varphi(M)$, care verifică condiţiile (2), revine la a înlocui hipersuprafaţa $u = f(M)$, prin hipersuprafaţa $u = \varphi(M)$ care trece prin punctele $Q_i\ [t_i^1, t_i^2, \ldots, t_i^s; f(M_i),],\ i = \overline{1, N}$.

2. — In general se caută ca funcţia interpolatoare $\varphi(M)$ să fie cît mai simplă posibilă şi care să dea o aproximaţie suficientă în aplicaţiile practice.

---

1) Prin $i = \overline{1, N}$ inţelegem că i ia succesiv valorile 1, 2, . . . , N.

Se ştie că în particular polinoamele satisfac aceste condiţii. De aceea funcţia $\varphi(M)$ o vom alege să fie un polinom şi anume un polinom algebric, pe care-l vom nota cu $P(M)$.

Date fiind nodurile (1), pentru ca problema noastră să fie determinată, vom preciza mai întîi gradul lui $P(M)$ în $t^1, t^2, \ldots, t^s$. Vom presupune că $P(M)$ are gradul cel mult n_i în t^i, $i = \overline{1,s}$, ceeace implică că numărul nodurilor (1) să se ia egal cu

$$N = \prod_{i=1}^{s} (n_i + 1)$$

In felul acesta vom putea în general determina cei N coeficienţi ai polinomului

$$P(M) = P_{n_1 n_2 \ldots n_s}(M) = \sum_{i_1=0}^{n_1} \cdots \sum_{i_s=0}^{n_s} a_{i_1 \ldots i_s} (t^1)^{i_1} \ldots (t^s)^{i_s} \tag{3}$$

Problema va fi însă complet determinată numai dacă următorul sistem linear de N ecuaţii, în raport cu cei N coeficienţi $a_{i_1 i_2 \ldots i_s}$, $i = \overline{1, n_1+1}, \ldots, i_s = \overline{1, n_s+1}$,

$$P_{n_1 n_2 \ldots n_s}(M_i) = O, \quad i = \overline{1, N} \tag{4}$$

nu are soluţii nenule.

Acest lucru nu are totdeauna loc.

Dacă numim hipersuprafaţă de ordinul $(m_1, m_2, \ldots, m_s)$ o hipersuprafaţă algebrică reprezentată de ecuaţia $Q_{m_1 m_2 \ldots m_s}(M) = O$, unde în membrul întîi figurează un polinom de grad m_i în t^i, $i = \overline{1,s}$, e clar că dacă nodurile (1) se găsesc pe această hipersuprafaţă, atunci polinoamele $P_{n_1 n_2 \ldots n_s}(M)$ şi $P_{n_1 n_2 \ldots n_s}(M) + Q_{m_1 m_2 \ldots m_s}(M)$, $m_i \leqq n_i$ iau în (1) respectiv aceleaşi valori.

De aceea pentru ca polinomul (3) să fie perfect determinat e esenţial ca sistemul (4) să nu admită soluţii nenule.

Această condiţie tocmai — care în cazul unei singure variabile se reduce la condiţia simplă ca nodurile să fie distincte — complică mult în cazul a mai multe variabile, deoarece se poate întîmpla ca deşi punctele (1) sînt distincte să nu putem determina polinomul de interpolare de grad $(n_1, n_2, \ldots, n_s)$ pe nodurile (1) relativ la funcţia oarecare $f(M)$, sau ca acest polinom să nu fie unic.

3. — Să presupunem că nodurile (1) nu se găsesc pe o hipersuprafaţă de ordinul $(n_1, n_2, \ldots, n_s)$ — ceeace e echivalent cu faptul că sistemul (4) n-are soluţii nenule.

In acest caz polinomul de interpolare căutat există şi e unic.

Să notăm cu D_1 mulţimea care are drept elemente grupele de N puncte din D care nu sînt situate pe o hipersuprafaţă de ordinul $(n_1, n_2, \ldots, n_s)$.

Scriind că polinomul (3) verifică condiţiile

$$P_{n_1 n_2 \ldots n_s}(M_i) = f(M_i), \quad i = \overline{1, N} \tag{5}$$

şi eliminînd cei N coeficienţi ai polinomului (3) între ecuaţiile (3) şi (5), se poate deduce expresia polinomului de interpolare căutat.

Să introducem mai întîi unele notaţii.

Fie

$$D_{n_1 n_2 \ldots n_s}(M_1, M_2, \ldots, M_N) \tag{6}$$

determinantul de ordinul N a cărei linie generală $(a\ i - a)$ este formată de elementele

$$(t_i^1)^{i_1} \cdot (t_i^2)^{i_2} \cdots (t_i^s)^{i_s}$$
$$(i_\alpha = 0, 1, 2, \ldots, n_\alpha;\ \alpha = 1, 2, \ldots, s)$$

şi determinantul

$$B_{n_1 n_2 \ldots n_s}(M_1, M_2 \ldots, M_N;\ f \mid M) \tag{7}$$

de ordinul $N+1$, care se obţine din determinantul (6) ataşîndu-i drept ultimă linie linia formată de elementele

$$(t^1)^{i_1} \cdot (t^2)^{i_2} \cdots (t^s)^{i_s}$$
$$(i_\alpha = 0, 1, \ldots, n_\alpha;\ \alpha = 1, 2, \ldots, s)$$

iar coloana ultimă e formată de elementele $f(M_i)$, $i = \overline{1, N}$ şi are drept ultim element pe zero.

Cu aceste notaţii expresia polinomului de interpolare căutat va fi

$$L(M_1, M_2, \ldots, M_N; f \mid M) = -\frac{B_{n_1 \ldots n_s}(M_1, \ldots, M_N; f \mid M)}{D_{n_1 \ldots n_s}(M_1, \ldots, M_N)} \tag{8}$$

4. — Dacă se dezvoltă determinantul (7) după elementele ultimei coloane, deducem că polinomul (8) se poate scrie sub forma următoare

$$L(M_1, M_2, \ldots, M_N;\ f \mid M) = \sum_{i=1}^{N} p_i(M) f(M_i), \tag{9}$$

unde

$$p_i(M) = p_i(M, M_1, \ldots, M_N), \quad i = \overline{1, N} \tag{10}$$

sînt polinoame de grad cel mult $(n_1, n_2, \ldots, n_s)$, independente de funcţia $f(M)$. Le vom numi polinoame fundamentale de interpolare relative la nodurile (1); ele sînt caracterizate complet de proprietatea că sînt de gradul $(n_1, n_2, \ldots, n_s)$ şi că

$$p_i(M_j) = \begin{cases} 1, & pt.\ j = i \\ O, & pt.\ j = 1, 2, \ldots, i-1, i+1, \ldots, N. \end{cases} \tag{11}$$

Putem trage imediat concluzia că pentru o funcţie $f(M)$ definită pe punctele (1) avem

$$f(M) = \sum_{i=1}^{N} p_i(M) f(M_i) \tag{12'}$$

pe punctele (1).

In cazul că $f(M)$ se reduce la un polinom de gradul $(n_1, n_2, \ldots, n_s)$ această formulă este valabilă pentru orice $M \in D$.

In general

$$f(M) = \sum_{i=1}^{N} p_i(M) f(M_i) + R_S(M; f) \tag{12}$$

unde restul $R_S(M, f)$ este o funcțională aditivă și omogenă de f definită pe punctele $M, M_i, (i = \overline{1, N})$ care se bucură de proprietățile

$$R_S[(t^1)^{i_1}(t^2)^{i_2}\dots(t^s)^{i_s}] = o,\ (i_\alpha = \overline{1, n_\alpha};\ \alpha = \overline{1, s}).$$

Pe baza unei definiții date mai sus, oricărui element din D_1 îi corespunde un polinom de interpolare de grad $(n_1, n_2, \dots, n_s)$ pentru funcția $f(M)$ definită în D.

Polinomul de interpolare este o funcțională aditivă și omogenă de $f(M)$. Aceste proprietăți ale sale se pot exprima pe scurt prin formula

$$L(M_1, M_2, \dots, M_N;\ Af + Bg \mid M) =$$
$$AL(M_1, M_2, \dots, M_N;\ f \mid M) + B\,L(M_1, M_2, \dots, M_N; g \mid M).$$

Pentru a le demonstra e suficient să observăm că expresia din membrul al doilea a acestei formule este un polinom de grad cel mult $(n_1, n_2, \dots, n_s)$ și că în punctele (1) ia valorile

$$Af(M_i) + Bg(M_i),\ i = \overline{1, N}$$

Dacă se ține seama acum de unicitatea polinomului (9) rezultă proprietățile enunțate.

5. — Se observă ușor că coeficientul lui

$$(t^1)^{n_1}(t^2)^{n_2}\dots(t^s)^{n_s}$$

din polinomul (8) este egal cu

$$[M_1, M_2, \dots, M_N;\ f] = \frac{A_{n_1 n_2 \dots n_s}(M_1, M_2, \dots, M_N; f)}{D_{n_1 n_2 \dots n_s}(M_1, M_2, \dots, M_N)} \tag{13}$$

unde

$$A_{n_1 n_2 \dots n_s}(M_1, M_2, \dots, M_N; f) \tag{14}$$

este determinantul care se obține din (6) înlocuind elementele ultimei coloane respectiv prin $f(M_i)$, $i = \overline{1, N}$.

Expresia (13) o s-o numim diferența divizată de ordinul $(n_1, n_2, \dots, n_s)$ a funcției $f(M)$ pe punctele (1).

Această definiție se vede imediat că coincide cu definiția dată diferenței divizate de către Prof. T. Popoviciu în [11] și [12].

Proprietățile de aditivitate, omogeneitate și simetrie de care se bucură polinomul (8) se transmit și asupra diferenței divizate (13).

Noțiunea aceasta de diferență divizată este foarte utilă în studiul comportamentului unei funcții față de un polinom, ea stînd la baza proprietăților diferențiale ale unei funcții, așa cum a arătat Prof. T. Popoviciu într-un foarte important studiu teoretic făcut în partea a doua a tezei sale de doctorat [11], unde a considerat funcții de două variabile definite pe o mulțime plană mărginită E oarecare.

6. — E util a considera și polinoame de interpolare de mai multe variabile care au gradul global n, întrucît se pare că acestea ar fi mai apropiate de structura intimă a funcțiilor și de proprietățile diferențiale ale acestora.

Să numim hipersuprafață de ordinul n o hipersuprafață algebrică definită de ecuația

$$\varphi_n(M) = \varphi_n(t^1, t^2, \dots t^s) = o, \tag{15}$$

unde $\varphi_n(M)$ e un polinom de grad global n în $t^1, t^2, \dots, t^s$.

Se constată ușor că numărul condițiilor necesare pentru a determina o asemenea hipersuprafață este

$$N' - 1$$

unde

$$N' = \binom{n+s}{s} = \frac{(n+s)!}{n!\,s!} \tag{16}$$

Rezultă că o hipersuprafață de ordinul n e determinată în general cînd se cunosc $N' - 1$ puncte ale sale — dacă bineînțeles aceste puncte nu sînt așezate în poziții speciale.

S-ar putea însă ca hipersuprafața (15) să nu fie o hipersuprafață proprie de ordinul n ci să se compună dintr-o hipersuprafață de ordinul $m\ (< n)$ și o altă hipersuprafață de ordinul $n - m$, lucru care se întîmplă dacă $\varphi_n(M)$ se descompune în două polinoame $\varphi^1_m(M)$ și $\varphi^2_{n-m}(M)$ de grad respectiv n și $n - m$, adică

$$\varphi_n(M) = \varphi^1_m(M)\,\varphi^2_{n-m}(M).$$

In acest caz se zice că $\varphi_n(M)$ e o hipersuprafață degenerată.

Se știe că s ecuații

$$\varphi^1_{n_1}(M) = o,\ \varphi^2_{n_2}(M) = o, \dots, \varphi^s_{n_s}(M) = o \tag{17}$$

de grad respectiv $n_1, n_2, \dots, n_s$ au în general $m = n_1 . n_2 . \dots . n_s$, soluții comune $(t^1_i, t^2_i, \dots, t^s_i),\ i = \overline{1, m}$. Deci cele s hipersuprafețe (17) au în general m puncte comune. Insă dacă aceste hipersuprafețe au în comun mai mult de m puncte, atunci ele au părți comune. Așa de ex. în cazul $s = 2$ dacă o conică are 7 (și nu $2 \times 3 = 6$) puncte comune cu o cubică, rezultă că această conică aparține cubicei și deci că cubica e degenerată într-o conică[1]) și o dreaptă. Se știe că se poate limita în cazul $s = 2$ numărul de puncte ale unei curbe $\varphi_n(M) = O$ care pot aparține unei curbe $\varphi_m(M) = O$, $m < n$, fără ca $\varphi_n(M) = O$ să fie degenerată. Aceste rezultate se pot extinde la mai multe variabile dar nu ne vom opri asupra lor, aici, fiindu-ne suficiente considerentele sumare făcute mai sus.

7. — Să presupunem acum că se dă un sistem de $N' = \dfrac{(n+s)}{s!\,n!}$ puncte:

$$M^1_i(t^1_i, t^2_i, \dots, t^s_i),\ i = \overline{1, N'} \tag{18}$$

care nu aparțin unei hipersuprafețe de ordinul n din spațiul E_s.

1) Vezi de exemplu [20].

In acest caz există un polinom şi numai unul

$$G_n(M) = G_n(t^1,\ldots,t^s) = \sum_{i_1=0}^{n}\ldots\sum_{i_s=0}^{n} g_{i_1\ldots i_s}(t^1)^{i_1}\ldots(t^s)^{i_s} \qquad (19)$$

$$(i_1 + \ldots + i_s \leqq n)$$

de grad global cel mult n care trece prin punctele (18).

Să notăm cu
$$D_n(M_1', M_2',\ldots, M_n') \qquad (20)$$

determinantul de ordinul N' a cărei linie generală are drept elemente

$$(t_i^1)^{i_1}\cdot(t_i^2)^{i_2}\ldots(t_i^s)^{i_s}, \left(\begin{matrix} i_k = 0,1,2,\ldots,n;\ k=\overline{1,s} \\ i_1+i_2+\ldots+i_s \leqq n \end{matrix}\right)$$

şi fie
$$B_n(M_1', M_2',\ldots, N_N';\ f\mid M) \qquad (21)$$

determinantul de ordinul $N'+1$ care se obţine din (10) ataşîndu-i drept ultimă linie linia de elemente

$$(t^1)^{i_1}\cdot(t^2)^{i_2}\ldots(t^s)^{i_s}$$

$$\left(\begin{matrix} i_k = 0,1,\ldots,n;\ k=1,2,\ldots,s \\ i_l + i_2 + \ldots + i_s \leqq n \end{matrix}\right)$$

iar coloana ultimă e formată de elementele $f(M_i')$, $i=\overline{1,N'}$ şi cu ultimul element zero.

Eliminînd cei N' coeficienţi necunoscuţi între (18) şi ecuaţiile

$$G_u(M_i') = f(M_i'),\ i = \overline{1,N'}, \qquad (22)$$

se găseşte că polinomul de interpolare de grad global n, care verifică condiţiile (22), este

$$G_n(M_1', M_2',\ldots, M_N';f\mid M) = -\frac{B_n(M_1',\ldots,M_{N'}';f\mid M)}{D_n(M_1',\ \ldots, M_{N'}')}. \qquad (23)$$

Dacă se dezvoltă determinantul (21) după elementele ultimei coloane se găseşte că

$$G_n(M_1, M_2,\ldots,M_N;f\mid M) = \sum_{i=1}^{N}(-1)^{i-1}\frac{D_i'}{D_n}f(M_i'), \qquad (24)$$

unde $-D_i'$ este complementul algebric al elementului $f(M_i')$ din determinantul (21).

