CONTRIBUŢII LA INTEGRAREA NUMERICĂ A FUNCŢIILOR DE MAI MULTE VARIABILE

DE

D. D. STANCU

Comunicare prezentată la şedinţa din 24 septembrie 1956 a Filialei Cluj a Academiei R.P.R.

§ 1. Consideraţiuni generale

1. Să notăm cu D un domeniu din spaţiul euclidian s — dimensional E_s, cu dv_M un element de volum din D, cu $f(M)$ şi $K(M)$ două funcţii de punctul $M = M(t^1, t^2, \ldots, t^s)$, integrabile în domeniul considerat.

Prin formulă de integrare numerică sau formulă de cubatură se înţelege o formulă de forma

$$\int\int\ldots\int_D K(M)f(M)dv_M = \sum_{i=1}^{N} c_i f(M_i) + \rho, \tag{1}$$

unde numerele c_i — care se numesc coeficienţii formulei — depind numai de nodurile M_i ale formulei de cubatură, care sînt puncte din D; ρ este restul acestei formule.

Suma finită din membrul al doilea

$$J(f) = \sum_{i=1}^{N} c_i f(M_i) \tag{2}$$

reprezintă o evaluare aproximativă a funcţionalei

$$I(f) = \int\int\ldots\int_D K(M)f(M)dv_M, \tag{3}$$

unde funcţiunea $K(M)$ se presupune că e aleasă odată pentru totdeauna pentru funcţionala $I(f)$ şi că păstrează un semn constant în D.

Aşadar, o formulă de cubatură este o formulă care permite să se dea o evaluare aproximativă a unei integrale definite dintr-o funcţie $f(M)$, multiplicată cu o funcţie pondere $K(M)$, printr-o anumită combinaţie liniară a valorilor funcţiei $f(M)$ pe un număr finit de puncte distincte. Avem şi formule de cubatură în care intervin și valorile derivatelor parțiale ale lui $f(M)$ în anumite puncte.

Restul ρ al formulei (1) reprezintă valoarea, dată de această formulă, a unei funcționale aditive și omogene, pe care, pentru a indica funcția $f(M)$, o vom nota de asemenea cu $\rho(f)$.

2. Vom spune că formula (1) are gradul parțial de exactitate $(n_1, n_2, \ldots, n_s)$ dacă:

a) $\rho(P) = 0$ pentru orice polinom $P(M)$ de grad $(n_1, n_2, \ldots, n_s)$.

b) $\rho(P) \neq 0$ pentru cel puțin un polinom $P(M)$ de grad $(n_1 + 1, n_2 + 1, \ldots, n_s + 1)$.

3. Problemele de bază care se pun acum sînt următoarele:

a) A construi formulele de cubatură, adică a determina coeficienții c_i și nodurile M_i.

b) A da și studia expresia restului acestor formule pentru a putea evalua eroarea care se comite cînd pentru $I(f)$ se ia valoarea aproximativă $J(f)$.

Se știe că o metodă generală de construire a formulelor de cubatură constă în a înlocui funcția $f(M)$ prin expresia sa dată de o formulă de interpolare.

Dacă presupunem că $f(M)$ este dezvoltabilă în seria uniform convergentă în D

$$f(M) = \sum_{i_1, \ldots, i_s = 0}^{\infty} a_{i_1 \ldots i_s} (t^1)^{i_1} \ldots (t^s)^{i_s} \tag{4}$$

și punem

$$I_{i_1 \ldots i_s} = \int\int \ldots \int_D K(t^1, \ldots, t^s)(t^1)^{i_1} \ldots (t^s)^{i_s}\, dv_M,$$

restul va fi reprezentat de seria

$$\rho = \sum_{i_1, \ldots, i_s = 0}^{\infty} a_{i_1 \ldots i_s} \left[I_{i_1 \ldots i_s} - \sum_{j=1}^{N} p_j (t_j^1)^{i_1} \ldots (t_j^s)^{i_s} \right], \tag{5}$$

cantitățile între parantezele drepte fiind toate indepedente de $f(M)$.

Dacă $f(M)$ e un polinom de gradul $(n_1, n_2, \ldots, n_s)$, avem

$$I(f) = J(f),$$

oricare ar fi coeficienții $a_{i_1 \ldots i_s}$ pentru care $i_k \leqq n_k\ (k = \overline{1, s})$.

Aceasta ne conduce la următoarele ecuații

$$\sum_{j=1}^{N} p_j (t^1)^{i_1} \ldots (t^s)^{i_s} = I_{i_1 \ldots i_s}$$

4. E firesc să căutăm să mărim precizia formulei de cubatură despre care vorbim, căutînd să determinăm cele sN necunoscute $(t_i^1, t_i^2, \ldots, t_i^s)$, $i = \overline{1, N}$ astfel ca să se anuleze, oricare ar fi funcția $f(M)$, și cei sN termeni următori din seria (5), deducînd în acest mod sN ecuații noi de forma

$$\sum_{j=1}^{N} p_j (t_j^1)^{i_1} \ldots (t_j^s)^{i_s} = I_{i_1 \ldots i_s}.$$

În felul acesta se obține în total un sistem de $(s + 1)N$ ecuații cu tot atîtea necunoscute

$$c_i;\ t_i^1,\ t_i^2, \ldots, t_i^s \quad (i = \overline{1, N}).$$

Pentru ca problema să fie posibilă va trebui ca sistemul liniar care se obține să fie compatibil și să ne conducă la N puncte M_i reale aparținînd domeniului D și fără să fie situate pe o hipersuprafață de ordinul $(n_1, n_2, \ldots, n_s)$ pentru a nu se anula anumiți determinanți care vor interveni la numitorii expresiilor coeficienților c_i.

5. Într-o lucrare precedentă [3], relativ la sistemul de $N = (n_1+1) \ldots (n_s + 1)$ noduri

$$M_{i_1 \ldots i_s} = M_{i_1 \ldots i_s}\left(t_{i_1}^1, t_{i_1 i_2}^2, \ldots, t_{i_1 \ldots i_s}^s\right), \tag{6}$$

am dat formula de interpolare

$$f(M) = L_{n_1 n_2 \ldots n_s}(M) + R_s(M), \tag{7}$$

unde

$$L_{n_1 \ldots n_s}(M) = \sum_{i_1=1}^{n_1+1} \ldots \sum_{i_s=1}^{n_s+1} \overset{1}{l}_{i_1}(t^1) \ldots \overset{s}{l}_{i_1 \ldots i_s}(t^s)\, f(M_{i_1 \ldots i_s}), \tag{8}$$

cu

$$\overset{k}{l}_{i_1 \ldots i_k}(\overset{k}{t}) = \frac{\overset{k}{u}_{i_1 \ldots i_{k-1}}(\overset{k}{t})}{\left(\overset{k}{t} - \overset{k}{t}_{i_1 \ldots i_k}\right) \overset{k}{u}'_{i_1 \ldots i_{k-1}}\left(\overset{k}{t}_{i_1 \ldots i_k}\right)},$$

$$\overset{k}{u}_{i_1 \ldots i_{k-1}}(\overset{k}{t}) = \prod_{i_k=1}^{n_k+1} \left(\overset{k}{t} - \overset{k}{t}_{i_1 \ldots i_k}\right),$$

e polinomul de interpolare de gradul $(n_1, n_2, \ldots, n_s)$ care coincide cu $f(M)$ pe nodurile (6).

Restul formulei (7) are expresia

$$R_s(M) = \sum_{p=1}^{s} \sum_{i_1=1}^{n_1+1} \ldots \sum_{i_{p-1}=1}^{n_{p-1}+1} \overset{1}{l}_{i_1}(t^1) \ldots \overset{p-1}{l}_{i_1 \ldots i_{p-1}}(\overset{p-1}{t})\, \overset{p}{u}_{i_1 \ldots i_{p-1}} \overset{p}{S}_{i_1 \ldots i_{p-1}},$$

unde

$$S^{p}_{i_1\dots i_{p-1}}=\left[t^{p}, t^{p}_{i_1\dots i_{p-1}1}, \dots, t^{p}_{i_1\dots i_{p-1}\, n_{p+1}}\,;\, f\left(t^{1}_{i_1}, \dots, t^{p-1}_{i_1\dots i_{p-1}}, t^{p}, \dots, t^{s}\right)\right]$$

Aici în membrul drept avem diferența divizată pe nodurile $t^{p}, t^{p}_{i_1 i_2\dots i_{p-1},1}, \dots$
$\dots, t^{p}_{i_1 i_2\dots i_{p-1}\, n_p+1}$ aplicată variabilei t^{p} a funcției

$$f\left(t^{1}_{i_1}, t^{2}_{i_1 i_2}, \dots, t^{p-1}_{i_1\dots i_{p-1}}, t^{p}, t^{p+1}, \dots, t^{s}\right).$$

6. Să presupunem că punctele (6) aparțin domeniului D. Dacă se utilizează formula (7) se obține formula de cubatură

$$\iint_D\dots\int K(M)\, f(M)\, dv_M=\sum_{i_1=1}^{n_1+1}\dots\sum_{i_s=1}^{n_s+1} A_{i_1\dots i_s} f(M_{i_1\dots i_s})+\rho_s \tag{9}$$

unde coeficienții sînt dați de formula

$$A_{i_1\dots i_s}=\iint_D\dots\int K(t^1,\dots,t^s)\, l^{1}_{i_1}(t^1)\dots l^{s}_{i_1\dots i_s}(t^s)\, dt^1\dots dt^s \tag{10}$$

iar restul e dat de

$$\rho_s=\iint\dots\int_D K(M)\, R_s(M)\, dM. \tag{11}$$

7. *Exemplu.* Considerînd în cazul $s=2$ nodurile

$$\begin{gathered} M_1(-a,-b),\ M_2\left(-a,-\frac{b-c}{2}\right),\ M_3(-a,c)\\ M_4\left(0,-\frac{b+c}{2}\right),\ M_5(0,0),\ M_6\left(0,\frac{b+c}{2}\right)\\ M_7(a,-c),\ M_8\left(a,\frac{b-c}{2}\right),\ M_9(a,b), \end{gathered} \tag{12}$$

formula (7) ne conduce la formula de interpolare

$$\begin{aligned} f(x,y)&=\frac{1}{a^2(b+c)^2}\,x(x-a)\left(y+\frac{b-c}{2}\right)(y+b)\, f(-a,c)-\\ &-\frac{2}{a^2(b+c)^2}\,x(x-a)(y+b)(y-c)\, f\left(-a,\frac{c-b}{2}\right)+\\ &+\frac{1}{a^2(b+c)^2}\,x(x-a)(y-c)\left(y+\frac{b-c}{2}\right) f(-a,-b)-\\ &-\frac{2}{a^2(b+c)^2}\,(x^2-a^2)\,y\left(y+\frac{b+c}{2}\right) f\left(0,\frac{b+c}{2}\right)+ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+\frac{4}{a^2(b+c)^2}\,(x^2-a^2)\left[y^2-\frac{(b+c)^2}{4}\right] f(0,0)-\\ &-\frac{2}{a^2(b+c)^2}\,(x^2-a^2)\left(y-\frac{b+c}{2}\right) y\, f\left(0,-\frac{b+c}{2}\right)+\\ &+\frac{1}{a^2(b+c)^2}\,x(x+a)(y+c)\left(y-\frac{b-c}{2}\right) f(a,b)-\\ &-\frac{2}{a^2(b+c)^2}\,x(x+a)(y-b)(y+c)\, f\left(a,\frac{b-c}{2}\right)+\\ &+\frac{1}{a^2(b+c)^2}\,x(x+a)(y-b)\left(y-\frac{b-c}{2}\right) f(a,-c)+r(x,y), \end{aligned} \tag{13}$$

unde restul are expresia

$$\begin{aligned} r(x,y)&=x(x^2-a^2)[-a,0,a,x\,;\,f(x,y)]+\\ &+\frac{1}{2a^2}\,x(x-a)(y+b)(y-c)\left(y+\frac{b-c}{2}\right)\cdot\left[c,\frac{c-b}{2},-b,y\,;\,f(a,y)\right]-\\ &-\frac{1}{a^2}\,(x^2-a^2)\,y\left(y^2-\frac{(b+c)^2}{4}\right)\left[\frac{b+c}{2},0,-\frac{b+c}{2},y\,;\,f(0,y)\right]+\\ &+\frac{1}{2a^2}\,x(x+a)(y-b)\left(y-\frac{b-c}{2}\right)(y+c)\left[b,\frac{b-c}{2},-c,y\,;\,f(-a,y)\right]. \end{aligned} \tag{14}$$