Polinoamele următoare

$$q_i(M) = q_i(M, M_1',\ldots,M_N') = (-1)^{i-1}\frac{D_i'(M,\ M_1',\ldots,M_{N'}')}{D_n(M_1', M_2',\ldots,M_{N'}')}$$

$$(i = 1,2,\ldots,N')$$

de grad global n, în raport cu coordonatele punctului curent $M \in D$, sînt determinate complet de condiţiile

$$q_i(M_j) = \begin{cases} 1, & pt.\ i=j \\ 0, & pt.\ j = 1,2,\ldots,i-1,i+1,\ldots,N'. \end{cases}$$

Aceste polinoame, care sînt independente de funcţia $f(M)$, le vom numi polinoame fundamentale de interpolare de gradul n relativ la sistemul de noduri (18).

Polinomul de interpolare (24), adică

$$G_n(M_1, M_2,\ldots, M_N;f\mid M) = \sum_{i=1}^{N} q_i(M)\,f(M_i') \qquad (25)$$

se bucură de aceleaşi proprietăţi ca şi polinomul (9).

§ 2. — *Polinoame de interpolare definite pe o pseudo-reţea de ordinul* $(n_1, n_2,\ldots, n_s)$. *Cazul reţelei Marchaud.*

8. — Este important din punct de vedere practic ca să cunoaştem în mod concret anumite scheme sau distribuţii precise de noduri despre care să fim siguri că ne conduc la un polinom de interpolare perfect determinat şi dacă e posibil acesta să aibă o expresie simplă, uşor utilizabilă în calcule.

In cazul a doua şi mai multe variabile a fost utilizată pînă în prezent o schemă de noduri care se obţine prin intersecţia unor sisteme de hiperplane paralele la hiperplanele de coordonate.

Astfel următorul sistem de $N = \prod_{=1}^{s}(n_i+1)$ hiperplane

$$t^k = t_{i_k}^k,\ (i_k = \overline{1, n_k+1};\ k = \overline{1,s}) \qquad (26)$$

paralele cu hiperplanele de coordonate, se taie în N puncte

$$P_{i_1 i_2\ldots i_s}(t_{i_1}^1, t_{i_2}^2,\ldots, t_{i_s}^s), \qquad (27)$$

$$(i_k = 1,2,\ldots,n_k+1;\ k = 1,2,\ldots,s)$$

care sînt distincte dacă între hiperplanele (16) nu se găsesc unele confundate.

Se poate arăta şi direct, că în acest caz există un polinom de interpolare de grad $(n_1, n_2,\ldots, n_s)$ şi că acesta e unic, căci determinantul sistemului (5) este format din produse de puteri de determinanţi Vandermonde de numere distincte, — lucru care se dovedeşte fără prea mare greutate din aproape în aproape.

Zicem că punctele (27) alcătuiesc o reţea simplă sau o reţea hiperparalelipipedică sau o reţea Marchaud [1]), de ordinul $(n_1, n_2,\ldots n_s)$.

Asemenea reţele au fost întrebuinţate de O. Biermann [2], [3], S. Narumi [8], L. Neder [9], J. F. Steffensen [19], T. Popoviciu [11], [12], D. L. Berman [1], Ş. E. Mikeladze [7], J. B. Scarborough [17], L. Merli [5], E. Pflanz [10], etc.

La o distribuţie de noduri de acest fel sîntem conduşi dacă de exemplu se caută un polinom de interpolare pentru funcţii de multe variabile pe care vrem să-l obţinem printr-o suprapunere (aplicare succesivă) de polinoame de interpolare (Newton sau Lagrange) de o singură variabilă. De fapt în general în acest mod au procedat majoritatea autorilor citaţi mai sus.

1) După numele lui Marchaud A. care le-a utilizat sistematic [4] în cazul s = 2. Aceasta a introdus denumirea de reţea de ordinul (n,p).

9. — Intr-o comunicare pe care am făcut-o în acest an [18] am arătat o distribuţie de noduri mai generală care ne asigură existenţa şi unicitatea polinoamelor de interpolare căutate pentru o funcţie oarecare $f(M)$ şi care prezintă o mare supleţe.

Este vorba de următorul sistem de $N = \prod_{i=1}^{s} (n_i + 1)$ noduri

$$M_{i_1 i_2 \dots i_s} = M_{i_1 i_2 \dots i_s} \left(t^1_{i_1}, t^2_{i_1 i_2}, \dots, t^s_{i_1 i_2 \dots i_s} \right) \tag{28}$$

$$(i_k = \overline{1, n_k + 1}\,;\; k = \overline{1, s})$$

O asemenea distribuţie de noduri vom zice că determină o speudo-reţea de ordinul $(n_1, n_2, \dots, n_s)$.

Se observă că avem $s\,!$ distribuţii de acest fel. In cele ce urmează vom utiliza însă mereu distribuţia (28).

Să demonstrăm existenţa şi unicitatea polinomului de interpolare (9) corespunzător speudo-reţelei definită de punctele (28).

Vom scrie mai întîi polinomul (3) sub forma

$$\sum_{k=o}^{n_s} A^{(k)} (t^1, t^2, \dots, t^{s-1}) \, (t^s)^k, \tag{29}$$

unde

$$A^{(i)} (t^1, t^2, \dots, t^{s-1}), \qquad (i = 0, 1, 2, \dots, n_s)$$

sînt polinoame de grad $(n_1, n_2, \dots, n_{s-1})$, şi vom face demonstraţia prin inducţie completă asupra lui s.

Pentru $s = 2$ avem sistemul

$$P_{n_1 n_2 \dots n_s} (M_{i_1 i_2}) = \sum_{k=o}^{n_2} A^{(k)} t^1_{i_1} (t^1_{i_1 i_2}) = O$$

$$(i_1 = \overline{1, n_1 + 1}\,;\; i_2 = \overline{1, n_2 + 1})$$

Fixîndu-l pe i_1 şi făcînd $i_2 = \overline{1, n_2 + 1}$ obţinem un sistem omogen de $n_2 + 1$ ecuaţii lineare cu necunoscutele $A^{(k)} (t^1_{i_1})$ $(k = 0, 1, \dots, n_2)$; determinantul acestui sistem este determinantul lui Vandermonde:

$$V \left(t^2_{i_1, 1}, t^2_{i_1, 2}, \dots, t^2_{i_1, n_2+1} \right)$$

care e diferit de zero, nodurile fiind presupuse distincte.

Rezultă că

$$A^{(k)} (t^1_{i_1}) = 0, \qquad (k = 0, 1, \dots, n_2)$$

şi deoarece acest lucru e adevărat pentru $i_1 = \overline{1, n_1 + 1}$, conchidem că

$$A^{(k)} (t^1) \equiv O\,.$$

Dar acesta ne spune că

$$P_{n_1 n_2} (M) = P_{n_1 n_2} (t^1, t^2) \equiv O$$

şi deci că sistemul (4) pentru $s = 2$ n-are soluţii nenule.

Să admitem acum că proprietatea e adevărată pentru $s - 1$. Ţinînd seama de (29) sistemul (4) se poate pune sub forma

$$\sum_{k=o}^{n_s} A^{(k)} (t^1_{i_1}, t^2_{i_1 i_2}, \dots, t^{s-1}_{i_1 i_2 \dots i_{s-1}}) \, (t^s_{i_1 i_2 \dots i_s})^k = O\,.$$

Dacă îi fixăm pe $i_1, i_2, \dots, i_{s-1}$ şi facem $i_s = \overline{1, n_s + 1}$ vom obţine un sistem linear şi omogen de $n_s + 1$ ecuaţii cu tot atîtea necunoscute. Determinantul acestui sistem este

$$V \left(t^s_{i_1 i_2 \dots i_{s-1}, 1}, \dots, t^s_{i_1 i_2 \dots i_{s-1}, n_s + 1} \right)$$

— care e diferit de zero. Rezultă că

$$A^{(k)} (t^1_{i_1}, t^2_{i_1 i_2}, \dots, t^{s-1}_{t_1 i_2 \dots i_{s-1}}) = O$$

$$(k = 0, 1, 2, \dots, n_s)\,.$$

Intrucît proprietatea a fost presupusă adevărată pentru $s - 1$, rezultă în definitiv că

$$P_{n_1 n_2 \dots n_s} (M) \equiv 0,$$

şi cu aceasta că sistemul (4) nu admite soluţii nenule.

10. — Pentru sistemul de noduri (28) se poate duce fără greutate expresia efectivă a polinomului de interpolare de grad cel mult $(n_1, n_2, \dots, n_s)$ relativ la funcţia $f(M)$. Cu alte cuvinte se poate găsi efectiv expresia polinoamelor fundamentale de interpolare (10) ale polinomului (9).

Întroducînd notaţiile

$$u^k_{i_1 i_2 \dots i_{k-1}} (t^k) = \prod_{i_k=1}^{n_k+1} (t^k - t^k_{i_1 i_2 \dots i_k}), \tag{30}$$

$$(k = 1, 2, \dots, s)$$

se găsesc următoarele expresii pentru polinoamele fundaméntale parţiale de interpolare

$$l^k_{i_1 i_2 \dots i_k} (t^k) = \frac{u^k_{i_1 i_2 \dots i_{k-1}} (t^k)}{(t^k - t^k_{i_1 i_2 \dots i_k}) \, \dot{u}^k_{i_1 i_2 \dots i_{k-1}} (t^k_{i_1 \dots i_k})} \tag{31}$$

$$(k = 1, 2, \dots, s)$$

care sînt determinate de condiţiile

$$l^k_{i_1 i_2 \dots i_k} (t^k_{i_1 i_2 \dots i_r}) = \begin{cases} 1, & \text{pt. } r = k \\ 0, & \text{pt. } r = 1, 2, \dots, k-1, k+1, \dots, n_k + 1. \end{cases} \tag{32}$$

Cele $N = \prod_{i=1}^{s} (n_i + 1)$ polinoame fundamentale de interpolare (10) sînt:

$$p_{i_1 i_2 \dots i_s} (M) = l^1_{i_1} (t^1) \, l^2_{i_1 i_2} (t^2) \dots l^s_{i_1 i_2 \dots i_s} (t^s) \tag{33}$$

$$(i_\alpha = \overline{1, n_\alpha + 1}\,;\; \alpha = \overline{1, s})$$

Aplicînd succesiv, începînd cu ultima variabilă, formula de interpolare a lui Lagrange cunoscută de la o variabilă, se găseşte că polinomul de interpolare (9), pentru pseudo-reţeaua (28), are următoarea expresie:

$$L_{n_1 n_2 \dots n_s} = \sum_{i_1=1}^{n_1+1} \cdots \sum_{i_s=1}^{n_s+1} l^1_{i_1}(t^1) \dots l^s_{i_1 i_2 \dots i_s}(t^s)\, f(M_{i_1 i_2 \dots i_s}). \tag{34}$$

11. — Vom transcrie aceste rezultate în cazurile spațiilor E_2 și E_3 modificînd puțin notațiile folosite pînă aici pentru a le avea așa cum le vom utiliza, în aceste cazuri, în aplicațiile pe care le vom face.

În cazul a două variabile fie funcția

$$f(M) = f(x,y) \tag{35}$$

și pseudo-rețeaua de ordinul (n,m) definită de punctele

$$M_{ik}(x_i, y_{ik}), \quad (i = \overline{1,n+1};\ k = \overline{1,m+1}) \tag{36}$$

Dacă utilizăm notațiile

$$u(x) = \prod_{i=1}^{n+1}(x - x_i), \quad v_i(y) = \prod_{k=1}^{m+1}(y - y_{ik}), \tag{37}$$

polinoamele fundamentale parțiale de interpolare (31) vor fi

$$l_i(x) = \frac{u(x)}{(x - x_i)\, u'(x_i)}, \quad g_{ik}(y) = \frac{v_i(y)}{(y - y_{ik})\, v_i' v(y_{ik})} \tag{37}$$

$$(i = \overline{1, n+1};\ k = \overline{1\, m+1})$$

iar polinomul de interpolare (34) va fi în acest caz

$$L_{nm}(x, y) = \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{k=1}^{m+1} \frac{u(x)}{(x - x_i)\, u'(x_i)} \cdot \frac{v_i(y)}{(y - y_{ik})\, v_i'(y_{ik})} f(x_i, y_{ik}) \tag{38}$$

sau mai scurt

$$L_{nm}(M) = \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{k=1}^{m+1} l_i(x)\, g_{ik}(y)\, f(M_{ik}). \tag{39}$$

In cazul a trei variabile avem funcția

$$f(M) = f(x, y, z) \tag{40}$$

care se interpolează pe sistemul de noduri :

$$M_{ikj}(x_i, y_{ik}, z_{ikj}) \tag{41}$$

$$(i = \overline{1, n+1};\ k = \overline{1, m+1};\ j = \overline{1, p+1}).$$

Alături de (37) mai folosim notația

$$w_{ik}(z) = \prod_{j=1}^{p+1}(z - z_{ikj})\,.$$

Polinoamelor de la (37) le mai atașăm polinomul

$$h_{ikj}(z) = \frac{w_{ik}(z)}{(z - z_{ikj})\, w'_{ik}(z_{ikj})}$$

Cu acestea, polinomul de interpolare de gradul cel mult (n,m,p) definit pe sistemul de noduri (41), relativ la funcția (40), se va scrie

$$L_{nmp}(x, y, z) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{k=1}^{m+1} \sum_{j=1}^{p+1} \frac{u(x)}{(x - x_i)\, u'(x_i)}\; \frac{v_i(y)}{(y - y_{ik}) v_i'(y_{ik})}\; \frac{w_{ik}(z)}{(z - z_{ikj})\, w'_{ik}(z_{ikj})} f(M_{ikj}) \tag{42}$$

sau mai scurt

$$L_{nmp}(M) = \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{k=1}^{m+1} \sum_{j=1}^{p+1} l_i(x)\, g_{ik}(y)\, h_{ikj}(z)\, f(M_{ikj}). \tag{43}$$

12. — In cazul particular al rețelei hiperparalelipipedice definită de punctele (27), rezultatele precedente se mai simplifică. Notăm că acest caz particular e deosebit de important din punct de vedere practic — mărturie sînt largile aplicații primite în lucrările autorilor citați la Nr. 8 din acest paragraf.

Polinoamele (20) în acest caz devin

$$u^k(t^k) = \prod_{i_k=1}^{n_k=1}(t^k - t^k_{ik}), \quad (k = \overline{1, s}) \tag{44}$$

iar polinoamele fundamentale parțiale de interpolare (31) iau forma

$$l^k_{ik}(t^k) = \frac{u^k(t^k)}{(t^k - t^k_{i_k})\, u^{k\prime}(t^k_{i_k})}, \quad (k = \overline{1, s}) \tag{45}$$

Formula (34) ne conduce în acest caz la polinomul clasic de interpolare al lui Lagrange cunoscut pentru mai multe variabile [1])

$$L_{n_1 n_2 \dots n_s}(M) = \sum_{i_1=1}^{n_1+1} \cdots \sum_{i_s+1}^{n_s+1} \prod_{k=1}^{s} l^k_{i_k}(t^k)\, f(t^1_{i_1}, t^2_{i_2}, \dots, t^s_{i_s}) \tag{46}$$

In cazul a două variabile vom folosi notațiile

$$u(x) = \prod_{i=1}^{n+1}(x - x_i), \quad v(y) = \prod_{k=1}^{m+1}(y - y_k) \tag{47}$$

$$l^1_i(x) = \frac{u(x)}{(x - x_i)\, u'(x_i)}, \quad l^2_k(y) = \frac{v(y)}{(y - y_k)\, v'(y_k)}\,. \tag{48}$$

Polinomul de interpolare de grad cel mult (n,m), definit pe rețeaua dreptunghiulară

$$M_{ik}(x_i, y_k), \quad i = \overline{1, n+1}; \quad k = \overline{1, m+1} \tag{49}$$

se scrie

$$L_{nm}\begin{pmatrix} x_1, x_2, \dots, x_{n+1} & ; f & x \\ y_1, y_2, \dots, y_{m+1} & & y \end{pmatrix} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{k=1}^{m+1} \frac{u(x)}{(x - x_i)\, u'(x_i)}\; \frac{v(y)}{(y - y_k)\, v'(y_k)} f(x_i, y_k) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{k=1}^{m+1} l^1_i(x)\, l^2_k(y)\, f(x_i, y_k). \tag{50}$$

1) Vezi de exemplu: D. L. Berman [1].

§ 3. — *Studiul diferențelor divizate în cazul distribuțiilor de noduri de la* § 2.

13. — Vom reveni acum asupra diferențelor divizate în cazul distribuțiilor de noduri (28) și (27), care sînt de mare utilitate din punct de vedere practic.

Diferența divizată (13), în cazul pseudo-rețelei (28), se poate pune — ținînd seama de expresia polinomului de interpolare de la (34) — sub forma următoare

$$\underline{\bigwedge}{}^{n_1\, n_2\, \dots\, n_s}_{i_1\, i_2\, \dots\, i_s} =$$

$$= [M_{i_1 i_2 \dots i_s};\, f] = \sum_{i_1=1}^{n_1+1} \cdots \sum_{i_s=1}^{n_s+1} \frac{f\,(M_{i_1 i_2 \dots i_s})}{\prod\limits_{k=1}^{s} \dot{u}^k_{i_1 i_2 \dots i_{k-1}} (t^k_{i_1 i_2 \dots i_k})}, \tag{51}$$

cu notațiile de la (28) și (30).

O s-o numim diferență divizată de ordinul $(n_1, \dots, n_s)$ relativă la funcția $f\,(M)$ și pseudo-rețeaua (28).

In cazul particular al rețelei Marchaud, determinată de (27), aceasta devine

$$\mathrm{D}^{n_1\, n_2\, \dots\, n_s}_{i_1\, i_2\, \dots\, i_s} =$$

$$\left[\begin{matrix} t^1_1, t^1_2, \dots, t^1_{n_1+1} \\ t^1_2, t^2_2, \dots, t^2_{n_2+1} \\ - - - - - \\ t^s_1, t^s_2, \dots, t^s_{n_s+1} \end{matrix} ;\; f\,(M) \right] = \sum_{i_1=1}^{n_1+1} \cdots \sum_{i_s=1}^{n_s+1} \frac{f\,(t^1_{i_1}, \dots, t^s_{i_s})}{\prod\limits_{k=s}^{s} \dot{u}^k\, (t^k_{i_k})} \tag{52}$$

Forma aceasta pentru diferența divizată de ordinul $(n_1, n_2, \dots, n_s)$ a fost dată de către Prof. T. Popoviciu [12] într-un memoriu mare și foarte important apărut în anul 1938 în „*Mathematica*".

Relativ la diferența divizată (51) dau următoarea formulă[1], care permite să se vadă care este structura expresiei sale

$$\underline{\bigwedge}{}^{n_1\, n_2\, \dots\, n_s}_{i_1\, i_2\, \dots\, i_s} =$$

$$= \Big[t^1_1, \dots, t^1_{n_1+1};\, \sum_{i_1=1}^{n_1+1} l^1_{i_1}\, (t^1) \Big[t^2_{i_1 1}, \dots, t^2_{i_1, n_2+1}; \dots ; \sum_{i_{s-1}=1}^{n_{s-1}+1} l^{s-1}_{i_1 \dots i_{s-1}} (t^{s-1}) \cdot$$

$$\cdot \Big[t^s_{i_1 \dots i_{s-1} 1}, \dots, t^s_{i_1 \dots i_{s-1}, n_s+1};\, f\,(M)\Big] \dots \Big]\Big]. \tag{53}$$

1) Această formulă pentru s = 2 am dat-o în [18].

In cazul diferenței divizate (52) aceasta se simplifică astfel

$$\mathrm{D}^{n_1\, n_2\, \dots\, n_s}_{i_1\, i_2\, \dots\, i_s} =$$

$$[t^1_1, \dots, t^1_{n_1+1};\; [t^2_1, \dots, t^2_{n_2+1}; \dots ; [t^s_1, \dots, t^s_{n_s+1}; f] \dots]] \tag{54}$$

și simbolul

$$[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{m+1};\, f]$$

care operează mai sus este un operator simetric care pe mulțimea de puncte (27) se bucură de proprietățile de comutativitate și asociativitate; e evident că acest lucru nu are loc în cazul lui (28). Așa dar în cazul unei rețele Marchaud o diferență divizată de ordin $(n_1, n_2, \dots, n_s)$ este o suprapunere de s diferențe divizate unidimensionale de ordin n_k, $k = \overline{1, s}$, ordinea de suprapunere fiind arbitrară.

Cunoașterea formulelor (53) și (54) e foarte utilă și din punct de vedere practic. Așa de exemplu, în cazul cînd coordonatele corespunzătoare ale nodurilor sînt echidistante aceste formule ne conduc la o exprimare simplă a diferențelor divizate cu ajutorul diferențelor simple, ordinare.

Intr-adevăr, ținînd seama de formula

$$[x_0, x_0 + h, \dots, x_0 + nh;\, f\,(x)] = \frac{\Delta^n_h f\,(x_0)}{n!\, h^n}, \tag{55}$$

unde

$$\Delta^n_h f\,(x_0) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \binom{n}{i} f\,(x_0 + ih),$$

dacă se consideră pseudo-rețeaua determinată de punctele

$$\begin{aligned} & t^1_{i_1} = t^1_0 + (i_1 - 1)\, h \\ & t^2_{i_1 i_2} = t^2_{i_1, 0} + (i_2 - 1)\, h_{i_1} \\ & - - - - - - - - \\ & t^s_{i_1 i_2 \dots i_s} = t^s_{i_1 i_2 \dots i_{s-1}, 0} + (i_s - 1)\, h_{i_1 i_2 \dots i_{s-1}}, \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} i_\alpha = \overline{1, n_\alpha + 1} \\ \alpha = \overline{1, s} \end{pmatrix} \tag{56}$$

formula (53) ne permite să dăm următoarea evaluare diferenței divizate de ordin $(n_1, n_2, \dots; n_s)$ definită pe sistemul de noduri (56)

$$\underline{\bigwedge}{}^{n_1\, n_2\, \dots\, n_s}_{i_1\, i_2\, \dots\, i_s} = \tag{57}$$

$$= \frac{1}{n_1!\, n_2! \dots n_s!}\, \frac{\Delta^{n_1}_h}{h^{n_1}} \left\{ \sum_{i_1=1}^{n_1+1} l^1_{i_1} (t^1_0)\, \frac{\Delta^{n_2}_{h_{i_1}}}{h^{n_2}_{i_1}} \left\{ \sum_{i_2=1}^{n_2+1} l^2_{i_1 i_2} (t^2_{i_1, 0})\, \frac{\Delta^{n_3}_{h_{i_1 i_2}}}{h^{n_3}_{i_1 i_2}} \right\{ \dots \right.\right.$$

$$\dots \left\{ \sum_{i_{s-1}=1}^{n_{s-1}+1} l^{s-1}_{i_1 \dots i_{s-1}} (t^s_{i_1 \dots i_{s+1}, 0})\, \frac{\Delta^{n_s}_{h_{i_1 \dots i_{s-1}}}}{h^{n_2}_{i_1 i_2 \dots i_{s-1}}}\, f\,(t^1_0, t^2_{i_1, 0}, \dots, t^s_{i_1 \dots i_{s-1}, 0}) \right\} \dots \Big\}\Big\}\Big\}.$$

In cazul particular important

$$\left.\begin{aligned} t^1_{i_1} &= t^1_0 + (i_1 - 1)\,h_1 \\ t^2_{i_2} &= t^2_0 + (i_2 - 1)\,h_2 \\ &- - - - - - - \\ t^s_{i_s} &= t^s_0 + (i_s - 1)h_s, \end{aligned}\right\} \quad (i_\alpha = \overline{1, n_\alpha + 1}\,;\ \alpha = \overline{1, s}) \tag{58}$$

sîntem conduşi de (54) la formula

$$\mathrm{D}^{n_1\, n_2\, \ldots\, n_s}_{i_1\, i_2\, \ldots\, i_s} = \tag{59}$$

$$= \frac{1}{n_1!\ldots!n_s!\,h_1^{n_1}\ldots h_s^{n_s}}\,\Delta^{n_1}_{h_1}\,\Delta^{n_2}_{h_2}\ldots\Delta^{n_s}_{h_s}\,f\,(t^1_0, t^2_0, \ldots, t^s_0) =$$

$$= \frac{1}{n_1!\ldots!\,n_s!\,h_1^{n_1}\ldots h_s^{n_s}}\,\Delta^{n_1\, n_2\ldots n_s}_{h_1\, h_2\ldots h_s}\,f\,(t^1_0, \ldots, t^s_0),$$

unde

$$\Delta^{n_1\, n_2\ldots n_s}_{h_1\, h_2\ldots h_s} = \Delta^{n_1}_{h_1}\,\Delta^{n_2}_{h_2}\ldots\Delta^{n_s}_{h_s}\,f =$$

$$= \sum_{j_1=0}^{n_1}\cdots\sum_{j_s=0}^{n_s}(-1)^{n_1+\cdots+n_s-j_1-\cdots-j_s}\binom{n_1}{j_1}\cdots\binom{n_s}{j_s}\,f\,(\ldots, t^k_0 +$$

$$(j_k - 1)\,h_k, \ldots). \tag{60}$$

Formula aceasta a fost dată de asemenea de Prof. T. Popoviciu [12] [1])

14. — Avînd în vedere formula de medie de la o variabilă

$$[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n+1}\,;\,f] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} \tag{61}$$

unde ξ este un număr cuprins între cel mai mic şi cel mai mare din numerele α_i, $i = \overline{1, n+1}$, şi ţinînd seama de formula (53), putem stabili următoarea formulă de medie

$$\Delta^{n_1\, n_2\ldots n_s}_{n_1\, n_2\ldots i_s} = \frac{1}{n_1!\,n_2!\ldots!\,n_s!}\left\{\frac{\partial^{n_1}}{\partial\,(t^1)^{n_1}}\sum_{i_1=1}^{n_1+1} l^1_{i_1}(t^1)\right\}\ldots\left\{\frac{\partial^{n_{s-1}}}{\partial\,(t^{s-1})^{n_{s-1}}}\sum_{i_{s-1}=1}^{n_{s-1}+1}\right.$$

$$\left. l^{s-1}_{i_1\ldots i_{s-1}}(t^{s-1})\left\{\frac{\partial^{n_s}}{\partial\,(t^s)^{n_s}}\,f\,(M)\right\}_{\xi^s_{i_1\ldots i_{s-1}}}\right\}_{\xi^{s-1}_{i_1\ldots, i_{s-2}}}\cdots\Big\}_{\xi^2_{i_1}}\Big\}_{\xi^1}, \tag{62}$$

unde $\xi^k_{i_1 i_2\cdots i_{k-1}}$ este un număr cuprins în cel mai mic interval care conţine numerele $t^k_{i_1 i_2\cdots i_{k-1}\,p}$, $(p = \overline{1, n_k + 1})$.

---

1) pag. 58.

Formula aceasta am dat-o deasemenea, pentru cazul $s = 2$, în comunicarea [18].

In cazul reţelei Marchaud de ordinul $(n_1, n_2, \ldots, n_s)$, despre care am mai vorbit, formula (62) se reduce la formula de medie

$$D^{n_1\, n_2\ldots n_s}_{i_1\, i_2\ldots i_s} = \begin{bmatrix} t^1_1, t^1_2, \ldots, t^1_{n_1+1} & \\ - - - - - & ;\ f \\ t^s_1, t^s_2, \ldots, t^s_{n_s+1} & \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{n_1!\,n_2!\ldots!\,n_s!}\left\{\frac{\partial^{n_1+\ldots+n_s}}{\partial\,(t^1)^{n_1}\ldots\partial\,(t^s)^{n_s}}\,f\,(M)\right\}_{M\,=\,Q}, \tag{63}$$

unde

$$M = M\,(t^1, t^2, \ldots, t^s),\ Q = Q\,(\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^s)$$

iar ξ^j este cuprins în cel mai mic interval care conţine numerele $t^j_{i_j}$, $(i_j = \overline{1, n_j + 1})$. Această formulă se cunoaşte (pentru $s = 2$) de la J. F. Steffensen [19] încă din 1927.

15. — O să dau acum cîteva formule de descompunere şi de recurenţă pentru diferenţele divizate.

Pentru simplificarea expunerii o să consider cazul a două variabile. Avînd funcţia $f\,(M) = f\,(x, y)$ şi sistemul de noduri (36), diferenţa divizată de ordinul (n, m) conform formulei (51) se poate pune sub forma

$$\Delta^{nm}_{ik} = \begin{bmatrix} x_i & \\ & ;\ f \\ y_{ik} & \end{bmatrix}^{i=\overline{1,n+1}}_{k=\overline{1,m+1}} = \sum_{i=1}^{n+1}\sum_{k=1}^{m+1}\frac{f\,(x_i, y_{ik})}{u'\,(x_i)\,v'_i(y_{ik})}. \tag{64}$$

Mai explicit, pentru a vedea mai uşor legea de formare, precum şi coordonatele nodurilor care intervin, o s-o notăm deasemenea şi astfel:

$$\begin{bmatrix} x_1,\quad x_2,\ \ldots,\quad x_{n+1} & \\ & ;\ f \\ y_{11}, \ldots, y_{1,m+1}\,;\,y_{21}, \ldots, y_{2,m+1}\,;\ldots;\,y_{n+1,\,1}, \ldots, y_{n+1,\,m+1} & \end{bmatrix} \tag{65}$$

Se stabileşte cu uşurinţă următoarea formulă de descompunere a diferenţei divizate (64), în raport cu x

$$\begin{bmatrix} x_i & \\ & ;\ f \\ y_{ik} & \end{bmatrix}^{i=\overline{1,n+1}}_{k=\overline{1,m+1}} = \begin{bmatrix} x_i & \\ & ;\ \dfrac{f\,(x, y)}{u_2\,(x)} \\ y_{ik} & \end{bmatrix}^{i=\overline{1,p}}_{k=\overline{1,m+1}} + \begin{bmatrix} x_i & \\ & ;\ \dfrac{f\,(x\,y)}{u_1\,(x)} \\ y_{ik} & \end{bmatrix}^{i=\overline{p+1,n+1}}_{k=\overline{1,m+1}} \tag{66}$$

unde

$$u_1\,(x) = \prod_{i=1}^{p}(x - x_i),\ u_2\,(x) = \prod_{i=p+1}^{n+1}(x - x_i).$$

De aici se deduce imediat formula de recurenţă relativă la x

$$\begin{bmatrix} x_i & \\ & ;\ f \\ y_{ik} & \end{bmatrix}^{i=\overline{1,n+1}}_{k=\overline{1,m+1}} = \frac{1}{x_{n+1} - x_1}\left(\begin{bmatrix} x_i & \\ & ;\ f \\ y_{ik} & \end{bmatrix}^{i=\overline{2,n+1}}_{k=\overline{1,m+1}} - \begin{bmatrix} x_i & \\ & ;\ f \\ y_{ik} & \end{bmatrix}^{i=\overline{1,n}}_{k=\overline{1,m+1}}\right) \tag{67}$$