Luînd ca domeniu de integrare paralelogramul D de vîrfuri

$$M_1(-a,-b),\ M_3(-a,c),\ M_7(a,-c),\ M_9(a,b) \tag{15}$$

și făcînd $K(x,y)=1$, formula de cubatură (9) devine

$$\begin{aligned} \iint_D f(x,y)\,dx\,dy&=\frac{a}{90(b+c)}\Big\{(22bc-b^2-c^2)[f(a,b)+f(-a,c)+\\ &+f(-a,-b)+f(a,-c)]+8(7b^2+26bc+7c^2)\,f(0,0)+\\ &+16(2b^2+bc+2c^2)\Big[f\left(0,\frac{b+c}{2}\right)+f\left(-a,\frac{c-b}{2}\right)+\\ &+f\left(0,-\frac{b+c}{2}\right)+f\left(a,\frac{b-c}{2}\right)\Big]\Big\}+\rho', \end{aligned} \tag{16}$$

unde

$$\rho'=\iint_D r(x,y)\,dx\,dy. \tag{17}$$

Formula de cubatură (16) are gradul parțial de exactitate (2,2) și gradul global de exactitate egal cu 3.

Dacă facem $d = c$ obținem următoarea formulă de cubatură de grad parțial de exactitate (3,3)

$$\iint_D f(x, y)\, dx\, dy =$$

$$= \frac{ab}{9}\Big\{f(a, b) + f(-a, b) + f(-a, -b) + f(a, -b) + 4[f(0, b) +$$

$$+ f(-a, 0) + f(0, -b) + f(a, 0)] + 16 f(0, 0)\Big\} + \rho\,, \tag{18}$$

care este tocmai formula clasică a lui Cavalieri-Simpson extinsă la două variabile. Domeniul de integrare D este în acest caz dreptunghiul definit de inegalitățile

$$-a \leqq x \leqq a, \quad -b \leqq y \leqq b. \tag{19}$$

Restul formulei de cubatură a lui Cavalieri-Simpson e dat de formula

$$\rho = \iint_D R(x, y)\, dx\, dy, \tag{20}$$

unde

$$R(x, y) = x(x^2 - a^2)[-a, 0, a, x; f(x, y)] +$$

$$+ y(y^2 - b^2)[-b, 0, b, y; f(x, y)] - \tag{21}$$

$$- x(x^2 - a^2)\, y(y^2 - b^2)\left[\begin{matrix}-a, 0, & a, x\\ -b, 0, & -b, y\end{matrix}; f(x, y)\right].$$

8. În continuare vom căuta să dăm o evaluare a restului (20). Se observă că putem scrie

$$\rho = \int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b} R(x, y)\, dx\, dy = \int_{-a}^{a}\Big\{x(x^2 - a^2)\Big[-a, 0, a, x; \int_{-b}^{b} f(x, y)\, dy\Big] -$$

$$- x(x^2 - a^2)\Big[-a, 0, a, x\,. \int_{-b}^{b} y(y^2 - b^2)[b, 0, -b; f(x, y)]\, dy\Big]\Big\}dx + \tag{22}$$

$$+ \int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b} y(y^2 - b^2)[-b, 0, b, y; f(x, y)]\, dx\, dy.$$

Utilizînd formula elementară

$$\int_{-A}^{A} F(u)\, du = \int_0^A [F(t) + F(-t)]\, dt \tag{23}$$

vom putea scrie succesiv

$$\rho = \int_0^a \Big\{t(t^2 - a^2)\Big[-a, 0, a, t, ; \int_{-b}^{b} f(t, y)\, dy\Big] -$$

$$- t(t^2 - a^2)\Big[-a, 0, a, t; \int_{-b}^{b} y(y^2 - b^2)\,.\,[b, 0, -b, y; f(t, y)]\, dy\Big] -$$

$$- t(t^2 - a^2)\Big[a, 0, -a, t; \int_{-b}^{b} f(t, y)\, dy\Big] +$$

$$+ t(t^2 - a^2)\Big[a, 0, -a, -t; \int_{-b}^{b} y(y^2 - b^2)[b, 0, -b, y; f(t, y)]\, dy\Big]\Big\}\, dt +$$

$$+ \int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b} y(y^2 - b^2)[-b, 0, b, y; f(x, y)]\, dt\, dy = \int_0^a t(t^2 - a^2)\Big(\Big[-a, 0, a, t;$$

$$\int_{-b}^{b} f(t, y)\, dy\Big] - \Big[a, 0, -a, t; \int_{-b}^{b} f(t, y)\, dy\Big]\Big) - t(t^2 - a^2)\Big(\Big[-a, 0, a, t;$$

$$\int_{-b}^{b} y(y^2 - b^2)[b, 0, -b, y; f(t, y)]\, dy\Big] - \Big[a, 0, -a, -t; \int_{-b}^{b} y(y^2 - b^2)\,.$$

$$.\,[b, 0, -b, y; f(t, y)]\, dy\Big]\Big)\Big\} + \int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b} y(y^2 - b^2)[-b, 0, b, y; f(x, y)]\, dx\, dy.$$

Dar în baza formulei de recurență a diferențelor divizate avem

$$\Big[-a, 0, a, t; \int_{-b}^{b} f(t, y)\, dy\Big] - \Big[a, 0, -a, -t; \int_{-b}^{b} f(t, y)\, dy\Big] =$$

$$= 2t\Big[-a, 0, a, t, -t; \int_{-b}^{b} f(t, y)\, dy\Big]$$

și

$$\Big[-a, 0, a, t; \int_{-b}^{q} y(y^2 - b^2)[b, 0, -b, y; f(t, y)]\, dy\Big] -$$

$$- \Big[a, 0, -a, -t; \int_{-b}^{b} y(y^2 - b^2)[b, 0, -b, y; f(t, y)]\, dy\Big] =$$

$$= 2t\Big[-a, 0, a, t, -t; \int_{-b}^{b} y(y^2 - b^2)[b, 0, -b, y; f(t, y)]\, dy\Big].$$

Cu acestea vom putea scrie în continuare

$$\rho = 2\int_0^a t^2(t^2 - a^2)\Big\{\Big[-a, 0, a, t, -t; \int_{-b}^{b} f(t, y)\, dy\Big] -$$

$$- \Big[-a, 0, a, t, -t; \int_{-b}^{b} y(y^2 - b^2)[b, 0, -b, y; f(t, y)]\, dy\Big]\Big\}\, dt +$$

$$+ \int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b} y(y^2 - b^2)[-b, 0, b, y, ; f(x, y)]\, dx\, dy.$$

Deoarece $t^2\,(t^2 - a^2)$ păstrează un semn constant în intervalul de integrare, putem aplica formula mediei și găsim

$$\rho = 2\Big\{\Big[-a, 0, a, \xi', -\xi'\,;\int_{-b}^{b} f(\xi', y)\,dy\Big] - \Big[-a, 0, a, \xi', -\xi'\,;$$

$$\int_{-b}^{b} y\,(y^2 - b^2)\,[b, 0, -b, y\,; f(\xi', y)]\,dy\Big\}\int_{0}^{a} t^2\,(t^2 - a^2)\,dt +$$

$$+\int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b} y\,(y^2 - b^2)\,[-b, 0, b, y\,; f\,]\,dx\,dy = -\frac{2.2\,a^5}{4\,!\,15}\Big(\int_{-b}^{b}\frac{\partial^4 f(\xi, y)}{\partial\,\xi^4}\,dy -$$

$$-\int_{-b}^{b} y\,(y^2 - b^2)\Big[b, 0, -b, y\,;\frac{\partial^4 f\,(\xi, y)}{\partial\,\xi^4}\Big]\,dy\Big) +$$

$$+\int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b} y\,(y^2 - b^2)\,[-b, 0, b, y\,; f]\,dx\,dy = -\frac{a^5}{90}\int_{-b}^{b}\frac{\partial^4 f(\xi, y)}{\partial\,\xi^4}\,dy +$$

$$+\frac{a^5}{90}\int_{-b}^{b} y\,(y^2 - b^2)\Big[b, 0, -b, y\,;\frac{\partial^4 f\,(\xi, y)}{\partial\,\xi^4}\Big]\,dy +$$

$$+\int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b} y\,(y^2 - b^2)\,[-b, 0, b, y; f]\,dx\,dy = -\frac{a^5\,b}{45}\,\frac{\partial^4 f\,(\xi, \eta_1)}{\partial\,\xi^4} +$$

$$+\int_{-b}^{b} y\,(y^2 - b^2)\Big[-b, 0, b, y\,;\int_{-a}^{a} f\,(x, y)\,dx + \frac{a^5}{90}\,\frac{\partial^4 f\,(\xi, y)}{\partial\,\xi^4}\Big]\,dy.$$

Aplicînd iarăși formula (23), primim succesiv

$$\rho = -\frac{a^5 b}{45}\,\frac{\partial^4 f\,(\xi, \eta_1)}{\partial\xi^4} + \int_{0}^{b}\Big(\tau\,(\tau^2 - b^2)\Big[-b, 0, b, \tau\,;\int_{-a}^{a} f\,(x, \tau)\,dx +$$

$$+\frac{a^5}{90}\,\frac{\partial^4 f\,(\xi, \tau)}{\partial\,\xi^4}\Big] - \tau\,(\tau^2 - b^2)\Big[b, 0, -b, -\tau;\int_{-a}^{a} f\,(x, \tau)\,dx + \frac{a^5}{90}\,\frac{\partial^4 f\,(\xi, \tau)}{\partial\,\xi^4}\Big]\Big)\,d\tau =$$

$$= -\frac{a^5\,b}{45}\,\frac{\partial^4 f\,(\xi, \eta_1)}{\partial\,\xi^4} + \int_{0}^{b}\tau\,(\tau^2 - b^2)\Big(\Big[-b, 0, b, \tau\,;\int_{-a}^{a} f\,(x, \tau)\,dx +$$

$$+\frac{a^5}{90}\,\frac{\partial^4 f\,(\xi, \tau)}{\partial\,\xi^4}\Big] - \Big[-b, 0, b, -\tau\,;\int_{-a}^{a} f\,(x, \tau)\,dx + \frac{a^5}{90}\,\frac{\partial^4 f(\xi, \tau)}{\partial\,\xi^4}\Big]\Big)\,d\tau =$$

$$= -\frac{a^5\,b}{45}\,\frac{\partial^4 f\,(\xi, \eta_1)}{\partial\,\xi^4} + 2\int_{0}^{b}\tau^2\,(\tau^2 - b^2)\Big[-b, 0, b, \tau, -\tau\,;\int_{-a}^{a} f\,(x, \tau)\,dz +$$

$$+\frac{a^5}{90}\,\frac{\partial^4 f(\xi, \tau)}{\partial\,\xi^4}\Big]\,d\tau = -\frac{a^5\,b}{45}\,\frac{\partial^4 f(\xi, \eta_1)}{\partial\,\xi^4} + 2\,[-b, 0, b, \eta', -\eta'\,;\int_{-a}^{a} f\,(x, \eta')\,dx +$$

$$+\frac{a^5}{90}\,\frac{\partial^4 f\,(\xi, \eta')}{\partial\,\xi^4}\Big]\int_{-b}^{b}\tau^2\,(\tau^2 - b^2)\,d\tau = -\frac{a^5\,b}{45}\,\frac{\partial^4 f(\xi, \eta_1)}{\partial\,\xi^4} -$$

$$-\frac{4b^5}{15}\cdot\frac{1}{24}\int_{-a}^{a}\frac{\partial^4 f(x, \eta)}{\partial\,\eta^4}\,dx - \frac{4\,a^5\,b^5}{15\,.\,24\,.\,90}\,\frac{\partial^8 f(\xi, \eta)}{\partial\xi^4\,\partial\eta^4} =$$

$$= -\frac{a^5\,b}{45}\,\frac{\partial^4 f(\xi, \eta_1)}{\partial\,\xi^4} - \frac{ab^5}{45}\,\frac{\partial^4 f(\xi_1, \eta)}{\partial\,\eta^4} - \frac{a^5\,b^5}{90^2}\,\frac{\partial^8 f\,(\xi, \eta)}{\partial\,\xi^4\,\partial\eta^4}.$$

Dacă introducem o natație simbolică dată de J. F. Steffensen [6] și mai nou utilizată mult de Ș. E. Mikeladze [1]

$$\frac{\partial^p f(\xi, \eta_1)}{\partial\xi^p} = D_\xi^p\,,\ \frac{\partial^q f(\xi_1, \eta)}{\partial\eta^q} = D_\eta^q,\ \frac{\partial^{p+q} f(\xi, \eta)}{\partial\xi^p\,\eta^q} = D_\xi^p\,D_\xi^q\,, \tag{24}$$

restul (20) se va scrie în definitiv astfel

$$\rho = -\frac{a\,b}{45}\Big[a^4\,D_\xi^4 + b^4\,D_\eta^4 + \frac{a^4\,b^4}{180}\,D_\xi^4\,D_\eta^4\Big]. \tag{25}$$

Observații. 1°. Restul dat de Ș. E. Mikeladze la pag. 491 a lucrării [1] trebuie rectificat întrucît în loc de factorul $\frac{1}{180}$ care multiplică derivata $D_\xi^4\,D_\eta^4$, în formula sa figurează $\frac{1}{45}$; această inexactitate provine din formula mai generală care o precede pe aceasta.

2°. Formula (18), cu restul (25) a fost dată în cazul patratului cu centrul în origine și cu latura unu de către J. F. Steffensen [6], însă fără să se arate că ξ și η care intervin mai sus sînt aceiași.

§ 2. Unele formule practice de cubatură pentru integralele s-uple

9. Pentru formulele pe care le vom da va fi util să introducem un operator S_m definit astfel

$$S_i\varphi(M) = S_i\varphi\,(t^1, \ldots, t^{i-1}, t^i, t^{i+1}, \ldots, t^s) = \tag{26}$$
$$= \varphi\,(t^1, \ldots, t^{i-1}, t_0^i + h_i t^i, t^{i+1}, \ldots, t^s) + \varphi(t^1, \ldots, t^{i-1}, t_0^i - h_i t^i, t^{i+1}, \ldots, t^s).$$

Oricare sînt numerele naturale i, k, $(i < k\,; i, k \leqq s)$, se stabilește imediat că avem

$$S_i(S_k\varphi) = S_k\,(S_i\varphi) =$$
$$\varphi(t^1, \ldots, t^{i-1}, t_0^i + h_i t^i, t^{i+1}, \ldots, t^{k-1}, t_0^k + h_k t^k, t^{k+1}, \ldots, t^s) +$$
$$+\varphi(t^1, \ldots, t^{i-1}, t_0^i - h_i t^i, t^{i+1}, \ldots, t^{k-1}, t_0^k + h_k t^k, t^{k+1}, \ldots, t^s) + \tag{27}$$
$$+\varphi(t^1, \ldots, t^{i-1}, t_0^i + h_i t^i, t^{i+1}, \ldots, t^{k-1}, t_0^k - h_k t^k, t^{k+1}, \ldots, t^s) +$$
$$+\varphi(t^1, \ldots, t^{i-1}, t_0^i - h_i t^i, t^{i+1}, \ldots, t^{k-1}, t_0^k - h_k t^k, t^{k+1}, \ldots, t^s).$$

10. Ne vor fi utile două leme importante.

Lema 1. — Relativ la funcția $f(M)$ și la nodurile $M_{i_1 \ldots i_s}(t^1_{i_1}, t^2_{i_2}, \ldots, t^s_{i_s})$ a căror coordonată de ordinul k parcurge valorile

$$t^k_0 - p_k h_k, \ldots, t^k_0 - h_k, t^k_0, t^k_0 + h_k, \ldots, t^k_0 + p_k h_k \qquad (28)$$
$$(k = 1, 2, \ldots, s)$$

avem formula de interpolare

$$\frac{1}{2^s} S_1 S_2 \ldots S_s f(M) = \frac{(-1)^N}{P} U f(M_0) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{s} \frac{U_i}{P_i} \sum_{j_i=1}^{p_i} (-1)^{N-j_i} \frac{v^i_{j_i}(t^i)}{(p_i - j_i)!\,(p_i + j_i)!} S^{0,i}_{j_i} f(M_0) +$$

$$+ \sum_{\substack{i=1 \\ (i<k)}}^{s-1} \sum_{k=2}^{s} \frac{U_{i,k}}{P_{i,k}} \sum_{j_i=1}^{p_i} \sum_{j_k=1}^{p_k} (-1)^{N-j_i-j_k} \frac{v^i_{j_i}(t^i)}{(p_i - j_i)!\,(p_i + j_i)!} \frac{v^k_{j_k}(t^k)}{(p_k - j_k)!\,(p_k + j_k)!} \cdot \qquad (29)$$

$$\cdot S^{0,i}_{j_i} S^{0,k}_{j_k} f(Mo)$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ \sum_{j_1=1}^{p_1} \cdots \sum_{j_s=1}^{p_s} (-1)^{N-j_1-\ldots-j_s} \frac{v^1_{j_1}(t^1)}{(p_1 - j_1)!(p_1 + j_1)!} \cdots \frac{v^s_{j_s}(t^s)}{(p_s - j_s)!\,(p_s + j_s)!} \cdot$$

$$\cdot S^{0,1}_{j_1} \ldots S^{0,s}_{j_s} f(M_0) + R_{12\ldots s}(f; M),$$

unde

$$\begin{cases} U = u_1(t^1)\, u_2(t^2) \ldots u_s(t^s) \\ U_i = u_1(t^1) \ldots u_{i-1}(t^{i-1})\, u_{i+1}(t^{i+1}) \ldots u_s(t^s) \\ U_{ik} = u_1(t^1) \ldots u_{i-1}(t^{i-1}) u_{i+1}(t^{i+1}) \ldots u_{k-1}(t^{k-1}) u_{k+1}(t^{k+1}) \ldots u_s(t^s) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ U_{12\ldots s} = 1; \end{cases} \qquad (30)$$

$$\begin{cases} u_i(t^i) = [(t^i)^2 - 1^2]\,[(t^i)^2 - 2^2] \ldots [(t^i)^2 - p_i^2] \\ v^i_{j_i}(t^i) = (t^i)^2 [(t^i)^2 - 1^2] \ldots [(t^i)^2 - (j_i - 1^2)]\,[(t^i)^2 - (j_i + 1)^2 \ldots [(t^i)^2 - p_i^2]; \end{cases} \qquad (31)$$

$$\begin{cases} \mathrm{P} = (p_1!)^2\,(p_2!)^2 \ldots (p_s!)^2 \\ \mathrm{P}_i = (p_1!)^2 \ldots (p_{i-1}!)^2\,(p_{i+1}!)^2 \ldots (p_s!)^2 \\ \mathrm{P}_{ik} = (p_1!)^2 \ldots (p_{i-1}!)^2\,(p_{i+1}!)^2 \ldots (p_{k-1}!)^2\,(p_{k+1}!)^2 \ldots (p_s!)^2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mathrm{P}_{12\ldots s} = 1; \end{cases} \qquad (32)$$

$$N = p_1 + p_2 + \ldots + p_s; \qquad (33)$$

$$S^{0,i}_{j_i} f(M_0) = f(t^1_0, \ldots, t^{i-1}_o, t^i_o + j_i h_i, t^{i+1}_o, \ldots, t^s_o) + f(t^1_o, \ldots, t^{i-1}_o, t^i_o - j_i h_i, t^{i+1}_o, \ldots, t^s_o).$$

Restul are următoarea expresie

$$R_{12\ldots s}(f; M) = \frac{1}{2s} \rho_{12\ldots s}(f; M)$$

cu

$$\rho_{12\ldots s}(f; M) = 2 \sum_{i=1}^{s} h_i^{2p_i+2} (t^i)^2 u_i(t^i) [t^i_o, t^i_o \pm h_i, \ldots, t^i_o \pm p_i h_i, t^i_o \pm h_i t^i; F_i] -$$

$$- 4 \sum_{\substack{i=1 \\ (i<k)}}^{s-1} \sum_{k=2}^{s} h_i^{2p_i+2}\, h_k^{2p_k+2} (t^i)^2 (t^k)^2 u_i(t^i)\, u_k(t^k) \cdot \qquad (35)$$

$$\cdot \left[\begin{matrix} t^i_o, t^i_o \pm h_i, \ldots, t^i_o \pm p_i h_i, t^i_o \pm h_i t^i \\ t^k_o, t^k_o \pm h_k, \ldots, t^k_o \pm p_k h_k, t^k_o \pm h_k t^k \end{matrix} ; F_{ik} \right]$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ (1)^{s-1} h_1^{2p_1+2} \ldots h_s^{2p_s+2} (t^1)^2 \ldots (t^s)^2 u_1(t^1) \ldots u_s(t^s) \cdot$$

$$\cdot \left[\begin{matrix} t^1_o, t^1_o \pm h_1, \ldots, t^1_o \pm p_1 h_1, t^1_o \pm h_1 t^1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ t^s_o, t^s_o \pm h_s, \ldots, t^s_o \pm p_s h_s, t^s_o \pm h_s t^s \end{matrix} ; F_{12\ldots s} \right]$$

unde

$$F_i = S_1 S_2 \ldots S_{i-1} S_{i+1} \ldots S_s f(M)$$
$$F_{ik} = S_1 \ldots S_{i-1} S_{i+1} \ldots S_{k-1} S_{k+1} \ldots S_s f(M)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$F_{12\ldots s} = f(M)$$

Pentru demonstrație se consideră formula de interpolare a lui Lagrange pentru s valabile, cu restul sub forma dată de J. F. Steffensen [6]. Interpolarea se face pe o rețea hiperparalelipipedică cu coordonatele nodurilor echidistante. Că această formulă se poate aduce la forma (29) se poate demonstra prin inducție completă[1]).