Avem şi o formulă de descompunere în raport cu y, care e însă ceva mai complicată din cauza dependenţei ordonatelor nodurilor de abscisele lor:

$$\begin{bmatrix} x_i \\ y_{ip} \end{bmatrix} ; f \Bigg]_{p=\overline{1, m+1}}^{i=\overline{1, n+1}} = \begin{bmatrix} x_i & ; & \dfrac{f}{v_2} \\ y_{ip} & & \end{bmatrix}_{p=\overline{1, s}}^{i=\overline{1, n+1}} + \begin{bmatrix} x_i & ; & \dfrac{f}{v_1} \\ y_{ip} & & \end{bmatrix}_{p=\overline{s+1, m+1}}^{i=\overline{1, n+1}} \tag{68}$$

unde

$$v_1 = v_1(x, y) = \sum_{i=1}^{n+1} l_i(x)\, \alpha_i(y),\ v_2 = v_2(x, y) = \sum_{i=1}^{n+1} l_i(x)\, \beta_i(y)$$

iar

$$\alpha_i(y) = \prod_{p=1}^{s} (y - y_{ip}),\ \beta_i(y) = \prod_{p=s+1}^{m+1} (y - y_{ip}).$$

In cazul particular foarte important

$$y_{ik} = y_{yk},\ (i = \overline{1, n+1}\,;\, k = \overline{1, m+1}) \tag{69}$$

formula de descompunere (66) devine

$$\begin{bmatrix} x_1, \ldots, x_{n+1} \\ y_1, \ldots, y_{m+1} \end{bmatrix} ; f \Bigg] = \begin{bmatrix} x_1, \ldots, x_p & ; & \dfrac{f(x_1, y)}{u_2(x)} \\ y_1, \ldots, y_{m+1} & & \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_{p+1}, \ldots, x_{n+1} & ; & \dfrac{f(x, y)}{u(x)} \\ y_1, \ldots, y_{m+1} & & \end{bmatrix} \tag{70}$$

Din (67) şi analoaga sa deducem formulele de recurenţă

$$\begin{bmatrix} x_1, \ldots, x_{n+1} \\ y_1, \ldots, y_{m+1} \end{bmatrix} ; f \Bigg] = \frac{\begin{bmatrix} x_2, \ldots, x_{n+1} \\ y_1, \ldots, y_{m+1} \end{bmatrix} ; f \Bigg] - \begin{bmatrix} x_1, \ldots, x_n \\ y_1, \ldots, y_{m+1} \end{bmatrix} ; f \Bigg]}{x_{n+1} - x_1}, \tag{71}$$

$$\begin{bmatrix} x_1, \ldots, x_{n+1} \\ y_1, \ldots, y_{m+1} \end{bmatrix} ; f \Bigg] = \frac{\begin{bmatrix} x_1, \ldots, x_{n+1} \\ y_1, \ldots, y_{m+1} \end{bmatrix} ; f \Bigg] - \begin{bmatrix} x_1, \ldots, x_{n+1} \\ y_1, \ldots, y_m \end{bmatrix} ; f \Bigg]}{y_{m+1} - y_1}. \tag{72}$$

Formule de acest fel se pot deduce imediat şi în cazurile $s = 3, 4, \ldots$ dar nu le mai dau — ele fiind evidente dacă ţinem seama de formulele foarte importante (53) şi (54), de caracterul linear al diferenţei divizate şi bineînţeles de formula de recurenţă a diferenţei divizate unidimensionale.

§ 4. *Formule de medie pentru diferenţele divizate definite pe reţele simple de ordinul* $(n_1, n_2, \ldots, n_s)$. *Funcţii convexe de ordin superior.*

16. — In cazul reţelei Marchaud de ordinul $(n_1, n_2, \ldots, n_s)$, despre care am mai vorbit, formula (62) se reduce la formula de medie

$$\begin{bmatrix} t_1^1, t_2^1, \ldots, t_{n_1+1}^1 \\ - - - - - ; f \\ t_1^s, t_2^s, \ldots, t_{n_s+1}^s \end{bmatrix} = \tag{73}$$

$$= \frac{1}{n_1! \ldots ! n_s!} \left\{ \frac{\delta^{n_1 + \ldots + n_s}}{\delta (t^1)^{n_1} \ldots \delta (t^s)^{n_s}} f(M) \right\}_{M = Q},$$

unde

$$M = M(t_1, t_2, \ldots, t^s), \quad Q = Q(\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^s)$$

iar ξ^j este cuprins în cel mai mic interval care conţine numerele $t_{i_j}^j$ $(i_j = \overline{1, n_j + 1})$.

Această formulă în cazul $s = 2$ se poate vedea în lucrarea [19] a lui Steffensen publicată în 1927.

17. — Vom stabili acum o altă formulă de medie importantă.

Fie s numere naturale $p_1, p_2, \ldots, p_s$ astfel ca

$$1 \leq p_i \leq n_i + 2, \quad i = \overline{1, s}$$

Se verifică imediat, ţinînd seama de formula (52), că

$$\begin{bmatrix} t_1^1, t_2^1, \ldots, t_{n_1+2}^1 \\ - - - - - ; \prod_{i=1}^{s} (t^i - t_{p_i}^i) f(M) \\ t_1^s, t_2^s, \ldots, t_{n_s+2}^s \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} t_1^1, \ldots, t_{p_1-1}^1, t_{p_1+1}^1, \ldots, t_{n_1+2}^1 \\ - - - - - - - - ; f(M) \\ t_1^s, \ldots, t_{p_s-1}^s, t_{p_s+1}^s, \ldots, t_{n_s+2}^s \end{bmatrix}.$$

Folosind identităţile

$$t^i - t_{p_i}^i = \frac{(t_{p_i}^i - t_1^i)\,(t^i - t_{n_i+2}^i) + (t_{n_i+2}^i - t_{p_i}^i)\,(t^i - t_1^i)}{t_{n_i+2}^i - t_1},$$

$$(i = 1, 2, \ldots, s)$$

această formulă ne conduce la formula de medie

$$\begin{bmatrix} t_1^1, \ldots, t_{p_1-1}^1, t_{p_1+1}^1, \ldots, t_{n_1+2}^1 \\ - - - - - - - - - ; f(M) \\ t_1^s, \ldots, t_{p_s-1}^s, t_{p_s+1}^s, \ldots, t_{n_s+2}^s \end{bmatrix} = \tag{74}$$

$$= \frac{1}{\prod_{i=1}^{s} (t_{n_i+2}^i - t_1^i)} \sum_{j_1=1}^{2} \cdots \sum_{j_s=1}^{2} A_{j_1}^1 \ldots A_{j_s}^s D_{j_1 j_2 \ldots j_s}^{n_1 n_2 \ldots n_s},$$

unde

$$A_1^k = t_{p_k}^k - t_1^k, \quad A_2^k = t_{n_k+2}^k - t_k^k$$

$$(k = 1, 2, \ldots, s)$$

şi

$$D_{j_1 j_2 \ldots j_s}^{n_1 n_2 \ldots n_s} = \begin{bmatrix} t_{j_1}^1, t_{j_1+1}^1, \ldots, t_{j_1+n_1}^1 \\ - - - - - - ; f(M) \\ t_{j_s}^s, t_{j_s+1}^s, \ldots, t_{j_s+n_s}^s \end{bmatrix}.$$

De exemplu, în cazul $s = 2$ această formulă se scrie

$$\begin{bmatrix} x_1, \ldots, x_{p-1}, x_{p+1}, \ldots, x_{n+2} \\ y_1, \ldots, y_{q-1}, y_{q+1}, \ldots, y_{m+2} \end{bmatrix}; f(x, y) \Bigg] =$$

$$= \frac{1}{(x_{n+1} - x_1)(y_{m+2} - y_1)} \Bigg\{ (x_p - x_1)(y_q - y_1) \begin{bmatrix} x_1, \ldots, x_{n+1} & ; f \\ y_1, \ldots, y_{m+1} & \end{bmatrix} +$$

$$+ (x_{n+2} - x_p)(y_q - y_1) \begin{bmatrix} x_2, \ldots, x_{n+2} & ; f \\ y_1, \ldots, y_{m+1} & \end{bmatrix} + (x_p - x_1)(y_{n+2} - y_q) \cdot$$

$$\cdot \begin{bmatrix} x_1, \ldots, x_{n+1} & ; f \\ y_2, \ldots, y_{m+2} & \end{bmatrix} + (x_{n+2} - x_p)(y_{m+2} - y_q) \begin{bmatrix} x_2, \ldots, x_{n+2} & ; f \\ y_2, \ldots, y_{m+2} & \end{bmatrix} \Bigg\}.$$

18. — In cazul unei variabile Prof. T. Popoviciu a dat în mai multe lucrări [13], [14], [16], următoarea teoremă de medie:

Dacă avem şirul ordonat

$$x_1 < x_2 < \ldots < x_m, \quad (m \geqq n + 2)$$

orice diferenţă divizată de ordinul $n + 1$ pe $n + 2$ puncte extrase din şirul (75) este o medie aritmetică (generalizată) a diferenţelor divizate de ordinul $n + 1$ luate pe puncte consecutive din acest şir.

Adică avem

$$[x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_{n+2}}; f] = \sum_{i=1}^{m-n-1} A_i \, [x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+n+1}; f],$$

unde coeficienţii $A_i > o$ nu depind de $f(x)$ şi

$$\sum_{i=1}^{m-n-1} A_i = 1$$

iar

$$1 = i_1 < i_2 < \ldots < i_{n+2} = m.$$

Avînd în vedere că în cazul unei reţele Marchaud o diferenţă divizată de ordinul $(n_1, n_2, \ldots, n_s)$ este o suprapunere de s diferenţe divizate unidimensionale (vezi 54) de ordin $n_k \, (k = \overline{1, s})$, ordinea de suprapunere fiind arbitrară, această teoremă se va putea extinde imediat la cazul a s variabile

Anume avem teorema de medie:

Dacă în spaţiul euclidian E_s avem următorul sistem de $N = m_1 m_2 \ldots m_s$ puncte

$$P_{i_1 i_2 \ldots i_s}(t^1_{i_1}, t^2_{i_2}, \ldots, t^s_{i_s}) \tag{76}$$

$$(i_k = 1, 2, \ldots, m_k;\ k = 1, 2, \ldots, s)$$

şi presupunem că

$$t^r_1 < t^r_2 < \ldots < t^r_{m_r}$$

$$(m_r \geqq n_r + 2;\ r = 1, 2, \ldots, s),$$

orice diferenţă divizată de ordinul $(n_1 + 1, n_2 + 1, \ldots, n_s + 1)$ pe $N' = \prod_{k=1}^{s} (n_k + 1)$ puncte extrase din (76) este o medie aritmetică (generalizată) de felul următor

$$\begin{bmatrix} t^1_{i_{1,1}}, t^1_{i_{1,2}}, \ldots, t^1_{i_{1,n_1+2}} & \\ - - - - - - & ; f(M) \\ - - - - - - & \\ t^s_{i_{s,1}}, t^s_{i_{s,2}}, \ldots, t^s_{i_{s,n_s+2}} & \end{bmatrix} = \tag{77}$$

$$= \sum_{j_1=1}^{m_1-n_1-1} \cdots \sum_{j_s=1}^{m_s-n_s-1} C_{j_1, j_1, \ldots j_s} \begin{bmatrix} t^1_{j_1}, t^1_{j_1+1}, \ldots, t^1_{j_1+n_1+1} & \\ - - - - - - & i f(M) \\ - - - - - - & \\ t^s_{j_s}, t^s_{j_s+1}, \ldots, t^s_{j_s+n_s+1} & \end{bmatrix},$$

unde coeficienţii

$$C_{j_1, j_2, \ldots, j_k} \gtreqless 0, \ (i_k = 1, 2, \ldots, m_k - n_k - 1;\ k = 1, 2, \ldots, s)$$

sînt independenţi de funcţia $f(M)$ şi

$$\sum_{j_1=1}^{m_1-n_1-1} \cdots \sum_{j_s=1}^{m_s-n_s-1} C_{j_1, j_2, \ldots, j_s} = 1,$$

iar

$$1 = i_{p,1} < i_{p,2} < \ldots < i_{p,n_p+2} = m_p$$

$$(p = 1, 2, \ldots, s).$$

19. — Vom spune, împreună cu Prof. T. Popoviciu [14] că o funcţie $f(M)$ finită şi uniformă într-un hiperparalipiped D din E_s este convexă, neconcavă, polinomială, neconvexă sau concavă de ordinul $(n_1, n_2, \ldots, n_s)$, după cum avem

$$\begin{bmatrix} t^1_1, t^1_2, \ldots, t^1_{n_1+2} & \\ t^2_1, t^2_2, \ldots, t^2_{n_2+2} & ; f(M) \\ - - - - - & \\ t^s_1, t^s_2, \ldots, t^s_{n_s+2} & \end{bmatrix} >, \geqq, \leqq, < O, \tag{78}$$

oricare ar fi punctele $P(t^1_{i_1}, t^1_{i_2}, \ldots, t^s_{i_s})$, $(i_k = \overline{1, n_k + 2},\ k = \overline{1, s})$ din D care sînt nodurile unei reţele simple de ordinul $(n_1, n_2, \ldots, n_s)$.

Acestea alcătuiesc clasa importantă a funcţiilor de ordinul $(n_1, n_2, \ldots, n_s)$.

Funcţiunile polinomiale de ordinul $(n_1, n_2, \ldots, n_s)$ sînt aşa denumitele pseudo-polinoame de ordinul $(n_1, n_2, \ldots, n_s)$.

Să considerăm, în particular, că $f(M)$ e definită pe cele N puncte de la (76).

Condiţia necesară şi suficientă ca $f(M)$ să fie convexă, neconcavă, polinomială, neconvexă sau concavă de ordinul $(n_1, n_2, \ldots, n_s)$ este ca

$$\begin{bmatrix} t^1_{j_1}, t^1_{j_1+1}, \ldots, t^1_{j_1+n_1+1} \\ t^2_{j_2}, t^2_{j_2+1}, \ldots, t^2_{j_2+n_2+1} \\ - - - - - - \\ t^s_{j_s}, t^s_{j_s+1}, \ldots, t^s_{j_s+n_s+1} \end{bmatrix} ; f(M) \quad >, \geqq, =, \leqq, < 0$$

$$(j_p = 1, 2, \ldots, m_p - n_p - 1 ; p = 1, 2, \ldots s)$$

Aceasta rezultă tocmai din teorema de medie de la punctul precedent şi definiţia de mai sus a funcţiilor de ordinul $(n_1, n_2, \ldots, n_s)$.

Proprietăţi interesante şi diverse detalii asupra funcţiunilor convexe de una şi două variabile reale se pot vedea în importanta monografie [14, publicată la Paris în 1944 de către Prof. T. Popoviciu.

§ 5. *Formule de interpolare polinomială. Diverse expresii ale restului.* — Sîntem în măsură acum să stabilim, la fel cum s-a făcut în cazul unei variabile, formule de interpolare polinomială, dînd şi expresiile efective ale restului în aceste formule.

Dacă începînd de la ultima variabilă se aplică succesiv formula de interpolare a lui Lagrange, se găseşte în cazul funcţiei $f(M) = f(t^1, t^2, \ldots, t^s)$ şi al nodurilor (28) următoarea formulă de interpolare

$$f(M) = L_{n_1 n_2 \ldots n_s}(M) + R_s(M), \tag{79}$$

unde $L_{n_1 \ldots n_s}(M)$ este polinomul de interpolare (34) iar restul $R_s(M)$ are expresia

$$R_s(M) = \sum_{p=1}^{s} \sum_{i_1=1}^{n_1+1} \cdots \sum_{i_{p-1}=1}^{n_{p-1}+1} l^1_{i_1}(t^1) \ldots l^{p-1}_{i_1 \ldots i_{p-1}}(t^{p-1})\, u^p_{i_1 \ldots i_{p-1}} S^p_{i_1 \ldots i_{p-1}}, \tag{80}$$

unde

$$S^p_{i_1 \ldots i_{p-1}} = [t^p, t^p_{i_1 \ldots i_{p-1}\, 1}, \ldots, t^p_{i_1 \ldots i_{p-1},\, n_p+1} ; f(t^1_{i_1}, \ldots, t^{p-1}_{i_1 \ldots i_{p-1}}, t^p, \ldots, t^s)]. \tag{81}$$

Ţinînd seama de formula de medie (61) şi presupunînd că $f(M)$ admite în D derivate de ordin $n_p + 1$ în raport cu t^p, $(p = \overline{1, s})$, restul se poate pune şi sub forma

$$R_s(M) = \sum_{p=1}^{s} \sum_{i_1=1}^{n_1+1} \cdots \sum_{i_{p-1}=1}^{n_{p-1}+1} l^1_{i_1}(t^1) \ldots l^{p-1}_{i_1 \ldots i_{p-1}}(t^{p-1})\, u^p_{i_1 \ldots i_{p-1}}(t^p) \cdot$$

$$\cdot \frac{1}{(n_p+1)!} \frac{\partial^{n_p+1}}{\partial (\xi^p)^{n_p+1}} f(t^1_{i_1}, \ldots, t^{p-1}_{i_1 \ldots i_{p-1}}, \xi^p_{i_1 \ldots i_{p-1}}, t^{p+1}, \ldots t^s). \tag{82}$$

Aşa de exemplu în cazul a două variabile, folosind notaţiile de la (35) şi (36), avem formula de interpolare

$$f(x, y) = L_{nm}(x, y) + R_2(x\, y) \tag{83}$$

unde $L_{nm}(x, y)$ este polinomul de interpolare (38), iar restul conform lui (80), are expresia

$$R_2(x, y) = u(x)\, [x, x_1, \ldots, x_{n+1} ; f(x, y)] + \sum_{i=1}^{n+1} l_i(x)\, v_i(y) \cdot$$

$$\cdot [y, y_{i1}, \ldots, y_{i,m+1} ; f(x_i, y)] \tag{84}$$

sau după (82)

$$R_2(x, y) = \frac{u(x)}{(n+1)!} \frac{\partial^{n+1} f(\xi, y)}{\partial \xi^{n+1}} + \sum_{i=1}^{n+1} \frac{l_i(x)\, v_i(y)}{(m+1)!} \frac{\partial^{m+1} f(x_i, \eta_i)}{\partial \eta_i^{m+1}} \tag{85}$$

In cazul lui E_3, (79) ne conduce la formula

$$f(x, y, z) = L_{nmp}(x, y, z) + R_3(x, y, z), \tag{86}$$

unde în membrul al doilea apare polinomul de interpolare de la (42), iar restul se scrie

$$R_3(x, y, z) = u(x)\, [x, x_1, \ldots, x_{n+1} ; f(x, y, z)] + \sum_{i=1}^{n+1} l_i(x)\, v_i(y) \cdot$$

$$\cdot [y, y_{i1}, \ldots, y_{i,m+1} ; f(x_i, y, z)] + \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{k=1}^{m+1} l_i(x)\, g_{ik}(y)\, w_{ik}(z) \cdot$$

$$\cdot [z, z_{ik1}, \ldots, z_{ik,\, p+1} ; f(x_i, y_{ik}, z)]. \tag{87}$$

20. — In cazul reţelei Marchaud de ordinul $(n_1, n_2, \ldots, n_s)$, formula de interpolare (79) devine

$$f(M) = L_{n_1, n_2, \ldots n_s}(M) + R_s(M), \tag{88}$$

unde $L n_1 n_2 \ldots n_s(M)$ este polinomul de interpolare (46) iar restul în conformitate cu (80) se scrie

$$R_s(M) = \sum_{p=1}^{s} \sum_{i_1=1}^{n_1+1} \cdots \sum_{i_{p-1}=1}^{n_{p-1}} l^1_{i_1}(t^1) \ldots l^{p-1}_{i_{p-1}}(t^{p-1})\, u^p(t^p)\, S^p, \tag{89}$$

unde

$$S^p = [t^p, t^p_1, \ldots, t^p_{n_p+1} ; f(t^1_{i_1}, \ldots, t^{p-1}_{i_{p-1}}, t^p, \ldots, t^s)].$$

Dacă ţinem seama că

$$\sum_{i_1=1}^{n_1+1} \cdots \sum_{i_p=1}^{n_p+1} l^1_{i_1}(t^1) \ldots l^{p-1}_{i_{p-1}}(t^{p-1})\, u^p(t^p)\, S^p =$$

$$= u^p(t^p)\, [t^p, t^p_1, \ldots, t^p_{n_p+1} ; F],$$

unde

$$F = \sum_{i_1=1}^{n_1+1} \cdots \sum_{i_p=1}^{n_p+1} l^1_{i_1}(t^1) \ldots l^{p-1}_{i_{p-1}}(t^{p-1})\, f(t^1_{i_1}, \ldots, t^{p-1}_{i_{p-1}}, t^p, \ldots t^s)$$

şi se aplică din aproape în aproape formula

$$f(x) = L(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1} ; f | x) + \prod_{i=1}^{n+1} (x - \alpha_i)\, [x, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1} ; f],$$

obţinem în definitiv următoarea expresie foarte simplă a restului din formula (88)

$$R_s(M) = \tag{90}$$

$$= \sum u^1(t^1)\,[t^1, t_1^1, \ldots, t_{n_1+1}^1 ; f(M)] -$$

$$- \sum u^1(t^1)\,u^2(t^2) \begin{bmatrix} t^1, t_1^1, \ldots, t_{n_1+1}^1 \\ t^2, t_1^2, \ldots, t_{n_2+1}^2 \end{bmatrix} ; f(M) \Bigg| +$$

$$+ \sum u^1(t^1)\,u^2(t^2)\,u^3(t^3) \begin{bmatrix} t^1, t_1^1, \ldots, t_{n_1+1}^1 & \\ t^2, t_1^2, \ldots, t_{n_2+1}^2 & ; f(M) \\ t^3, t_1^3, \ldots, t_{n_3+1}^3 & \end{bmatrix}$$

— — — — — — — — — — — — — — —

$$+ (-1)^s \prod_{i=1}^{s} u^i(t^i) \begin{bmatrix} t^1, t_1^1, t_2^1, \ldots, t_{n_1+1}^1 & \\ t^2, t_1^2, t_2^2, \ldots, t_{n_2+1}^2 & ; f(M) \\ - - - - - - & \\ t^s, t_1^s, t_2^s, \ldots, t_{ns+1}^s & \end{bmatrix}$$

Forma aceasta a restului a fost dată de J. F. Steffensen [19].

Se observă imediat că restul sub forma (90) are $2^s - 1$ termeni.

In particular în cazul sistemului de noduri (49) formula (84) devine

$$R_2(x, y) = u(x)\,[x, x_1, \ldots, x_{n+1} ; f(x, y)] + v(y)\,[y, y_1, \ldots, y_{m+1} ; f(x,y)]$$

$$- u(x)\,v(y) \begin{bmatrix} x, x_1, \ldots, x_{n+1} & \\ & ; f \\ y, y_1, \ldots, y_{m+1} & \end{bmatrix},$$

polinoamele $u(x)$ şi $v(y)$ avînd expresiile de la (47).

§ 6. *O teoremă remarcabilă asupra restului formulelor de interpolare relative la reţelele Marchaud.*

21. — Acum vom enunţa şi demonstra următoarea teoremă foarte importantă din punct de vedere teoretic relativ la structura restului (84).

TEOREMĂ. Dacă funcţia $f(M) = f(t^1, t^2, \ldots, t^s)$ este continuă şi admite derivatele parţiale necesare continue, restul (90) al formulei de interpolare (88) se poate pune sub forma

$$R_s(M) = \sum \frac{u^1(t^1)}{(n_1+1)!} \frac{\partial^{n_1+1} f(\xi^1, t^2, \ldots, t^s)}{\partial (\xi^1)^{n_1+1}} - \tag{92}$$

$$- \sum \frac{u^1(t^1)\,u^2(t^2)}{(n_1+1)!\,(n_2+1)!} \frac{\partial^{n_1+n_2+2} f(\xi^1, \xi^2, t^3, \ldots, t^s)}{\partial (\xi^1)^{n_1+1}\,\partial (\xi^2)^{n_2+1}} +$$

$$+ \sum \frac{u^1(t^1)\,u^2(t^2)\,u^3(t^3)}{(n_1+1)!\,(n_2+1)!\,(n_3+1)!} \frac{\partial^{n_1+n_2+n_3+3} f(\xi^1, \xi^2, \xi^3, t^4, \ldots, t^s)}{\partial (\xi^1)^{n_1+1}\,\partial (\xi^2)^{n_2+1}\,\partial (\xi^3)^{n_3+1}}$$

— — — — — — — — — — — — — — — — — — — —

$$+ (-1)^s \prod_{i=1}^{s} \frac{u^i(t^i)}{(n_i+1)!} \frac{\partial^{n_1+\ldots+n_s+s} f(\xi^1, \ldots, \xi^s)}{\partial (\xi^1)^{n_1+1} \ldots \partial (\xi^s)^{n_s+1}},$$

unde ξ^i este cuprins în cel mai mic interval care conţine numerele

$$t_1^i, t_2^i, \ldots, t_{n_i+1}^i, t^i.$$

Demonstraţia.

Pentru a nu complica inutil expunerea, demonstraţia o voi da pentru cazul $s = 3$, folosind notaţiile de la Nr. 11.

In acest caz restul (80) devine

$$R_3(x, y, z) = u(x)\,[x, x_1, \ldots, x_{n+1} ; f] + v(y)\,[y, y_1, \ldots, y_{m+1} ; f]$$

$$+ w(z)\,[z, z_1, \ldots, z_{p+1} ; f] - u(x)\,v \mid y) \begin{bmatrix} x, x_1, \ldots, x_{n+1} & \\ & ; f \\ y, y_1, \ldots, y_{m+1} & \end{bmatrix} - \tag{93}$$

$$- u(x)\,w(z) \begin{bmatrix} x, x_1, \ldots, x_{n+1} & \\ & ; f \\ z, z_1, \ldots, z_{p+1} & \end{bmatrix} - v(y)\,w(z) \begin{bmatrix} y, y_1, \ldots, y_{m+1} & \\ & ; f \\ z, z_1, \ldots, z_{p+1} & \end{bmatrix} +$$

$$+ u(x)\,v(y)\,w(z) \begin{bmatrix} x, x_1, \ldots, x_{n+1} & \\ y, y_1, \ldots, y_{m+1} & ; f \\ z, z_1, \ldots, z_{p+1} & \end{bmatrix}.$$

In cele ce urmează o să mă folosesc de formula de medie (61), de formula (54) şi am să ţin seama de proprietăţile de aditivitate şi omogenietate ale diferenţei divizate unidimensionale.

In baza acestora restul (93) se poate scrie succesiv

$$R_3(x, y, z) = u(x)\,[x, x_1, \ldots, x_{n+1} ; f] + v(y)\,[y, y_1, \ldots, y_{m+1} ; f] +$$

$$+ w(z)\,[z, z_1, \ldots, z_{p+1} ; f] -$$

$$- u(x)\,v(y)\,[y, y_1, \ldots, y_{m+1} ; [x, x_1, \ldots, x_{n+1} ; f]] -$$

$$- u(x)\,w(z)\,[z, z_1, \ldots, z_{p+1} ; [x, x_1, \ldots, x_{n+1} ; f]] -$$

$$- v(y)\,w(z)\,[z, z_1, \ldots, z_{p+1} ; [y, y_1, \ldots, y_{m+1} ; f]] +$$

$$+ u(x)\,v(y)\,w(z)\,[z, z_1, \ldots, z_{p+1} ; [y, y_1, \ldots, y_{m+1} ; [x, x_1, \ldots, x_{n+1} ; f]]|.)$$

Intrucît

$$[x, x_1, \ldots, x_{n+1} ; f] = \frac{1}{(n+1)!} \frac{\partial^{n+1} f(\xi, y, z)}{\partial \xi^{n+1}}, \tag{94}$$

avem în continuare

$$R_3(x, y, z) = \frac{u(x)}{(n+1)!} \frac{\partial^{n+1} f(\xi, y, z)}{\partial \xi^{n+1}} + v(y)\,[y, y_1, \ldots, y_{m+1} ; f] +$$

$$+ w(z)\,[z, z_1, \ldots, z_{p+1} ; f] - u(x)\,v(y) \left| y, y_1, \ldots, y_{m+1} ; \frac{1}{(n+1)!} \frac{\partial^{n+1} f(\xi\, y, z)}{\partial \xi^{n+1}} \right|$$

$$- u(x)\, w(z) \left[z, z_1, \ldots, z_{p+1} ; \frac{1}{(n+1)!} \frac{\partial^{n+1} f(\xi, y, z)}{\partial \xi^{n+1}} \right]$$

$$- v(y)\, w(z)\, [z, z_1, \ldots, z_{p+1} ; [y, y_1, \ldots, y_{m+1} ; f]] +$$

$$+ u(x)\, v(y)\, w(z) \left[z, z_1, \ldots, z_{p+1} ; \left[y, y_1, \ldots, y_{m+1} ; \frac{1}{(n+1!)} \frac{\partial^{n+1} f(\xi, y, z)}{\partial \xi^{n+1}}\right]\right]$$

$$= \frac{u(x)}{(n+1)!} \frac{\partial^{n+1} f(\xi, y, z)}{\partial \xi^{n+1}} + v(y) \Big\{ [y, y_1, \ldots, y^{m+1} ; f] -$$

$$- \left[y, y_1, \ldots, y_{m+1} ; \frac{u(x)}{(n+1)!} \frac{\partial^{n+1} f(\xi, y, z)}{\partial \xi^{n+1}} \right] -$$

$$- [y, y_1, \ldots, y_{m+1} ; w(z)\, [z, z_1, \ldots, z_{p+1} ; f]] +$$

$$+ \left[y, y_1, \ldots, y_{m+1} ; w(z) \left[z, z_1, \ldots, z_{p+1} ; \frac{u(x)}{(n+1)!} \frac{\partial^{n+1} f(\xi, y, z)}{\partial \xi^{n+1}} \right] \right] \Big\} +$$

$$+ w(z)\, [z, z_1, \ldots, z_{p+1} ; f] - u(x)\, w(z) \left[z, z_1, \ldots, z_{p+1} ; \frac{1}{(n+1)!} \frac{\partial^{n+1} f(\xi, y, z)}{\partial \xi^{n+1}} \right],$$

sau încă

$$R_3(M) = \frac{u(x)}{(n+1)!} \frac{\partial^{n+1} f(\xi, y, z)}{\partial \xi^{n+1}} + w(z)\, [z, z_1, \ldots, z_{p+1} ; f] \tag{95}$$

$$+ v(y)\, [y, y_1, \ldots, y_{m+} ; F(x, y, x)] -$$

$$- u(x)\, w(z)\, \left[z, z_1, \ldots, z_{p+1} ; \frac{1}{(n+1)!} \frac{\partial^{n+1} f(\xi, y, z)}{\partial \xi^{n+1}} \right],$$

unde am notat

$$F(x, y, z) = f(x, y, z) - \frac{u(x)}{(n+1)!} \frac{\partial^{n+1} f(\xi, y, z)}{\partial \xi^{n+1}} -$$

$$- w(z)\, [z, z_1, \ldots, z_{p+1} ; f]$$

$$+ w(z) \left[z, z_1, \ldots, z_{p+1} ; \frac{u(x)}{(n+1)!} \frac{\partial^{n+1} f(\xi, y, z)}{\partial \xi^{n+1}} \right].$$