Lema 2. — Oricare ar fi funcția $f(M)$ integrabilă în hiperparalelipipedul

$$t^i_0 - m h_i \leqq t^i \leqq t^i_0 + m_i h_i, \; (i = \overline{1,s}), \qquad (37)$$

avem formula

$$\int_{t^1_0 - m_1 h_1}^{t^1_0 + m_1 h_1} \cdots \int_{t^s_0 - m_s h_s}^{t^s_0 + m_s h_s} f(M)\, dM = h_1 \ldots h_s \int_0^{m_1} \cdots \int_0^{m_s} S_1 \ldots S_s f(M)\, dM. \qquad (38)$$

Demonstrația se face de asemenea prin inducție completă asupra lui s.

[1]) Vezi lucrarea [4].

11. Bazați pe aceste leme vom putea enunța următoarea

TEOREMĂ: *Relativ la funcția $f(M)$ și la nodurile pe care le folosește formula (29) avem formula de cubatură*

$$\iint\cdots\int_D f(M)\,dM = \int_{t_0^1 - m_1 h_1}^{t_0^1 + m_1 h_1} \cdots \int_{t_0^s - m_s h_s}^{t_0^s + m_s h_s} f(M)\,dM =$$

$$= h_1 \ldots h_s \Big[A_0^0 f(M_0) + \sum_{i=1}^{s} \sum_{j_i=1}^{p_i} A_{j_i}^i S_{j_i}^{0,i} f(M_0) + \tag{35}$$

$$+ \sum_{\substack{i=1 \\ (i<k)}}^{s-1} \sum_{k=2}^{s} \sum_{j_i=1}^{p_i} \sum_{j_k=1}^{p_k} A_{j_i j_k}^{i,k} S_{j_i}^{0,i} S_{j_k}^{0,k} f(M_0) +$$

$$+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+ \sum_{j_1=1}^{p_1} \cdots \sum_{j_s=1}^{p_s} A_{j_1 j_2 \cdots j_s}^{1,2,\ldots,s} S_{j_1}^{0,1} \ldots S_{j_s}^{0,s} f(M_0) \Big] + r_s,$$

unde

$$\frac{1}{2^s} A_0^0 = (-1)^N \int_0^{m_1} \cdots \int_0^{m_s} \frac{U}{P}\,dM$$

$$\frac{1}{2^s} A_{j_i}^i = \frac{(-1)^{N-j_i}}{(p_i - j_i)!(p_i + j_i)!} \int_0^{m_1} \cdots \int_0^{m_s} \frac{U_i}{P_i} v_{j_i}^i\,dM \tag{40}$$

$$\frac{1}{2^s} A_{j_i j_k}^{i,k} = \frac{(-1)^{N-j_i-j_k}}{(p_i - j_i)!\,(p_i + j_i)!\,(p_k - j_k)!\,(p_k + j_k)!} \int_0^{m_1} \cdots \int_0^{m_s} \frac{U_{ik}}{P_{ik}} v_{j_i}^i v_{j_k}^k\,dM$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{1}{2^s} A_{j_1 j_2 \cdots j_s}^{1,2,\ldots,s} = \frac{(-1)^{N-j_1-\ldots-j_s}}{(p_1 - j_1)!\,(p_1 + j_1)!\ldots!(p_s - j_s)!(p_s + j_s)!} \int_0^{m_1} \cdots \int_0^{m_s} v_{j_1}^1 \ldots v_{j_s}^s\,dM$$

iar

$$r_s = h_1 \ldots h_s \int_0^{m_1} \cdots \int_0^{m_s} \rho_{12\cdots s}(f;M)\,dM. \tag{41}$$

Relativ la rest vom demonstra următoarea

TEOREMĂ: *Dacă în domeniul D funcția $f(M)$ e continuă împreună cu derivatele sale parțiale de ordinul $(2p_1 + 2, 2p_2 + 2, \ldots, 2p_s + 2)$, atunci pentru restul (41) se obține evaluarea*

$$\frac{1}{2^s} r_s = \sum_{i=1}^{s} \frac{N_i h_1 \ldots h_{i-1} h_i^{2p_i+3} h_{i+1} \ldots h_s}{(2p_i + 2)!} B_i D_{\xi_i}^{2p_i+2} -$$

$$- \sum_{\substack{i=1 \\ (i<k)}}^{s-1} \sum_{k=1}^{s} \frac{N_{ik} h_1 \ldots h_{i-1} h_i^{2p_i+3} h_{i+1} \ldots h_{k-1} h_k^{2p_k+3} h_{k+1} \ldots h_s}{(2p_i + 2)!\,(2p_k + 2)!} B_i B_k D_{\xi_i}^{2p_i+2} D_{\xi_k}^{2p_k+3}$$

$$+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \tag{42}$$

$$+ (-1)^{s-1} \frac{h_1^{2p_1+3} \ldots h_s^{2p_s+3}}{(2p_1 + 2)! \ldots (2p_s + 2)!} B_1 B_2 \ldots B_s D_{\xi_1}^{2p_1+2} \ldots D_{\xi_s}^{2p_s+2}$$

unde

$$\begin{aligned} N_i &= m_1 \ldots m_{i-1} m_{i+1} \ldots m_s \\ N_{ik} &= m_1 \ldots m_{i-1} m_{i+1} \ldots m_{k-1} m_{k+1} \ldots m_s \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ N_{12\cdots s} &= 1 \end{aligned} \tag{43}$$

și

$$B_i = \int_0^{m_i} (t^i)^2 u_i(t^i)\,dt^i. \tag{44}$$

Demonstrația o vom da în cazul $s=3$; în cazul lui s oarecare se va proceda exact la fel, ținînd numai seama de formula (35) și de lema 2.

In cazul lui E_3 restul (35) se scrie explicit astfel

$$\rho_{123}(f;M) = 2h_1^{2p_1+2}(t^1)^2 u_1(t^1)\,[t_0^1, t_0^1 \pm h_1, \ldots, t_0^1 \pm p_1 h_1, t_0^1 \pm h_1 t^1;\ F_1] \tag{45}$$

$$+ 2h_2^{2p_2+2}(t^2)^2 u_2(t^2)\,[t_0^2, t_0^2 \pm h_2, \ldots, t_0^2 \pm p_2 h_2, t_0^2 - h_2 t^2;\ F_2]$$

$$+ 2h_3^{2p_3+2}(t^3)^2 u_3(t^3)\,[t_0^3, t_0^3 \pm h_3, \ldots, t_0^3 \pm p_3 h_3, t_0^3 \pm h_3 t^3;\ F_3]$$

$$-4h_1^{2p_1+2} h_2^{2p_2+2} (t^1 t^2)^2 u_1(t^1) u_2(t^2) \begin{bmatrix} t_0^1, t_0^1 \pm h_1, \ldots, t_0^1 \pm p_1 h_1, t_0^1 \pm h_1 t^1 & \\ t_0^2, t_0^2 \pm h_2, \ldots, t_0^2 \pm p_2 h_2, t_0^2 \pm h_2 t^2 & ; F_{12} \end{bmatrix}$$

$$-4h_1^{2p_1+2} h_3^{2p_3+2} (t^1 t^3)^2 u_1(t^1) u_3(t^3) \begin{bmatrix} t_0^1, t_0^1 \pm h_1, \ldots, t_0^1 \pm p_1 h_1, t_0^1 \pm h_1 t^1 & \\ t_0^3, t_0^3 \pm h_3, \ldots, t_0^3 \pm p_3 h_3, t_0^3 \pm h_3 t^3 & ; F_{13} \end{bmatrix}$$

$$-4h_2^{2p_2+2} h_3^{2p_3+2} (t^2 t^3)^2 u_2(t^2) u_3(t^3) \begin{bmatrix} t_0^2, t_0^2 \pm h_2, \ldots t_0^2 \pm p_2 h_2, t_0^2 + h_2 t^2 & \\ t_0^3, t_0^3 \pm h_3, \ldots, t_0^3 \pm p_3 h_3, t_0^3 \pm h_3 t^3 & ; F_{23} \end{bmatrix}$$

$$+ 8 h_1^{2p_1+2} h_2^{2p_2+2} h_3^{2p_3+2} (t^1 t^2 t^3)^2 u_1(t^1) u_2(t^2) u^3(t^3) \times$$

$$\times \begin{bmatrix} t_0^1, t_0^1 \pm h_1, \ldots, t_0^1 \pm p_1 h_1, t_0^1 \pm h_1 t^1 & \\ t_0^2, t_0^2 \pm h_2, \ldots, t_0^2 \pm p_2 h_2, t_0^2 \pm h_2 t^2 & ; F_{123} \\ t_0^3, t_0^3 \pm h_3, \ldots, t_0^3 \pm p_3 h_3, t_0^3 \pm h_3 t^3 & \end{bmatrix}$$

unde

$$F_1 = S_2 S_3 f(t^1,t^2,t^3) = f(t^1,t_0^2+h_2t^2,t_0^3+h_3t^3) + f(t^1,t_0^2-h_2t^2,t_0^3+h_3t^3) + f(t^1,t_0^2+ +h_2t^2,t_0^3-h_3t^3) + f(t^1,t_0^2-h_2t^2,t_0^3-h_3t^3)$$

$$F_2 = S_1S_3f(t^1,t^2,t^3)$$
$$F_3 = S_1S_2f(t^1,t^2,t^3)$$
$$F_{12} = S_3f(t^1,t^2,t^3) = f(t^1,t^2,t_0^3+h_3t^3) + f(t^1,t^2,t_0^3-h_3t^3)$$
$$F_{13} = S_2f(t^1,t^2,t^3)$$
$$F_{23} = S_1f(t^1,t^2,t^3)$$
$$F_{123} = f(t^1,t^2,t^3).$$

Să calculăm acum integrala

$$I_3(\rho_{123}) = h_1h_2h_3\int_0^{m_1}\int_0^{m_2}\int_0^{m_3}\rho(t^1,t^2,t^3)dt^1dt^2dt^3. \tag{46}$$

Vom evalua mai întîi această integrală pentru primul termen al restului (45); primim

$$r_3^1 = 2h_1^{2p_1+3}h_2h_3\int_0^{m_1}\int_0^{m_2}\int_0^{m_3}(t^1)^2u_1(t^1)[t_0^1,t_0^1\pm h_1,\ldots,t_0^1\pm p_1h_1,t_0^1\pm h_1t^1;F_1]dt^1dt^2dt^3$$

$$=2h_1^{2p_1+3}h_2h_3\int_0^{m_2}dt^2\int_0^{m_3}dt^3\int_0^{m_1}t^1([t_0^1,t_0^1\pm h_1,\ldots,t_0^1\pm p_1h_1,t_0^1\pm h_1t^1;F_1])\,dQ_1(t^1),$$

unde

$$Q_1(t^1) = \int_{-m_1}^{t^1}t^1u_1(t^1)dt^1$$

este o funcție care conform studiului făcut de J. F. Steffensen [6][2]) păstrează un semn constant în intervalul $[-m_1,0]$.

Integrînd prin părți găsim

$$r_3^1 = -2h_1^{2p_1+3}h_2h_3\int_0^{m_2}dt^2\int_0^{m_3}dt^3\int_{-m_1}^0Q_1(t^1)\frac{\partial}{\partial t^1}\{t^1[t_0^1,t_0^1\pm h_1,\ldots,t_0^1\pm p_1h_1,t_0^1\pm \pm h_1,t^1;F_1]dt^1$$

Dar

$$[t_0^1,t_0^1\pm h_1,\ldots,t_0^1\pm p_1h_1,t_0^1\pm h_1t^1;F_1] = \frac{1}{2h_1t^1}([t_0^1,t_0^1\pm h_1,\ldots,t_0^1\pm p_1h_1,t_0^1+ +h_1t^1;F_1] + [t_0^1,t_0^1\pm h_1,\ldots,t_0^1\pm p_1h_1,t_0^1-h_1t^1;F_1]),$$

astfel că vom putea scrie în continuare

$$r_3^1=-h_1^{2p_1+3}h_2h_3\int_0^{m_2}dt^2\int_0^{m_3}dt^3\int_{-m_1}^0Q_1(t^1)([t_0^1,t_0^1\pm h_1,\ldots,t_0^1\pm p_1h_1,t_0^1+ +h_1t^1,t_0^1+h_1t^1;F_1]+[t_0^1,t_0^1\pm h_1,\ldots,t_0^1\pm p_1h_1,t_0^1-h_1t^1\,t_0^1-h_1t^1;F_1])\,dt^1.$$

[2]) pag. 155. Vezi de asemenea și S. E. Mikeladze [1], pag. 312.

Aplicînd teorema mediei integralelor triple și ținînd seama că $f(M)$ admite în (D) derivate parțiale de ordinul $(2p_1+2,\ 2p_2+2,\ 2p_3+2)$ continue, putem scrie

$$r_3^1=-h_1^{2p_1+3}h_2h_3([t_0^1,t_0^1\pm h_1,\ldots,t_0^1\pm p_1h_1,t_0^1+h_1\xi_1,t_0^1+h_1\xi_1;F']_1+ +[t_0^1,t_0^1\pm h_1,\ldots,t_0^1\pm p_1h_1,t_0^1-h_1\xi_1,t_0^1-h_1\xi_1;F_1'])\int_0^{m_2}dt^2\int_0^{m_2}dt^3\int_{-m_1}^0Q_1(t^1)dt^1,$$

unde

$$F_1' = f(\xi_1,t_0^2+h_2\eta_1,t_0^3+h_3\zeta_1) + f(\xi_1,t_0^2-h_2\eta_1,t_0^3+h_3\zeta_1) + f(\xi_1,t_0^2+ +h_2\eta_1,t_0^3-h_3\zeta) + f(\xi_1,t_0^2-h_2\eta_1,t_0^3-h_3\zeta_1).$$

Aplicînd acum teorema de medie a diferențelor divizate obținem [3])

$$r_3^1 = -8\frac{h_1^{2p_1+3}h_2h_3}{(2p_1+2)!}\frac{\partial^{2p_1+2}f(\xi,\eta,\zeta)}{\partial\xi^{2p_1+2}}\int_0^{m_2}dt^2\int_0^{m_3}dt^3\int_{-m_1}^0Q_1(t^1)\,dt^1.$$

Integrînd prin părți se găsește că

$$\int_{-m_1}^0Q(t^1)dt^1 = t^1Q_1(t^1)\Big|_{-m_1}^0 - \int_{-m_1}^0t^1Q_1'(t^1)\,dt^1 = -\int_{-m_1}^0(t^1)^2u_1(t^1)\,dt^1.$$

Inlocuind mai sus găsim în definitiv că

$$r_3^1 = 8h\frac{h_1^{2p_1+3}h_2h_3m_2m_2}{(2p_1+2)!}D_{\xi_1}^{2p_1+2}\int_0^{m_1}(t^1)^2u_1(t^1)\,dt^1.$$

La fel se procedează la evaluarea integralei triple I_3 din următorii doi termeni ai restului (45).

Al patrulea termen al restului este

$$r_3^4 = -4h_1^{2p_1+3}h_2^{2p_2+3}h_3\int_0^{m_1}dt^2\int_6^{m_2}dt^2\int_0^{m_3}(t^1t^2)^2u_1(t^1)u_2(t^2).$$

$$\cdot\left[\begin{matrix}t_0^1,\ t_0^1\pm h_1,\ldots,\ t_0^1\pm p_1h_1,\ t_0^1\pm h_1t^1\\ t_0^2,\ t_0^2\pm h_2,\ldots,\ t_0^2\pm p_2h_2,\ t_0^2\pm h_2t^2\end{matrix};F_{12}\right]dt^3.$$

Ținînd seama de proprietatea de suprapunere a diferențelor divizate definite pe rețele Marchaud, să calculăm integrala

$$I_1 = \int_0^{m_3}dt^3\int_0^{m_2}(t^2)^2u_2(t^2)\left[t_0^2,\ t_0^2\pm h_2,\ldots,\ t_0^2+p_2h_2,\ t_0^2\pm h_2t^2;F_{12}\right]dt^2.$$

Pe baza rezultatelor precedente avem

$$I_1 = \frac{2m_3}{(2p_2+2)!}D_{\xi_2}^{2p_2+2}\int_0^{m_2}(t^2)^2u_2(t^2)\,dt^2.$$

[3]) Vezi [4].

Cu acestea

$$r_3^4 = -\frac{8m_3\, h_1^{2p_1+3}\, h_2^{2p_2+3}\, h_3}{(2\,p_2+2)\,!}\int_0^{m_2}(t^2)^2\, u_2(t^2)\, dt^2 \int_{-m_1}^{0}(t^1)^2\, u_1(t^1) .$$

$$\cdot\left[t_0^1,\ t_0^1 \pm h_1, \ldots,\ t_0^1 \pm p_1 h_1,\ t_0^1 \pm h_1 t^1;\ D_{\xi_2}^{2p_2+2}\right] dt^1 .$$

Și acum, folosind iar evaluarea dată la primul termen al restului, se găsește că

$$r_3^4 = \frac{-8\, h_1^{2p_1+3}\, h_2^{2p_2+3}\, h_3\, m_3}{(2\,p_1+2)\,!\,(2\,p_2+2)\,!}\, D_{\xi_1}^{2p_1+2}\, D_{\xi_2}^{2p_2+2}\int_0^{m_1}(t^1)^2\, u_1(t^1)\, dt^1\int_0^{m_2}(t^2)^2\, u_2(t^2)\, dt^2 .$$

In mod analog se obțin

$$r_3^5 = \frac{-8\, h_1^{2p_1+3}\, h_2\, h_3^{2p_3+3}\, m_2}{(2\,p_1+2)\,!\,(2\,p_3+2)\,!}\, D_{\xi_1}^{2p_1+2}\, D_{\xi_3}^{2p_3+2}\int_0^{m_1}(t^1)^2\, u_2(t^1)\, dt^1\int_0^{m_3}(t^3)^2\, u_3(t^3)\, dt^3 .$$

$$r_3^6 = \frac{-8\, h_1\, h_2^{2p_2+3}\, h_3^{2p_3+3}\, m_1}{(2\,p_2+2)\,!\,(2\,p_3+2)\,!}\, D_{\xi_2}^{3p_2+2}\, D_{\xi_3}^{2p_3+2}\int_0^{m_2}(t^2)^2\, u_1(t^2)\, dt^2\int_0^{m_3}(t^3)^2\, u_3(t^3)\, dt^3 .$$

Al șaptelea și ultimul termen al restului este

$$r_3^7 = 8\, h_1^{2p_1+3}\, h_2^{2p_2+3}\, h_3^{2p_3+3}\int_0^{m_1}\int_0^{m_2}\int_0^{m_2}(t^1\, t^2\, t^3)^2\, u_1(t^1)\, u_2(t^2)\, u_3(t^3) .$$

$$\cdot\left[\begin{matrix} t_0^1,\ t_0^1 \pm h_1, \ldots,\ t_0^1 \pm p_1 h_1,\ t_0^1 \pm h_1 t^1 \\ t_0^2,\ t_0^2 \pm h_2, \ldots,\ t_0^2 \pm p_2 h_2,\ t_0^2 \pm h_2 t^2;\, f \\ t_0^3,\ t_0^3 \pm h_3, \ldots,\ t_0^3 \pm p_3 h_3,\ t_0^3 \pm h_3 t^3 \end{matrix}\right] .\ dt^1\, dt^2\, dt^3 .$$

In baza celor precedente avem

$$\int_0^{m_3}(t^3)^2\, u_3(t^3)\left[t_0^3,\ t_0^3 \pm h_3, \ldots,\ t_0^3 \pm p_3 h_3,\ t_0^3 \pm h_3 t^3;\ f\right] dt^3 =$$

$$= \frac{1}{(2p_3+2)\,!}\, D_{\xi_3}^{2p_3+2}\int_0^{m_3}(t^3)^2\, u_3(t^3)\, dt^3$$

și

$$\frac{1}{(2p_3+2)\,!}\int_0^{m_3}(t^3)^2\, u_3(t^3)\, dt^3\int_0^{m_3}(t^2)^2\, u_2(t^2)\left[t_0^2,\ t_0^2 \pm h_2, \ldots,\ t_0^2 \pm p_2 h_2, t_0^2 \pm\right.$$

$$\left.\pm h_2 t^2;\ D_{\xi_3}^{2p_3+2}\right] dt^2 = \frac{1}{(2\,p_2+2)\,!\,(2\,p_3+2)\,!}\, D_{\xi_2}^{2p_2+2}\, D_{\xi_3}^{2p_3+2}\times$$

$$\times\int_0^{m_2}(t^2)^2\, u_2(t^2)\, dt^2\int_0^{m_3}(t^3)^2\, u_3(t^3)\, dt^3 .$$