In baza aceleiași formule de medie (61) avem

$$[y, y_1, \ldots, y_{m+1} ; F] = \frac{1}{(m+1)!} \frac{\partial^{m+1} F(x, \eta, z)}{\partial \eta^{m+1}} = \tag{96}$$

$$= \frac{1}{(m+1)!} \frac{\partial^{m+1} f(x, \eta, z)}{\partial \eta^{m+1}} - \frac{u(x)}{(n+1)!\,(m+1)!} \frac{\partial^{n+m+2} f(\xi, \eta, z)}{\partial \xi^{n+1}\, \partial \eta^{m+1}}$$

$$- w(z) \left[z, z_1, \ldots, z_{p+1} ; \frac{1}{(m+1)!} \frac{\partial^{m+1} f(x, \xi, z)}{\partial \eta^{m+1}} \right] +$$

$$+ w(z) \left[z, z_1, \ldots, z_{p+1} ; \frac{u(x)}{(n+1)!\,(m+1)!} \frac{\partial^{n+m+2} f(\xi, \eta, z)}{\partial \xi^{n+1}\, \partial \eta^{m+1}} \right].$$

Inlocuind în (95) primim

$$R_3(M) = \frac{u(x)}{(n+1)!} \frac{\partial^{n+1} f(\xi, y, z)}{\partial \xi^{n+1}} + \frac{v(y)}{(m+1)!} \frac{\partial^{m+1} f(x, \eta, z)}{\partial \eta^{m+1}} -$$

$$- \frac{u(x)\, v(y)}{(n+1)!\,(m+1)!} \frac{\partial^{n+m+2} f(\xi, \eta, z)}{\partial \xi^{n+1}\, \partial \eta^{m+1}} + w(z) \Big\{ [z, z_1, \ldots, z_{p+1} ; f] -$$

$$- \left[z, z_1, \ldots, z_{p+1} ; \frac{u(x)}{(n+1)!} \frac{\partial^{n+1} f(\xi, y, z)}{\partial \xi^{n+1}} \right]$$

$$- \left[z, z_1, \ldots, z_{p+1} ; \frac{v(y)}{(m+1)!} \frac{\partial^{m+1} f(x, \eta, z)}{\partial \eta^{m+1}} \right]$$

$$- \left[z, z_1, \ldots, z_{p+1} ; \frac{u(x)\, v(y)}{(n+1)!\,(m+1)!} \frac{\partial^{n+m+2} f(\xi, \eta, z)}{\partial \xi^{n+1}\, \partial \eta^{m+1}} \right] \Big\}$$

sau

$$R_3(M) = \frac{u(x)}{(n+1)!} \frac{\partial^{n+1} f(\xi, y, z)}{\partial \xi^{n+1}} + \frac{v(y)}{(m+1)!} \frac{\partial^{m+1} f(x, \eta, z)}{\partial \eta^{m+1}} -$$

$$- \frac{u(x)\, v(y)}{(n+1)!\,(m+1)!} \frac{\partial^{n+m+2} f(\xi, \eta, z)}{\partial \xi^{n+1}\, \partial \eta^{m+1}} + w(z)\, [z, z_1, \ldots, z_{p+1} ; H], \tag{97}$$

unde

$$H = f(x, y, z) - \frac{u(x)}{(n+1)!} \frac{\partial^{n+1} f(\xi. y, z)}{\partial \xi^{n+1}} - \frac{v(y)}{(m+1)!} \frac{\partial^{m+1} f(x, \eta, z)}{\partial \eta^{m+1}} +$$

$$+ \frac{u(x)\, v(y)}{(n+1)!\,(m+1)!} \frac{\partial^{n+m+2} f(\xi, \eta, z)}{\partial \xi^{n+1}\, \partial \eta^{m+1}}.$$

Aplicînd iarăși formula de medie pentru diferențele divizate unidimensionale primim

$$[z, z_1, \ldots, z_{p+1} ; H] = \frac{1}{(p+1)!} \frac{\partial^{p+1} H}{\partial z^{p+1}} \Bigg|_{z = \zeta} = \frac{1}{(p+1)!} \frac{\partial^{p+1} f(x, y, \zeta)}{\partial \zeta^{p+1}} -$$

$$- \frac{u(x)}{(n+1)!\,(p+1)!} \frac{\partial^{n+p+2} f(\xi, y, \zeta)}{\partial \xi^{n+1}\, \partial \zeta^{p+1}} -$$

$$-\frac{v(y)}{(m+1)!\,(p+1)!}\,\frac{\partial^{m+p+2} f(x,\eta,\zeta)}{\partial \eta^{m+1}\,\partial \zeta^{p+1}}+$$

$$+\frac{u(x)\,v(y)}{(n+1)!\,(m+1)!\,(p+1)!}\,\frac{\partial^{n+m+p+3} f(\xi,\eta,\zeta)}{\partial \xi^{n+1}\,\partial \eta^{m+1}\,\partial \zeta^{p+1}}. \qquad (98)$$

Dacă se înlocuieşte această valoare în (91) se obţine în definitiv

$$R_3(x,y,z)=\frac{u(x)}{(n+1)!}\,\frac{\partial^{n+1} f(\xi,y,z)}{\partial \xi^{n+1}}+\frac{v(y)}{(m+1)!}\,\frac{\partial^{m+1} f(x,\eta,z)}{\partial \eta^{m+1}}+$$

$$+\frac{w(z)}{(p+1)!}\,\frac{\partial^{p+1} f(x,y,\zeta)}{\partial \zeta^{p+1}}-\frac{u(x)\,v(y)}{(n+1)!\,(m+1)!}\,\frac{\partial^{n+m+2} f(\xi,\eta,z)}{\partial \xi^{n+1}\,\partial \eta^{m+1}}-$$

$$-\frac{u(x)\,w(z)}{(n+1)!\,(p+1)!}\,\frac{\partial^{n+p+2} f(\xi,y,\zeta)}{\partial \xi^{n+1}\,\partial \zeta^{p+1}}-$$

$$-\frac{v(y)\,w(z)}{(m+1)!\,(p+1)!}\,\frac{\partial^{m+p+2} f(x,\eta,\zeta)}{\partial \eta^{m+1}\,\partial \zeta^{p+1}}+$$

$$+\frac{u(x)\,v(y)\,w(z)}{(n+1)!\,(m+1)!\,(p+1)!}\,\frac{\partial^{n+m+p+3} f(\xi,\eta,\zeta)}{\partial \xi^{n+1}\,\partial \eta^{m+1}\,\partial \zeta^{p+1}}, \qquad (99)$$

adică tocmai formula pe care voiam s-o demonstrăm. Aici, după cum s-a putut vedea din aplicarea formulelor de medie (94), (96) şi (98), numerele ξ, η, ζ, se găsesc respectiv în cele mai mici intervale, care conţin numerele: $x, x_1, \ldots, x_{n+1}$; $y, y_1, \ldots, y_{m+1}$; $z, z_1, \ldots, z_{p+1}$.

In cazul a două variabile demonstraţia este foarte simplă. Avem succesiv

$$R_{nm}(x,y)=u(x)\,[x, x_1,\ldots,x_{n+1}; f(x,y)]+v(y)\,[y, y_1,\ldots,y_{m+1}; f(x,y)]-$$

$$-u(x)\,v(y)\begin{bmatrix} x, x_1,\ldots,x_{n+1} \\ y, y_1,\ldots,y_{m+1} \end{bmatrix}; f\,\Bigg] =$$

$$=u(x)\,[x, x_1,\ldots,x_{n+1};\ f(x,y)]+v(y)\,[y, y_1,\ldots,y_{m+1};\ f(x,y)]-$$

$$-u(x)\,v(y)\,[y, y_1,\ldots,y_{m+1};\ [x, x_1,\ldots,x_{n+1}; f(x,y)]]=$$

$$=\frac{u(x)}{(n+1)!}\,\frac{\partial^{n+1} f(\xi,y)}{\partial \xi^{n+1}}+v(y)\,[y, y_1,\ldots,y_{m+1}; f(x,y)]-$$

$$-u(x)\,v(y)\left[y, y_1,\ldots,y_{m+1};\ \frac{1}{(n+1)!}\,\frac{\partial^{n+1} f(\xi,y)}{\partial \xi^{n+1}}\right]=$$

$$=\frac{u(x)}{(n+1)!}\,\frac{\partial^{n+1} f(\xi,y)}{\partial \xi^{n+1}}+v(y)\left[y, y_1,\ldots,y_{m+1}; f(x,y)-\right.$$

$$\left.-\frac{u(x)}{(n+1)!}\,\frac{\partial^{n+1} f(\xi,y)}{\partial \xi^{n+1}}\right]=\frac{u(x)}{(n+1)!}\,\frac{\partial^{n+1} f(\xi,y)}{\partial \xi^{n+1}}+$$

$$+\frac{v(y)}{(m+1)!}\left(\frac{\partial^{m+1} f(x,\eta)}{\partial \eta^{m+1}}-\frac{u(x)}{(n+1)!}\,\frac{\partial^{n+m+2} f(\xi,\eta)}{\partial \xi^{n+1}\,\partial \eta^{m+1}}\right).$$

In definitiv avem

$$R_{nm}=\frac{u(x)}{(n+1)!}\,\frac{\partial^{n+1} f(\xi,y)}{\partial \xi^{n+1}}+v(y)\,\frac{\partial^{m+1} f(x,\eta)}{\partial \eta^{m+1}}-$$

$$-\frac{u(x)\,v(y)}{(n+1)!\,(m+1)!}\,\frac{\partial^{n+m+2} f(\xi,\eta)}{\partial \xi^{n+1}\,\partial \eta^{m+1}}. \qquad (100)$$

Observaţie. Importanţa foarte mare a formei (92) a restului formulei de interpolare (88) constă în faptul că în toate cele 2^s-1 derivate parţiale care intervin figurează aceeaşi $\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^s$ — rezultat care nu se poate obţine dacă se aplică diferenţelor divizate din formula (90) formulele de medie (63).

Problema aceasta se pare că a preocupat pe mulţi matematicieni. De pildă J. F. Steffensen în ediţia din 1950, pag. 106, a excelenţei sale cărţi asupra interpolării [19], vorbind despre cazul a două variabile spune că ar fi greşit să se creadă că în restul (100) numerele ξ şi η din cei trei termeni nu ar putea fi aceiaşi. Nu dă însă nici un fel de justificare acestei afirmaţii şi nici nu arată faptul care l-a determinat s-o facă.

Pe de altă parte bazaţi pe teorema precedentă, subliniem că trebuie rectificată afirmaţia lui S. E. Mikeladze făcută în anul 1953, la pagina 469 a cărţii sale ,,Cislennîe metodî matematiceskogo analiza'' [7] cînd face în mod special observaţia că ξ şi η din cei trei termeni ai formulei (100) nu sînt aceiaşi. Inexactitatea aceasta a apărut datorită faptului că s-a aplicat celor 3 diferenţe divizate care intervin în rest formulele de medie (63).

§ 7. *Noi formule de interpolare definite pe o pseudo-reţea de ordinul* (n, m).

22. — Considerînd pentru simplificare cazul $s = 2$ o să generalizăm formula de interpolare

$$f(x,y)=L\begin{pmatrix} x_1, x_2,\ldots,x_{n+1} \\ y_1, y_2,\ldots,y_{m+1} \end{pmatrix}; f \left|\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right) + R_2(x,y), \qquad (101)$$

unde restul are expresia (85).

Deasemenea o să generalizăm şi formula echivalentă cu aceasta

$$f(x,y)=L(x_1, x_2,\ldots,x_{n+1}; f \mid x)+L(y_1, y_2,\ldots,y_{m+1}; f \mid y)-$$

$$-L\begin{pmatrix} x_1, x_2,\ldots,x_{n+1} \\ y_1, y_2,\ldots,y_{m+1} \end{pmatrix}; f \left|\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right) + r_2(x,y), \qquad (102)$$

unde

$$r_2(x,y)=u(x)\,v(y)\begin{bmatrix} x, x_1,\ldots,x_{n+1} \\ y, y_1,\ldots,y_{m+1} \end{bmatrix}; f\,\Bigg]. \qquad (103)$$

O să ne folosim de definiţia (64) a diferenţei divizate de ordinul (n, m) pe pseudo-reţeaua definită de (36), procedînd astfel: deoarece căutăm o formulă de aproximaţie care să ne dea valoarea funcţiei $f(x, y)$ într-un punct oarecare $M(x, y)$ a dreptunghiului D

$$a \leqq x \leqq b, \quad c \leqq y \leqq d \tag{104}$$

unde

$$a \leqq x_i \leqq b, \quad c \leqq y_{ik} \leqq d$$

$$(i = \overline{1, n+1}\,;\ k = \overline{1, m+1})$$

o să luăm printre abscisele nodurilor pseudo-reţelei şi pe x iar pe paralela la Oy, la distanţa x, vom lua $m + 1$ ordonate variabile, pe care le vom considera că sînt

$$y_i(x), \quad (i = \overline{1, m+1}) \tag{105}$$

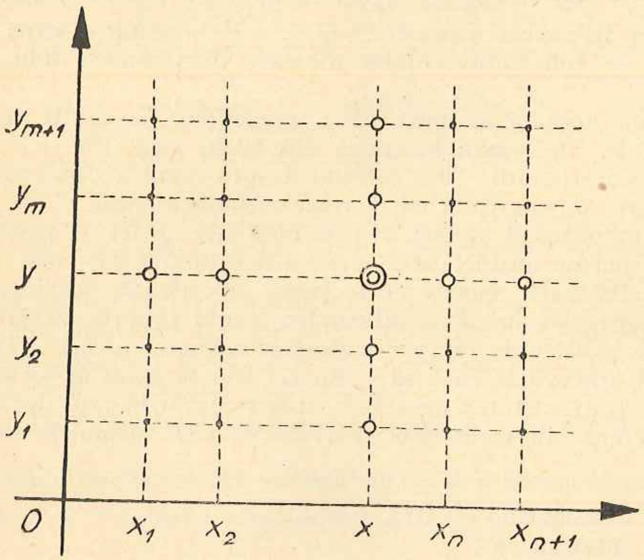

Fig. 1. Cazul reţelei Marchaud de ordinul (n+1, m+1).

Funcţiile acestea le luăm astfel ca

$$y_i(x_s) = y_s \tag{106}$$

$$(i = \overline{1, m+1}\,;\ s = \overline{1, n+1})$$

Le putem lua de exemplu,

$$y_p(x) = \sum_{i=1}^{n+1} l_i(x)\, y_{,p},\ p = \overline{1, m+1}) \tag{107}$$

acestea fiind funcţiile cele mai simple care verifică condiţiile (106).

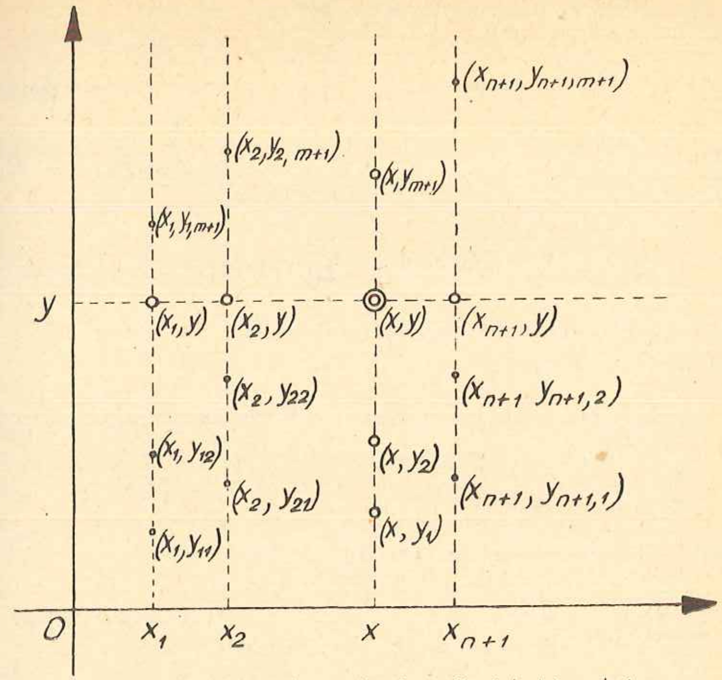

Fig. 2. Cazul pseudo reţelei de ordinul (n+1, m+1).