Astfel că

$$r_3^7 = \frac{8h_1^{2p_1+3}\, h_2^{2p_2+3}\, h_3^{2p_3+3}}{(2\,p_1+2)\,!\,(2\,p_2+2)\,!\,(2\,p_3+2)\,!}\, D_{\xi_1}^{2p_1+2}\, D_{\xi_2}^{2p_2+2}\, D_{\xi_3}^{2p_3+2}\int_0^{m_1}(t^1)^2\, u_1\, dt^1\times$$

$$\times\int_0^{m_2}(t^2)^2\, u_2\, dt^2\int_0^{m_3}(t^3)^2\, u_3\, dt^3 .$$

Așadar în E_3 restul formulei de cubatură (39) poate fi exprimat prin formula

$$r_3 = r_3^1 + \ldots + r_3^7 = \frac{8m_2\, m_3\, h_1^{2p_1+3}\, h_2\, h_3}{(2\,p_1+2)\,!}\, B_1\, D_{\xi_1}^{2p_1+2} +$$

$$+ \frac{8\, m_1\, m_3\, h_1\, h_2^{2p_2+3}\, h_3}{(2\,p_2+2)\,!}\, B_2\, D_{\xi_2}^{2p_2+2} + \frac{8\, m_1\, m_2\, h_1\, h_2\, h_3^{2p_3+3}}{(2\,p_3+2)\,!}\, B_3\, D_{\xi_3}^{2p_3+2} -$$

$$- \frac{8\, m_3\, h_1^{2p_1+3}\, h_2^{2p_2+3}\, h_3}{(2\,p_1+2)\,!\,(2\,p_2+2)\,!}\, B_1\, B_2\, D_{\xi_1}^{2p_1+2}\, D_{\xi_2}^{2p_2+2} -$$

$$- \frac{8\, m_2\, h_1^{2p_1+3}\, h_2\, h_3^{2p_3+3}}{(2\,p_1+2)\,!\,(2\,p_3+2)\,!}\, B_1\, B_3\, D_{\xi_1}^{2p_1+2}\, D_{\xi_3}^{2p_3+2} - \tag{47}$$

$$- \frac{8\, m_1\, h_1\, h_2^{2p_2+3}\, h_3^{2p_3+3}}{(2\,p_2+2)\,!\,(2\,p_3+2)\,!}\, B_2\, B_3\, D_{\xi_2}^{2p_2+2}\, D_{\xi_3}^{2p_3+2} +$$

$$+ \frac{8\, h_1^{2p_1+3}\, h_2^{2p_2+3}\, h_3^{2p_3+3}}{(2\,p_1+2)\,!\,(2\,p_2+2)\,!\,(2\,p_3+2)\,!}\, B_1\, B_2\, B_3\, D_{\xi_1}^{2p_1+2}\, D_{\xi_2}^{2p_2+2}\, D_{\xi_3}^{2p_3+2} ,$$

unde

$$B_i = \int_0^{m_i}(t^i)^2\, u_i(t^i)\, dt^i .$$

12. O categorie importantă de formule de cubatură se obține din (39) dacă se ia $m_i = p_i$, $i = \overline{1, s}$. Asemenea formule le vom numi, împreună cu I. F. Steffensen [6] și S. E. Mikeladze [1], formule de tip închis.

In cazul cînd limitele integralei a $i-a$ $(i = \overline{1, s})$ sînt în afara intervalului $(t_0^i - p_i h_i,\ t_0^i + p_i h_i)$, cu alte cuvinte $m_i > p_i$ $(i = \overline{1, s})$, obținem așa numitele formule de tip deschis.

Și, în sfîrșit, dacă $m_i < p_i$, obținem formulele de cubatură cu noduri așezate în afara domeniului de integrare.

§ 3. Cazuri particulare importante ale formulelor de cubatură precedente

13. Vom considera acum anumite cazuri particulare, care ni se par mai interesante, ale formulei (39).

In cazul $s=1$ majoritatea formulelor care se obțin au fost date de către I. F. Steffensen [6], S. E. Mikeladze [1], W. E. Milne [2], etc.

Schimbînd puțin notațiile, formula (39) în cazul $s=1$ devine

$$\begin{aligned} \int_{x_0-mh}^{x_0+mh} f(x)\, dx &= h\left[A_0^0 f(x_0) + \sum_{j=1}^{p} A_j^1\, S_j^0 f(x_0)\right] + r_1 = \\ &= h\left[A_0^0 f(x_0) + \sum_{j=1}^{p} A_j^1\Big(f(x_0 + jh) + f(x_0 - jh)\Big)\right] + r_1 , \end{aligned} \tag{48}$$

unde

$$\frac{1}{2} A_0^0 = \frac{(-1)^p}{(p\,!)^2} \int_0^m (x^2-1)\dots(x^2-p^2)\,dx$$

$$\frac{1}{2} A_j^0 = \frac{(-1)^{p-j}}{(p-j)\,!\,(p+j)\,!} \int_0^m x^2(x^2-1)\dots(x^2-\overline{j-1}^2)$$

și

$$\frac{1}{2} r_1 = \frac{h^{2p+3}}{(2p+2)\,!} D_\xi^{2p+2} \int_0^m x^2(x^2-1)\dots(x^2-p^2)\,dx.$$

14. Dacă se ia în (48) $p=0$ se obține formula de cuadratură cu un nod

$$\int_{x_0-mh}^{x_0+mh} f(x)\,dx = 2mh\,f(x_0) + \frac{m^3 h^3}{3} f''(\xi), \tag{49}$$

iar dacă facem $p=1$ se găsește formula cu 3 noduri

$$\int_{x_0-mh}^{x_0+mh} f(x)\,dx = \frac{mh}{3}\left[2(3-m^2)f(x_0) + m^2\overline{f(x_0+h) + f(x_0-h)}\right] + \frac{m^3(3m^2-5)}{180} h^5 f^{(IV)}(\xi). \tag{50}$$

Pentru $m=1$ se obține o binecunoscută formulă de tip închis: formula lui Cavalieri-Simpson.

Pentru $m=3$, $p=2$ se găsește formula de cuadratură de tip deschis

$$\int_{x_0-3h}^{x_0+3h} f(x)dx = \frac{h}{30}\Big[234 f(x_0) - 126\,\overline{f(x_0+h)+f(x_0-h)} + 99\,\overline{f(x_0+2h)+f(x_0-2h)}\Big] + \frac{41}{140} h^7 f^{(VI)}(\xi)$$

de grad de exactitate 5.

15. In cazul $s=2$ formula de cubatură (39) se scrie

$$\int_{x_0-mh}^{x_0+mh} dx \int_{y_0-nk}^{y_0+nk} f(x,y)\,dy = hk\Big[A_0^0 f(x_0,x_0) + \sum_{i=1}^{p} A_i^1 S_i^{0,1} f(x_0,y_0) + \sum_{j=1}^{q} A_j^2 S_j^{0,2} f(x_0,y_0) + \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q} A_{i,j}^{1,2} S_i^{0,1} S_j^{0,2} f(x_0,y_0)\Big] + r_2, \tag{51}$$

sau mai explicit

$$\int_{x_0-mh}^{x_0+mh} dx \int_{y_0-nk}^{y_0+nk} f(x,y)\,dy =$$

$$= hk\Big[A_0^0 f(x_0,y_0) + \sum_{i=1}^{p} A_i^1\Big(f(x_0+ih,y_0) + f(x_0-ih,y_0)\Big) + \sum_{j=1}^{q} A_j^2\Big(f(x_0,y_0+jk) + f(x_0,y_0-jk)\Big) + \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q} A_{i,j}^{1,2}\Big(f(x_0+ih,y_0+jk) + f(x_0-ih,y_0+jk) + f(x_0+ih,y_0-jk) + f(x_0-ih,y_0-jk)\Big)\Big] + r_2, \tag{52}$$

unde

$$\frac{1}{4} A_0^0 = \frac{(-1)^{p+q}}{(p\,!)^2\,(q\,!)^2} \int_0^m\int_0^n u(x)\,v(y)\,dx\,dy$$

$$\frac{1}{4} A_i^1 = \frac{(-1)^{p+q-i}}{(p-i)\,!\,(p+i)\,!\,(q\,!)^2} \int_0^m\int_0^n v(y)\,a_i(x)\,dx\,dy \tag{53}$$

$$\frac{1}{4} A_j^2 = \frac{(-1)^{p+q-j}}{(p\,!)^2\,(q-j)\,!\,(q+j)\,!} \int_0^m\int_0^n u(x)\,b_j(y)\,dx\,dy$$

$$\frac{1}{4} A_{i,j}^{1,2} = \frac{(-1)^{p+q-i-j}}{(p-i)\,!\,(p+i)\,!\,(q-j)\,!\,(q+j)\,!} \int_0^m\int_0^n a_i(x)\,b_j(y)\,dx\,dy$$

iar

$$u(x) = \prod_{i=1}^{p}(x^2-i^2),\quad v(y) = \prod_{j=1}^{q}(y^2-j^2)$$

$$a_i(x) = x^2(x^2-1)\dots(x^2-\overline{i-1}^2)(x^2-\overline{i+1}^2)\dots(x^2-p^2) \tag{54}$$

$$b_j(y) = y^2(y^2-1)\dots(y^2-\overline{j-1}^2)(y^2-\overline{j+1}^2)\dots(y^2-q^2).$$

Restul are următoarea expresie

$$\frac{1}{4} r_2 = \frac{nh^{2p+3}k}{(2p+2)\,!} D_\xi^{2p+2} \int_0^m x^2 u(x)\,dx + \frac{mhk^{2q+3}}{(2q+2)\,!} D_\eta^{2q+2} \int_0^n y^2 v(y)\,dy - \frac{h^{2p+3}k^{2q+3}}{(2p+2)\,!\,(2q+2)\,!} D_\xi^{2p+2} D_\eta^{2q+2} \int_0^m x^2 u(x)\,dx \int_0^n y^2 v(y)\,dy. \tag{55}$$

16. Dacă în (52) se ia $p=q=0$ se obține următoarea formulă de cubatură de tip deschis de grad de exactitate (1,1)

$$\int_{x_0-mh}^{x_0+mh} dx \int_{y_0-nk}^{y_0+nk} f(x,y)\,dy = 4\,mn\,hk\,f(x_0,y_0) = \rho,$$

unde

$$\rho = \frac{2}{3} m^3 n h^3 k D_\xi^2 + \frac{2}{3} m n^3 h k^3 D_\eta^2 - \frac{1}{9} m^3 n^3 h^3 k^3 D_\xi^2 D_\xi^2.$$

Se obține o formulă de cubatură importantă dacă se ia $p=q=1$

$$\int_{x_0-mh}^{x_0+mh} dx \int_{y_0-nk}^{y_0+nk} f(x,y)\, dy =$$

$$= \frac{nmhk}{9}\Big[4\,(m^2-3)\,(n^2-3)\,f(x_0,y_0) - 2m^2\,(n^3-3)\,.$$

$$\cdot \Big(f(x_0+h,y_0) + f(x_0-h,y_0)\Big) - 2n^2\,(m^2-3)\Big(f(x_0,y_0+k) + f(x_0,y_0-k)\Big) +$$

$$+ m^2 n^2 \Big(f(x_0+h,y_0+k)$$

$$+ f(x_0-h,y_0+k) + f(x_0+h,y_0-k) + f(x_0-h,y_0-k)\Big)\Big] + \rho,$$

unde restul are expresia

$$\rho = \frac{h^5 k m^3 n (3m^2-5)}{90} D_\xi^4 + \frac{h k^5 m n^3 (3n^2-5)}{90} D_\eta^4 -$$

$$- \frac{h^5 k^5 m^3 n^3 (3m^2-5)(3n^2-5)}{144} D_\xi^4 D_\eta^4 .$$

Făcînd mai sus $m=n=1$ se ajunge la formula de cubatură a lui Cavalieri-Simpson pentru două variabile

$$\int_{x_0-h}^{x_0+h} dx \int_{y_0-k}^{y_0+k} f(x,y)\, dy =$$

$$= \frac{hk}{9}\,[f(x_0+h,y_0+k) + f(x_0-h,y_0+k) + f(x_0+h,y_0-k) + f(x_0-h,y_0-k)$$

$$+4\Big(f(x_0+h,y_0) + f(x_0-h,y_0) + f(x_0,y_0+k) + f(x_0,y_0-k)\Big) + 16\, f(x_0,\, y_0)] + \rho,$$

unde

$$\rho = -\frac{hk}{45}\left[h^4 D_\xi^4 + k^4 D_\eta^4 + \frac{1}{180} h^4 k^4 D_\xi^4 D_\eta^4\right].$$

Am regăsit astfel pe altă cale expresia (25) a restului formulei lui Cavalieri-Simpson.