Să facem ipoteza că

$$y \neq y_{ik}, \quad (i = \overline{1, n+1}\,;\ k = \overline{1, m+1}) \cdot$$

Evaluînd acum următoarea diferenţă divizată de ordinul $(n + 1, m + 1)$

$$\left[\begin{matrix} x, x_i \\ y, y_p(x)\,;\, y, y_{ik} \end{matrix}\ ; f\right] \begin{matrix} i = \overline{1, n+1} \\ k = \overline{1, m+1} \end{matrix}$$

obţinem formula de interpolare

$$f(x, y) = \sum_{p=1}^{m+1} \frac{V(y)\, f[x, y_p(x)]}{(y - y_p(x)\, V'(y_p(x))} + \sum_{i=1}^{n+1} \frac{u(x)}{(x - x_i)\, u'(x_i)} \frac{V(y)}{v_i(y)} f(x_i, y). \tag{108}$$

$$- \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{p=1}^{m+1} \frac{u(x)}{(x - x_i)\, u'(x_i)} - \frac{V(y)}{(y - y_{ip})\, v_i'(y_{ip})} f(x_i, y_{ip}) + R_2(x, y),$$

unde

$$R_2(x, y) = u(x)\, V(y) \left[\begin{matrix} x, x_i \\ y, y_p(x)\,;\, y, y_{ip} \end{matrix}\ ; f\right| \begin{matrix} i = \overline{1, n+1} \\ p = \overline{1, m+1} \end{matrix}\ . \tag{109}$$

Am folosit aici notaţia

$$V(y) = \prod_{p=1}^{m+1} [y - y_p(x)]\,. \tag{110}$$

Formula (108) se mai poate scrie astfel

$$f(x, y) = L\left(y_1(x), \ldots, y_{m+1}(x); f \mid y)\right) + L\left(x_1, \ldots, x_{n+1}; \frac{f}{W}\right) \mid x) \, V(y)$$

$$- \sum_{i=p}^{n+1} \sum_{p=1}^{m+1} \frac{u(x)}{(x - x_i) \, u'(x_i)} \cdot \frac{V(y)}{(y - y_{ip}) \, v_i'(y_{ip})} f(x, y_{ip}) + R_2(x, y), \tag{111}$$

unde

$$W = W(x, y) = \sum_{i=1}^{n+1} l_i(x) \, v_i(y). \tag{112}$$

Formula (111) generalizează formula (102).

Avînd în vedere că

$$L[y_1(x), \ldots, y_{m+1}(x); f \mid y] = f(x, y) - V(y) [y, y_1(x), \ldots, y_{m+1}(x); f],$$

$$\frac{f(x, y)}{W(x, y)} = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{u(x)}{(x - x_i) \, u'(x_i) \, v_i(y)} f(x, y) + u \left[(x) x, x_1, \ldots, x_{n+1}; \frac{f}{W}\right],$$

din formula (111) deducem următoarea

$$f(x, y) = \sum_{=1}^{n+1} \sum_{p=1}^{m+1} \frac{u(x)}{(x - x_i) \, u'(x_i)} \frac{W(x, y)}{(y - y_{ip}) \, v_i'(y_{ip})} f(x, y_{ip}) + R_2'(x, y), \tag{113}$$

unde

$$R_2(x, y) = W[y, y_1(x), \ldots, y_{m+1}(x); f] + u(x) \, W\left[x, x_1, \ldots, x_{n+1}; \frac{f}{W}\right]$$

$$- u(x) \, W \begin{bmatrix} x, x_i & \\ y, y_p(x); \, y, y_{ip} & ; f \end{bmatrix}_{p=\overline{1, m+1}}^{i=\overline{1. n+1}}. \tag{114}$$

Formula aceasta generalizează în alt sens decît cel de la (77) formula (94).

23. — Polinomul de interpolare (38) îl putem scrie sub o formă care e utilă pentru aplicații.

Se observă că putem scrie succesiv

$$L_{nm}(x, y) = \sum_{p=1}^{n+1} l_p(x) \, L(y_{p1}, \ldots, y_{p, m+1}; f(x_p, y)) =$$

$$= L(x_1, \ldots, x_{n+1}; \sum_{p=1}^{n+1} l_p(x) \, L(y_{p1}, \ldots, y_{p, m+1}; f(x_p, y)) =$$

$$L\left(x_1, \ldots, x_{n+1}; \sum_{p=1}^{n+1} \sum_{k=1}^{m} l_p(x) (y - y_{p1}) \ldots (y - y_{pk}) \cdot\right.$$

$$\left. \cdot [y_{p1}, \ldots y_{p, k+1}; f(x_p, y)]\right) = \sum_{i=0}^{n} (x - x_1) \ldots (x - x_i) \cdot$$

$$\cdot \left| x_1, \ldots, x_{i+1}; \sum_{p=1}^{n+1} \sum_{k=0}^{m} l_p(x) \prod_{j=1}^{k} (y - y_{pj}) [y_{p1}, \ldots, y_{p, k+1}; f(x_p, y)] \right|$$

și în definitiv

$$L_{nm}(x, y) = \sum_{p=1}^{m+1} \sum_{i=0}^{n} \sum_{k=0}^{m} (x - x) \ldots (x - x_i) (y - y_{p1}) \ldots (y - y_{pk}) \cdot$$

$$\cdot [x_1, \ldots, x_{i+1}; l_p(x) \, [y_{p1}, \ldots, y_{p \, k+1}; f(x, y)]] \cdot \tag{115}$$

Polinomul acesta reprezintă o generalizare a polinomului de interpolare a lui Newton cunoscut de la o variabilă

$$N_n(x) = \sum_{i=0}^{n} (x - x_1) \ldots (x - x_i) [x_1 \, x_2, \ldots, x_{i+1}; f], \tag{116}$$

— pe care de altfel l-am utilizat mai sus.

Polinomul (115) eventual îl putem scrie sub forma

$$L_{nm}(x, y) = \sum_{p=1}^{n+1} \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=0}^{m} (x - x_1) \ldots (x - x_i) (y - y_{p1}) \ldots (y - y_{pk}) \cdot$$

$$\cdot \begin{bmatrix} x_1, \ldots, x_{i+1} & \\ y_1, \ldots, y_{p, k+1} & ; l_p(x) \, f(x_p, y) \end{bmatrix} \cdot \tag{117}$$

In cazul rețelei Marchaud de ordinul (n, m) acest polinom se transformă în polinomul de interpolare al lui Newton, foarte important — ca formă — din punct de vedere practic,

$$N_{nm}(x, y) = \sum_{i=o}^{n} \sum_{k=o}^{m} (x - x_1) \ldots (x - x_i) (y - y_1) \ldots (y - y_k) \cdot$$

$$\cdot \begin{bmatrix} x_1, \ldots, x_{i+1} & \\ y_1, \ldots, y_{n+1} & ; f(x, y) \end{bmatrix}. \tag{118}$$

Acest polinom a fost stabilit încă de Narumi [8] în 1920. El și ulterior J. F. Steffenson [19], S. E. Mikeladze [7], etc., au stabilit deasemenea — aplicînd succesiv formula de interpolare a lui Newton de la o variabilă

$$f(x) = N_n(x) + \left(\prod_{i=1}^{n+1} (x - x_i)\right) [x, x_1, \ldots, x_{n+1}; f] \tag{119}$$

— următoarele formule de interpolație

$$f(x, y) = N_{n, m}(x, y) + R_2(x, y, z), \tag{120}$$

unde restul e dat de (91),

$$f(x, y, z) = N_{n, m, p}(x, y, z) + R_3(x, y), \tag{121}$$

cu

$$N_{n, m, p}(x, y, z) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} \sum_{k=0}^{p} (x - x_1) \ldots (x - x_i) (y - y_1) \ldots (y - y_j).$$

$$\cdot (z - z_1) \dots (z - z_k) \times \begin{bmatrix} x_1, \dots, x_{i+1} \\ y_1, \dots, y_{j+1} \; ; f \\ z_1, \dots, z_{k+1} \end{bmatrix}, \tag{122}$$

iar restul $R_3\,(x, y, z)$ se obține din (90).

Cu metoda amintită se ajunge în mod natural la formule de acest tip.

Formulele de interpolare ale lui Newton sînt importante în practică întrucît ele fac să se introducă succesiv coordonatele nodurilor de interpolare, permițînd să se folosească în mod util tabelele de diferențe divizate sau de diferențe simple.

§ 8. *Calculul practic al polinoamelor de interpolare cu ajutorul tabelelor de diferențe divizate.*

24. — Fie

$$x_1, x_2, \dots, x_p \tag{123}$$

un șir de p puncte distincte de pe axa Ox și

$$y_1, y_2, \dots, y_q \tag{124}$$

un șir de q puncte distincte de pe axa Oy.

Să sonsiderăm următoarea diferență divizată de ordinul (k, l)

$$D_{i,j}^{(k,l)} = \begin{bmatrix} x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k} \\ y_j, y_{j+1}, \dots, y_{j+l} \end{bmatrix}; f$$

$$\begin{pmatrix} i = 1, 2, \dots, p - k\,;\, k = 0,1, \dots, p - 1 \\ j = 1, 2, \dots, q - l\,;\, l = 0,1, \dots, q - 1 \end{pmatrix}$$

In această notație indicii superiori ne arată ordinul diferenței divizate, iar cei inferiori ne indică primele numere din (123) și (124) pe care e luată diferența divizată.

In această diferență divizată, după cum se vede, se consideră puncte consecutive din șirul (123), respectiv din șirul (124).

Formulele de recurență (71) și (72) ne conduc respectiv la formulele

$$D_{i,j}^{(k,l)} = \frac{D_{i+1,j}^{(k-1,l)} - D_{i,j}^{(k-1,l)}}{x_{i+k} - x_i} \tag{126}$$

$$D_{i,j}^{(k,l)} = \frac{D_{i,j+1}^{(k,l-1)} - D_{i,j}^{(k,l-1)}}{y_{j+l} - y_j}. \tag{127}$$

Formula de interpolare a lui Newton relativă la $f\,(x, y)$ și la nodurile $M_{ik}\,(x_i, y_k)$, $(i = \overline{1, p}\,;\, k = \overline{1, q})$ se scrie

$$f\,(x, y) = \sum_{i=0}^{p-1} \sum_{j=0}^{q-1} (x - x_1) \dots (x - x_i)\,(y - y_1) \dots (y - y_i) \cdot$$

$$\cdot \begin{bmatrix} x_1, \dots, x_{i+1} \\ y_\cdot, \dots, y_{j+1} \end{bmatrix}; f \Bigg] + R_2\,(x, y), \tag{128}$$

unde (129)

$$R_2\,(x, y) = (x - x_1) \dots (x - p_p)\,[x, x_1, \dots, x_p\,; f] + (y - y_1) \dots (y - y_q) \cdot$$

$$\cdot [y, y_1, \dots, y_q; f] - (x - x_1) \dots (x - x_p)\,(y - y_1) \dots (y - y_q) \begin{bmatrix} x, x_1, \dots, x_p \\ y, y_\cdot, \dots, y_q \end{bmatrix}; f \Bigg].$$

Coeficienții
$$\begin{bmatrix} x_1, x_2, \dots, x_{i+1} \\ y_1, y_2, \dots, y_{j+1} \end{bmatrix}; f \Bigg]$$

ai polinomului de interpolare care figurează în formula (128) se pot calcula cu ajutorul unor tabele triunghiulare de diferențe divizate de felul acelora care se utilizează în cazul unei singure variabile.[1])

Să scriem mai explicit, folosind notațiile precedente, polinomul de interpolare dat mai sus, prin care se aproximează funcția $f\,(x, y)$

$$L \begin{pmatrix} x_1, \dots, x_p \\ y_1, \dots, y_q \end{pmatrix}; f \left| \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \right) = \sum_{i=0}^{p-1} \sum_{j=0}^{q-1} (x - x_1) \dots (x - x_i)\,(y - y_1) \dots (y - y_j) \cdot$$

$$\cdot \begin{bmatrix} x_1, \dots, x_{i+1} \\ y_1, \dots, y_{j+1} \end{bmatrix}; f \Bigg] = \sum_{i=0}^{p-1} \sum_{j=0}^{q-1} (x - x_1) \dots (x - x_i)\,(y - y_1) \dots (y - y_j)\, D_{1,1}^{(i,j)} =$$

$$= f\,(x_1, y_1) + (x - x_1)\, D_{1,1}^{(1,0)} + (x - x_1)\,(x - x_2)\, D_{1,1}^{(2.0)} + \dots +$$

$$+ (x - x_1) \dots (x - x_{p-1})\, D_{1,1}^{(p-1,0)} + (y - y_1)\, D_{1,1}^{(0,1)} + (x - x_1)\,(y - y_1)\, D_{1,1}^{(1,1)} +$$

$$+ (x - x_1)\,(x - x_2)\,(y - y_1)\, D_{1,1}^{(2,1)} + \dots + (x - x_1) \dots (x - x_{p-1})\,(y - y_1)\, D_{1,1}^{(p-1,1)}$$

$$+ (y - y_1)\,(y - y_2)\, D_{1,1}^{(0,2)} + (x - x_1)\,(y - y_1)\,(y - y_2)\, D_{1,1}^{(1,2)} +$$

$$+ (x - x_1)\,(x - x_2)\,(y - y_1)\,(y - y_2)\, D_{1,1}^{(2,2)} + \dots + (x - x_1) \dots (x - x_{p-1})\, D_{1,1}^{(p-1,0)} +$$

$$+ (y - y_1)\,(y - y_2)\, D_{1,1}^{(p-1,2)} +$$

$$+ -$$

$$+ (y - y_1) \dots (y - y_{q-1})\, D_{1,1}^{(0,q-1)} + (x - x_1)\,(y - y_1) \dots (y - y_{q-1})\, D_{1,1}^{(1,q-1)} + \dots +$$

$$+ (x - x_1) \dots (x - x_{p-1})\,(y - y_1) \dots (y - y_{q-1})\, D_{1,1}^{(p-1,q-1)}.$$

In mod practic coeficienții acestui polinom găsesc că este foarte avantajos să-i calculăm prin tabele în felul următor:

1) Relativ la aceasta menționez lucrarea importantă a Prof. T. Popoviciu [15].

Formăm mai întîi tabelul valorilor funcției

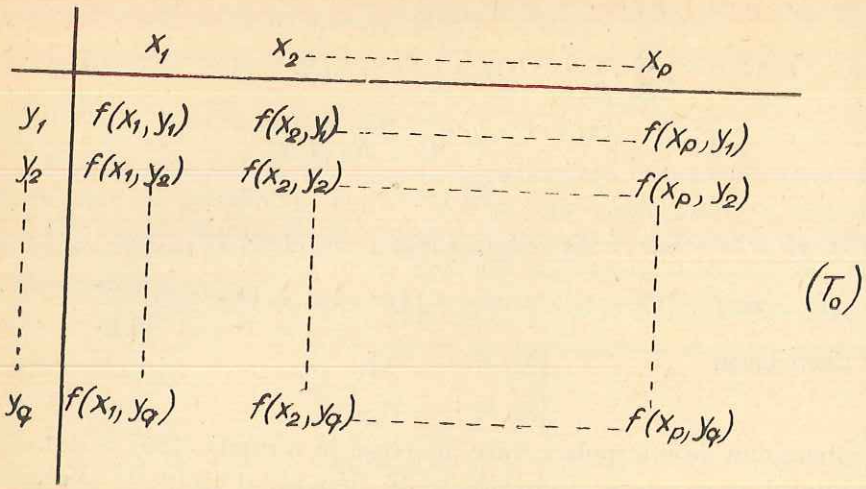

Fig. 3.