Pentru $m=n=2$ avem

$$\int_{x_0-2h}^{x_0+2h} dx \int_{y_0-2k}^{y_0+2k} f(x,y)\, dy =$$

$$= \frac{16\,h\,k}{9}\,\{ f(x_0,y_0) - 2\,[f(x_0+h,y_0) + f(x_0-h,y_0) + f(x_0,y_0+k) + f(x_0,y_0-k)] +$$

$$+4\,[f(x_0+h,y_0+k) + f(x_0-h,y_0+k) + f(x_0+h,y_0-k) + f(x_0-h,y_0-k)]\} + \rho,$$

cu

$$\rho = \frac{56}{45} h^5 k\, D_\xi^4 + \frac{56}{45} h k^5\, D_\eta^4 - \frac{196}{9} h^5 k^5\, D_\xi^4 D_\eta^4 .$$

Pentru $p=q=2$ formula (52) devine, luînd pentru simplificare $x_0=y_0=0$

$$\int_{-mh}^{mh}\int_{-nk}^{nk} f(x,y)\,dx\,dy =$$

$$= \frac{nmhk}{32400}\,\{C_{00} f(0,0) + C_{10}\,[f(h,0)+f(-h,0)] + C_{20}\,[f(2h,0)+f(-2h,0)] \qquad (56)$$

$$+C_{01}[f(0,k)+f(0,-k)] + C_{02}[f(0,2k)+f(0,-2k)] + C_{11}[f(h,h)+f(-h,k)$$

$$+f(h,-k)+f(-h,-k)] + C_{12}\,[f(h,2k)+f(-h,2k)+f(h,-2k)+f(-h,-2k)]$$

$$+C_{21}[f(2h,k)+f(-2h,k)+f(2h,-k)+f(-2h,-k)] + C_{22}[f(2h,2k)$$

$$+ f(-2h,2k)+f(2h,-2k)+f(-2h,-2k)]\} + \rho.$$

unde

$$\rho = \frac{nmhk}{3780}\,[A h^6 D_\xi^6 + B\, k^6 D_\eta^6 - C h^6 k^6 D_\xi^6 D_\eta^6]$$

$$C_{00} = 36\,(3m^4-25\,m^2+60)(3n^4-25n^2+60)$$
$$C_{10} = -24m^2(3\,m^2-20)(2n^4-25\,n^2+60)$$
$$C_{20} = 6\,m^2(3m^2-5)(3n^4-25\,n^2+60)$$
$$C_{01} = -24\,n^2(3n^2-20)(3m^4-25\,m^2+60)$$
$$C_{02} = 6\,n^2(3\,n^2-5)(3\,m^4-25\,n^2+60)$$
$$C_{11} = 16\,m^2n^2(3m^2-20)(3n^2-20)$$
$$C_{12} = -4m^2n^2(3m^2-20)(3n^2-5)$$
$$C_{21} = -4m^2n^2(3m^2-5)(3n^2-20)$$
$$C_{22} = m^2n^2(3m^2-5)(3n^2-5)$$

iar

$$A = m^2(3m^4-21\,m^2+28)$$
$$B = n^2(3n^4-21\,n^2+28)$$

$$C = \frac{1}{15120} m^2 n^2 (3m^4-21m^2+28)(3n^4-21n^2+28).$$

Dacă în (56) se face $n=m=2$ se obține următoarea formulă de cubatură de tip închis, care are gradul parțial de exactitate (5,5) :

$$\int_{-2h}^{2h}\int_{-2k}^{2k} f(x,y)\,dx\,dy = \frac{4\,hk}{2025}\{144\,f(0,0) + 384[f(-h,0)+f(h,0)+f(0,-k)+f(0,k)]$$

$$+84\,[f(-2h,0)+f(0,-2k)+f(0,2k)+f(2h,0)] + 1024\,[f(-h,-k)+f(-h,k)+$$

$$+f(h,-k)+f(h,k)] + 224\,[f(-2h,-k)+f(-2h,k)+f(-h,-2k)+f(-h,2k)+$$

$$+f(h,-2k)+f(h,2k)+f(2h,-k)+f(2h,k)] + 49\,[f(-2h,-2k)+f(-2h,2k)$$

$$+f(2h,-2k)+f(2h,2k)]\} + \rho.$$

cu

$$\rho = -\frac{32\,hk}{945}\left[h^6 D_\xi^6 + k^6 D_\eta^6 + \frac{2}{945} h^6 k^6 D_\xi^6 D_\eta^6\right].$$

Pentru $m=n=3$ se obține formula de cubatură de tip deschis

$$\int_{-3h}^{3h}\int_{-3k}^{3k} f(x,y)\,dx\,dy=\frac{9hk}{100}\{676f(0,0)-364[f(h,0)+f(-h,0)+f(0,k)$$
$$+f(0,-k)]+286[f(0,2k)+f(0,-2k)+f(2h,0)]+196[f(h,k)+$$
$$+f(-h,k)+f(h,-k)+f(-h,-k)]-154\,[f(h,2k)+f(-h,2k)+f(h,-2k)$$
$$+f(-h,-2k)+f(2h,k)+f(-2h,k)+f(2h,-k)+f(-2h,-k)]+121\,[f(2h,2k)$$
$$+f(-2h,2k)+f(2h,-2k)+f(-2h,-2k)]\ +\rho,$$

unde

$$\rho=\frac{123}{70}hk\left[h^6D_\xi^6+k^6D_\eta^6-\frac{41}{840}h^6k^6D_\xi^6D_\eta^6\right]f.$$

Pentru $m=n=2$ din (56) se obține o formulă de cubatură cu noduri în afara domeniului de integrare, care merită să fie menționată.

17. In cazul $s=3$ formula de cubatură (39) se scrie

$$\int_{x_0-m_1h_1}^{x_0+m_1h_1}dx\int_{y_0-m_2h_2}^{y_0+m_2h_2}dy\int_{z_0-m_3h_3}^{z_0+m_3h_3}f(x,y,z)dz=$$
$$=h_1h_2h_3\,[A_0^0f(x_0,y_0,z_0)+\sum_{j_1=1}^{p_1}A_{j_1}^1S_{j_1}^{0,1}f(x_0,y_0,z_0)+\sum_{j_2=1}^{p_2}A_{j_2}^2S_{j_2}^{0,2}f(x_0,y_0,z_0)$$
$$+\sum_{j_3=1}^{p_3}A_{j_3}^3S_{j_3}^{0,3}f(x_0,y_0,z_0)+\sum_{j_1=1}^{p_1}\sum_{j_2=1}^{p_2}A_{j_1j_2}^{1,2}S_{j_1}^{0,1}S_{j_2}^{0,2}f(x_0,y_0,z_0)+$$
$$+\sum_{j_1=1}^{p_1}\sum_{j_3=1}^{p_3}A_{j_1j_3}^{1,3}S_{j_1}^{0,1}S_{j_3}^{0,3}f(x_0,y_0,z_0)+\sum_{j_2=1}^{p_2}\sum_{j_3=1}^{p_3}A_{j_2j_3}^{2,3}S_{j_2}^{0,2}S_{j_3}^{0,3}f(x_0,y_0z_0)$$
$$+\sum_{j_1=1}^{p_1}\sum_{j_2=1}^{p_2}\sum_{j_3=1}^{p_3}A_{j_1j_2j_3}^{1,2,3}S_{j_1}^{0,1}S_{j_2}^{0,2}S_{j_3}^{0,3}f(x_0,y_0,z_0)]+r_3,$$

unde

$$S_{j_1}^{0,1}f(x_0,y_0,z_0)=f(x_0+j_1h_1,y_0,z_0)+f(x_0-j_1h_1,y_0,z_0) \tag{58}$$
$$S_{j_2}^{0,2}f(x_0,y_0,z_0)=f(x_0,y_0+j_2h_2,z_0)+f(x_0,y_0-j_2h_2,z_0)$$
$$S_{j_3}^{0,3}f(x_0,y_0,z_0)=f(x_0,y_0,z_0+j_3h_3)+f(x_0,y_0,z_0-j_3h_3)$$

iar restul r_3 are expresia de la (42) cu modificarea notației deja folosită

$$t^1=x,\qquad t^2=y,\qquad t^3=z$$
$$t_0^1=x_0,\qquad t_0^2=y_0,\qquad t_0^3=z_0.$$

Coeficienții formulei (57) au expresiile

$$\frac{1}{8}A_0^0=\frac{(-1)^{p_1+p_2+p_3}}{(p_1!)^2(p_2!)^2(p_3!)}\int_0^{m_1}\int_0^{m_2}\int_0^{m_3}u_1(x)u_2(y)u_3(z)\,dx\,dy\,dz$$

$$\frac{1}{8}A_{j_1}^1=\frac{(-1)^{p_1+p_2+p_3-j_1}}{(p_1-j_1)!\,(p_1+j_1)!\,(p_2!)^2\,(p_3!)^2}\int_0^{m_1}\int_0^{m_2}\int_0^{m_3}v_{j_1}^1(x)u_2(y)u_3(z)\,dx\,dy\,dz$$

$$\frac{1}{8}A_{j_2}^2=\frac{(-1)^{p_1+p_2+p_3-j_2}}{(p_2-j_2)!(p_2+j_2)!(p_1!)^2(p_3!)^2}\int_0^{m_1}\int_0^{m_2}\int_0^{m_3}u_1(x)v_{j_2}^2(y)\,u_3(z)\,dx\,dz\,dy$$

$$\frac{1}{8}A_{j_3}^3=\frac{(-1)^{p_1+p_2+p_3-j_3}}{(p_3-j_3)!(p_3+j_3)!(p_1!)^2(p_2!)^2}\int_0^{m_1}\int_0^{m_2}\int_0^{m_3}u_1(x)u_2(y)\,v_{j_3}^3(z)\,dx\,dy\,dz$$