Apoi pentru fiecare coloană a tabelului valorilor funcției o să formăm tabelul triunghiular al diferențelor divizate relativ la y

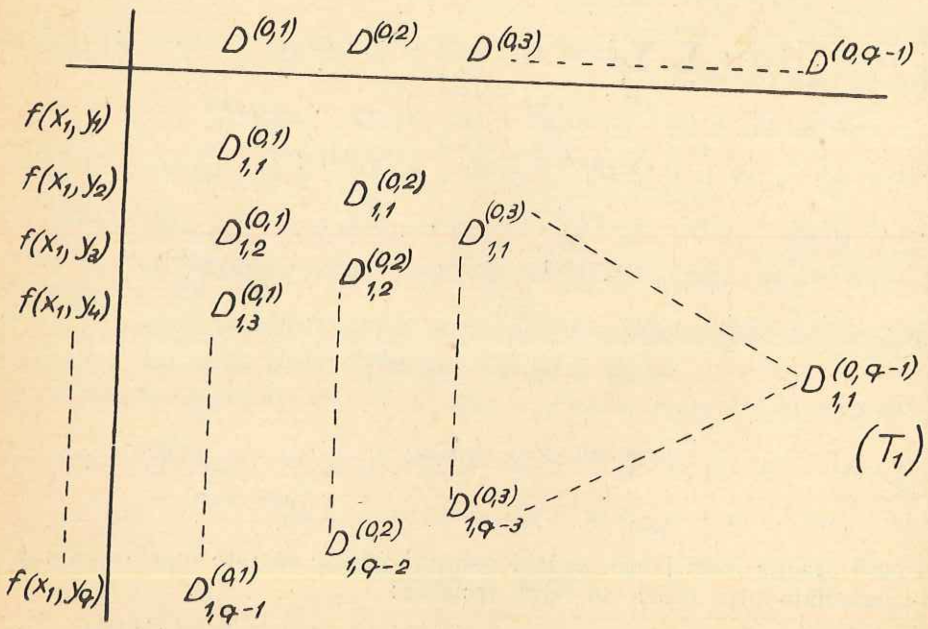

Fig. 4.

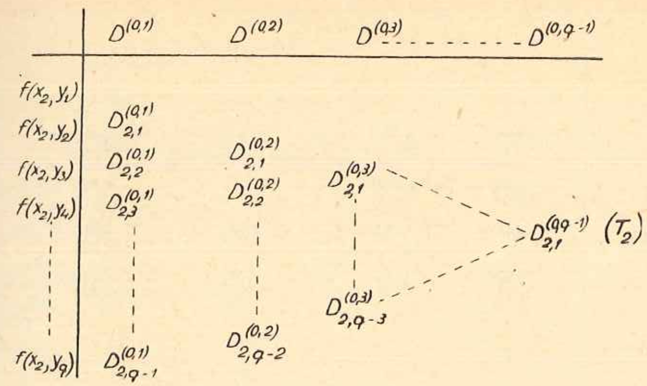

Fig. 5.

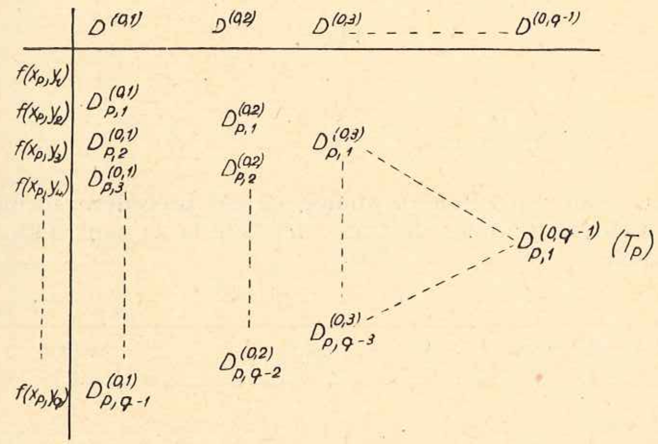

Fig. 6.

Formăm acum următorul tabel dreptunghiular, în care prima coloană e formată din linia întîia din tabelul valorilor (T_0), iar în dreapta barei verticale prima linie e formată din elementele laturei descendente din (T_1), a doua linie e formată din elementele laturei descendente din $(T_2), \ldots$, ultima linie e formată din elementele laturei descendente a tabelului triungiular de diferențe divizate (T_p).

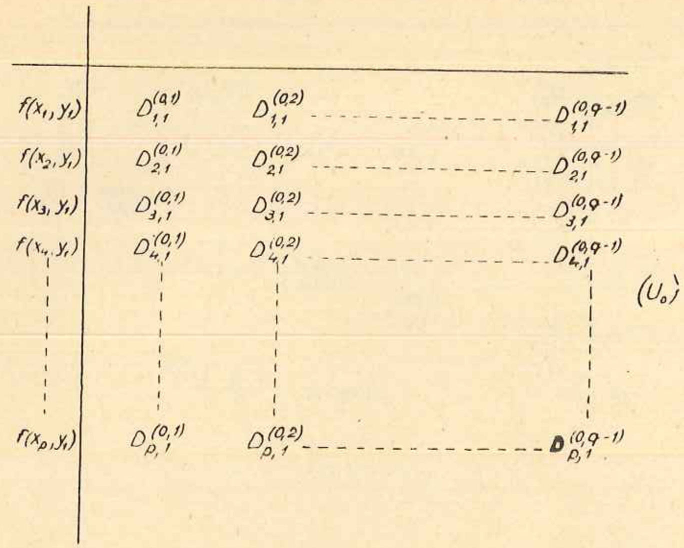

Fig. 7.

Aplicăm acum un procedeu analog cu cel precedent formînd tabelele triunghiulare ale diferenţelor divizate, relative la x, pentru fiecare coloană a acestui tabel

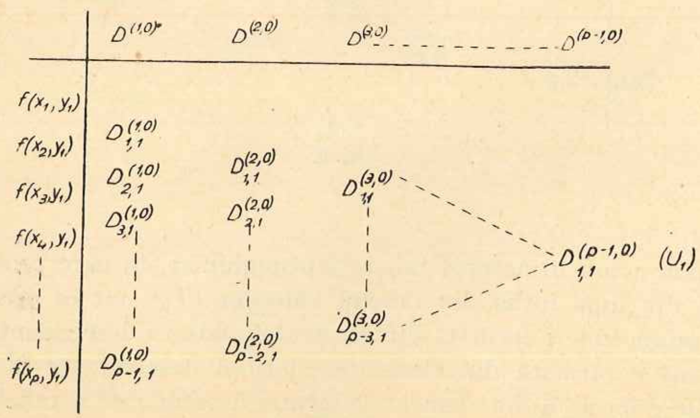

Fig. 8.

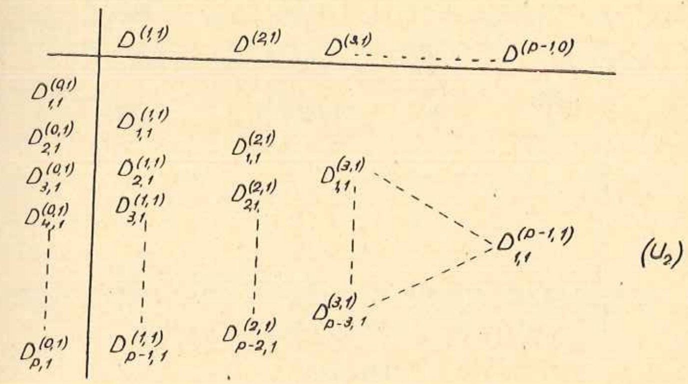

Fig. 9.

— —

— —

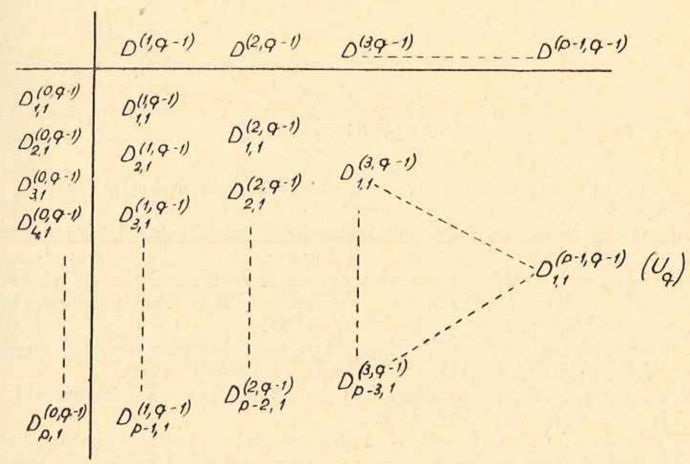

Fig. 10.

Şi în sfîrşit, cu ajutorul elementelor laturilor descendente ale tabelelor $(U_1) - (U_q)$, la cari se ataşează şi elementul întîi din coloana întîia, se formează liniile tabelului dreptunghiular următor

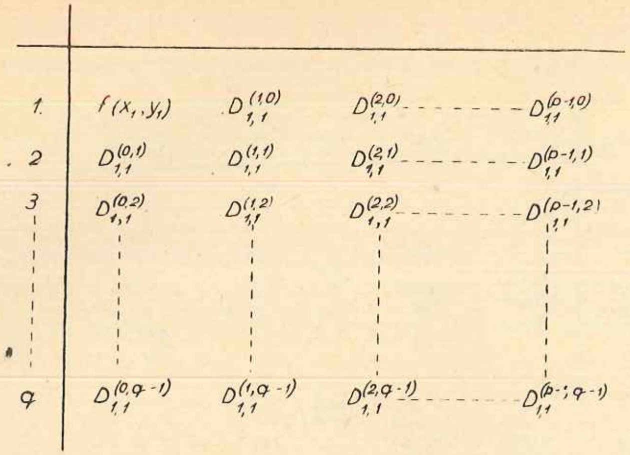

Fig. 11.

care conţine tocmai coeficienţii căutaţi ai polinomul lui de interpolare (123) tocmai în ordinea în care apare în expresia sa dezvoltată pe care am dato acolo.

Catedra de analiză
Universitatea „V. Babeş"

BIBLIOGRAFIE

1. D. L. Berman, *Interpolarea în spaţiile cu mai multe dimensiuni D. A. N. SSSR.* t. 81 nr. 1, p. 9–12, 1951.
2. O. Biermann, *Über näherungsweise Kubaturen. Monatshefte f. Math. u. Physik.* t.14, p. 211–225, 1903.
3. O. Biermann, *Ein Problem der Interpolationsrechnung. Ibid.* t. 16, p. 49–53, 1905.
4. A. Marchaud, *Sur les dérivées et sur les différences des fonctions de variables réelles. Journal de Math. pures et appl.* t. 6, p. 337–427, 1927.
5. L. Merli, *Sull'approssimazione delle funzioni contiune di due variabili mediante polinomi Boll. Un. Mat. Italiana Ser.* III. an V. nr. 1, p. 68–71, 1950.
6. Ş. E. Mikeladze, *K voprosu interpolirovania funkţii ot dvuh peremennîh. Soob. A.N.G. SSR* t. VI. nr. 7, pp. 503–509, 1945.
7. Ş. E. Mikeladze, *Cislennîe metodî matematicescogo analiza.* Moscova, 1953.
8. S. Narumi, *Some formulas in the theory of interpolation of many independent variabiles. Tôhoku Math. Journal,* vol. 18, p. 309, 1920.
9. L. Neder, *Interpolationsformeln für Funktionenen mehreren Argumente. Scandinavisk Aktuarietdskrift,* p. 59, 1925.
10. E. Pflanz, *Zur Bestimnung finiter Ausdrücke für die gemischten partiellen Ableitungen von Funktionen zweier Variabeln. Jber. Deutsch. Mat. Verein.* 49, Abd. 1, 76–85, 1939.
11. T. Popoviciu, *Sur quelques propriétés des functions d'une ou de deux variables réeles. Mathematica,* vol. VIII, p. 1–85, 1934.
12. — *Sur les solutions bornées, et les solutions mesurables de certaines equations fonctionnelles. Mathematica,* vol. XIV, p. 47–108, 1938.

13. — *Notes sur les fonctions convexes d'ordre superieur (IX). Bull. Math. Soc. Roum. de Sci.* t. 43, p. 85–141, 1941.
14. — *Les fonctions convexes. Actualités Sci. et Ind.* nr. 992, p.75,1944.
15. — *Consideraţii teoretice asupra utilizării practice a unor formule de interpolare. Bul. Şt. Mat. Fiz. t.* III, nr. 4, p. 441–449, 1951.
16. — *Folytonos függvények középérték tételeiről, Magyar Tudom. Akad. III. (Matem. Fiz.) osztályának közlemenyeiből.* nr. 3, p. 353–356, 1954.
17. J. B. Scarborough, *Numerical mathematical analysis. Baltimore,* 1950.
18. D. D. Stancu, *Interpolarea polinomială a funcţiilor de mai multe variabile reale.* Comunicare prezentată la Ses. Acad. RPR. din iunie 1955 (sub tipar).
19. J. F. Steffensen, *Interpolation,* 1950.
20. G. Vrănceanu *Geometrie analitică şi proiectivă.* Bucureşti, 1954.

ЗАМЕЧАНИЯ О МНОГОЧЛЕННОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИИ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

(Резюме)

В первом параграфе этой статьи были установлены общие выражения (8) и (24) многочленов интерполяции в ординарном пространстве и было введено понятие S-мерной относительной разности (13).

Во втором параграфе доказывается наличие и единственность многочленнов интерполяции (34) определяемых на узлах (28).

В 3 и 4 параграфах излагаются результаты детального исследования разделенных разностей, определяемых на (27) и (28). Это исследование смогло бы быть полезным, так как понятие разделенной разности играет важную роль в рассмотрении отношения функции к многочлену, который мы вообще берем как интерполятивную функцию.

В 5 параграфе изложены выражения остальных установленных формул интерполяции. В 6 параграфе были пополнены и уточнены некоторые результаты Ш. Е. Микеладзе и Ж. Ф. Штефенсена, относящиеся к остальным формулам интерполяции, которые используют узлы (27).

В последнем параграфе указывается практическое исчисление многочленов интерполяции в конкретном случае двух переменных, при помощи таблиц разделенных разностей.

CONSIDÉRATIONS SUR L'INTERPOLATION POLYNÔMIALE DES FONCTIONS À PLUSIEURS VARIABLES.

(Résumé)

Au 1er paragraphe du présent travail on établit les expressions générales (8) et (24) des polynômes d'interpolation dans un espace ordinaire s-dimensionnel et on introduit la notion de différence divisée s-dimensionnelle (13).

Au 2e paragraphe sont démontrées l'existence et l'unité des polynômes d'interpolation (34) définis sur les noeuds (28). Aux paragraphes 3 et 4 sont étudiées de manière détaillée les différences divisées sur (27) et (28). Nous considérons cette étude utile, vu que la notion de différence divisée joue un rôle important dans l'étude du comportement d'une fonction à l'égard d'un polynôme — qu'on prend en général comme fonction interpolatrice.

Au 5e paragraphe sont données les expressions du reste des formules d'interpolation établies. Au 6e paragraphe nous complétons et précisons certains résultats de S. E. Mikeladze et J. F. Steffensen quant au reste des formules d'interpolation qui utilisent les noeuds (27).

Dans le dernier paragraphe il est montré de quelle manière se fait le calcul pratique des polynômes d'interpolation dans le cas concret de deux variables, au moyen des tableaux de différences divisées.