$$\frac{1}{8}A_{j_1j_2}^{1,2}=\frac{(-1)^{p_1+p_2+p_3-j_1-j_2}}{(p_1-j_1)!\,(p_1+j_1)!\,(p_2-j_2)!\,(p_2+j_2)!\,(p_3!)^2}\cdot$$
$$\cdot\int_0^{m_1}\int_0^{m_2}\int_0^{m_3}v_{j_1}^1(x)\,v_{j_2}^2(y)\,u_3(z)\,dx\,dy\,dz$$

$$\frac{1}{8}A_{j_1j_3}^{1,3}=\frac{(-1)^{p_1+p_2+p_3-j_1-j_3}}{(p_1-j_1)!(p_1+j_1)!(p_2!)^2(p_3-j_3)!(p_3+j_3)!}\cdot$$
$$\cdot\int_0^{m_1}\int_0^{m_2}\int_0^{m^3}v_{j_1}^1(x)\,u_2(y)\,v_{j_3}^3(z)\,dx\,dy\,dz$$

$$\frac{1}{8}A_{j_2j_3}^{2,3}=\frac{(-1)^{p_1+p_2+p_3-j_2-j_3}}{(p_1!)^2(p_2-j_2)!\,(p_2+j_2)!\,(p_3-j_3)!\,(p_3+j_3)!}\cdot$$
$$\cdot\int_0^{m_1}\int_0^{m_2}\int_0^{m_3}u_1(x)\,v_{j_2}^2(y)\,v_{j_3}^3(z)\,dx\,dy\,dz$$

$$\frac{1}{8}A_{j_1j_2j_3}^{1,2,3}=\frac{(-1)^{p_1+p_2+p_3-j_1-j_2-j_3}}{(p_1-j_1)!(p_1+j_1)!(p_2-j_2)!(p_2+j_2)!(p_3-j_3)!(p_3+j_3)!}\cdot$$
$$\cdot\int_0^{m_1}\int_0^{m_2}\int_0^{m_3}v_{j_1}^1(x)\,v_{j_2}^2(y)\,v_{j_3}^3(z)\,dx\,dy\,dz.$$

18. Ne vom opri acum asupra unor cazuri particulare importante ale acestei formule.

Pentru $p_1=p_2=p_3=0$ se obține o formulă de cubatură care folosește un singur nod și are gradul parțial de exactitate (1,1,1)

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz=8\,m_1m_2m_3h_1h_2h_3f(x_0,y_0,z_0)+\rho, \tag{59}$$

unde D este paralelipipedul

$$x_0-m_1h_1\leqq x\leqq x_0+m_1h_1\,,\ y_0-m_2h_2\leqq y\leqq y_0+m_2h_2\,,\ z_0-m_3h_3\leqq z\leqq z_0+m_3h_3 \tag{60}$$

iar restul are expresia

$$\rho=\frac{m_1m_2m_3h_1h_2h_3}{3}\Big[4m_1^2h_1^2D_\xi^2+4m_2^2h_2^2D_\eta^2+4m_3^2h_3^2D_\zeta^2-\frac{2}{3}m_1^2m_2^2h_1^2h_2^2D_\xi^2D_\eta^2-$$
$$-\frac{2}{3}m_1^2m_3^2h_1^2h_3^2D_\xi^2D_\zeta^2-\frac{2}{3}m_2^2m_3^2h_2^2h_3^2D_\eta^2D_\zeta^2+\frac{1}{9}m_1^2m_2^2m_3^2h_1^2h_2^2h_3^2D_\xi^2D_\eta^2D_\zeta^2\Big].$$

Se observă că unicul nod pe care e definită această formulă se găsește în centrul de greutate al domeniului D, presupus omogen. Această formulă e de tip Gauss, întrucît folosește minimul de noduri posibil.

19. Făcînd în formula (57) $p=p_2=p_3=1$, se obține formula de cubatură

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz=$$
$$=\frac{m_1m_2m_3h_1h_2h_3}{27}\Big[-8(m_1^2-3)(m_2^2-3)(m_3^2-3)f(x_0,y_0,z_0)+4m_1^2(m_2^2-3)(m_3^2-3).$$
$$.S_1^{0,1}f(x_0,y_0,z_0)+4(m_1^2-3)m_2^2(m_3^2-3)S_1^{0,2}f(x_0,y_0,z_0)+4(m_1^2-3)(m_2^2-3)m_3^2.$$
$$.S_1^{0,3}f(x_0,y_0,z_0)-2m_1^2m_2^2(m_3^2-3)S_1^{0,1}S_1^{0,2}f(x_0,y_0,z_0)-2m_1^2(m_2^2-3)m_3^2. \tag{60}$$
$$.S_1^{0,1}S_1^{0,3}f(x_0,y_0,z_0)-2(m_1^2-3)m_2^2m_3^2S_1^{0,2}S_1^{0,3}f(x_0,y_0,z_0)+m_1^2m_2^2m_3^2.$$
$$.S_1^{0,1}S_1^{0,2}S_1^{0,3}f(x_0,y_0,z_0)\Big]+\rho$$

unde

$$\rho=\frac{m_1^3(3m_1^2-5)m_2m_3h_1^5h_2h_3}{45}D_\xi^4+\frac{m_1m_2^3(3m_2^2-5)m_3h_1h_2^5h_3}{45}D_\eta^4$$
$$+\frac{m_1m_2m_3^3(3m_3^2-5)h_1h_2h_3^5}{45}D_\zeta^4-\frac{m_1^3(3m_1^2-5)m_2^3(3m_2^2-5)m_3}{16200}h_1^5h_2^5h_3D_\xi^4D_\eta^4$$
$$-\frac{m_1^3(3m_1^2-5)m_2m_3^3(3m_3^2-5)}{16200}h_1^5h_2h_3^5D_\xi^4D_\zeta^4-\frac{m_1m_2^3(3m_2^2-5)m_3^3(3m_3^2-5)}{16200}.$$
$$.h_1h_2^5h_3^5D_\eta^4D_\zeta^4+\frac{m_1^3(3m_1^2-5)m_2^3(3m_2^2-5)m_3^3(3m_3^2-5)}{5832000}h_1^5h_2^5h_3^5D_\xi^4D_\eta^4D_\zeta^4.$$

Din aceasta vom obține imediat următoarea formulă de cubatură care reprezintă extinderea formulei lui Cavalieri-Simpson la trei variabile

$$\int_{x_0-h_1}^{x_0+h_1}dx\int_{y_0-h_2}^{y_0+h_2}dy\int_{z_0-h_3}^{z_0+h_3}f(x,y,z)\,dz=$$
$$=\frac{h_1h_2h_3}{27}\{f(x_0+h_1,y_0+h_2,z_0+h_3)+f(x_0+h_1,y_0+h_2,z_0-h_3)+f(x_0-h_1,y_0+h_2,z_0+h_3)$$
$$+f(x_0-h_1,y_0+h_2,z_0-h_3)+f(x_0+h_1,y_0-h_2,z_0+h_3)+f(x_0+h_1,y_0-h_2,z_0-h_3)$$
$$+f(x_0-h_1,y_0-h_2,z_0+h_3)+f(x_0-h_1,y_0-h_2,z_0-h_3)+4[f(x_0,y_0+h_2,z_0+h_3)+$$
$$+f(x_0,y_0+h_2,z_0-h_3)+f(x_0,y_0-h_2,z_0+h_3)+f(x_0,y_0-h_2,z_0-h_3)+$$
$$+f(x_0+h_1,y_0,z_0+h_3)+f(x_0+h_1,y_0,z_0-h_3)+f(x_0-h_1,y_0,z_0+h_3)+ \tag{61}$$
$$+f(x_0-h_1,y_0,z_0-h_3)+f(x_0+h_1,y_0-h_2,z_0)+f(x_0-h_1,y_0+h_2,z_0)$$
$$+f(x_0+h_1,y_0-h_2,z_0)+f(x_0-h_1,y_0-h_2,z_0)]+16[f(x_0,y_0,z_0+h_3)+$$
$$+f(x_0,y_0,t_0-h_3)\,\Omega f(x_0,y_0+h_2,z_0)+f(x_0,y_0-h_2,z_0)+f(x_0+h_1,y_0,z_0)+$$
$$+f(x_0-h_1,y_0,z_0)]+64f(x_0,y_0,z_0)\}+\rho.$$

unde

$$\rho=-\frac{h_1h_2h_3}{45}\Big[2h_1^4D_\xi^4+2h_2^4D_\eta^4+2h_3^4D_\zeta^4+\frac{1}{90}h_1^4h_2^4D_\xi^4D_\eta^4+\frac{1}{90}h_1^4h_3^4D_\xi^4D_\zeta^4+$$
$$+\frac{1}{90}h_2^4h_3^4D_\eta^4D_\zeta^4+\frac{1}{16200}h_1^4h_2^4h_3^4D_\xi^4D_\eta^4D_\zeta^4\Big]$$

Dacă în formula (60) facem $m_1=m_2=m_3=2$ se obține următoarea formulă de cubatură de tip deschis, care utilizează același număr de noduri ca și formula (61) și are la fel gradul parțial de exactitate (3,3,3)

$$\int_{-2h_1}^{2h_1}\int_{-2h_2}^{2h_2}\int_{-2h_3}^{2h_3}f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz=$$
$$=\frac{64h_1h_2h_3}{27}\{-f(0,0,0)+2[f(0,0,h_3)+f(0,0,-h_3)+f(0,h_2,0)+f(0,-h_2,0)+$$
$$+f(h_1,0,0)+f(-h_1,0,0)]-4[f(0,h_2,h_3)+f(0,h_2,-h_3)+f(0,-h_2,h_3) \tag{62}$$
$$+f(0,-h_2,-h_3)+f(h_1,0,h_3)+f(h_1,0,-h_3)+f(-h_1,0,h_3)+f(-h_1,0,-h_3)+$$
$$+f(h_1,h_2,0)+f(-h_1,h_2,0)+f(h_1,-h_2,0)+f(-h_1,-h_2,0)]+8[f(h_1,h_2,h_3)+$$
$$+f(h_1,h_2,-h_3)+f(-h_1,h_2,h_3)+f(-h_1,h_2,-h_3)+f(h_1,-h_2,h_3)+f(h_1,-h_2,-h_3)+$$
$$+f(-h_1,-h_2,h_3)+f(-h_1,-h_2,-h_3)]\}+\rho,$$

unde

$$\rho=\frac{1792}{45}h_1h_2h_3\Big[4(h_1^4D_\xi^4+h_2^4D_\eta^4+h_3^4D_\zeta^4)-\frac{98}{45}(h_1^4h_2^4D_\xi^4D_\eta^4+h_1^4h_3^4D_\xi^4D_\zeta^4+$$
$$+h_2^4h_3^4D_\eta^4D_\zeta^4)+\frac{7}{2025}h_1^4h_2^4h_3^4D_\xi^4D_\eta^4D_\zeta^4\Big].$$

Alte formule de integrare numerică au fost date în lucrarea [4].

§. 4. Formula de integrare numerică a lui Cavalieri-Simpson în E_s

20. In încheiere vom da, sub formă explicită, două din formulele de cubatură mai importante deduse deja în cazurile $s=1$, 2 și 3.

Astfel avem formula de cubatură de grad de exactitate $(1,1,\ldots,1)$

$$\iint\ldots\int_D f(M)\,dM=2^s m_1\ldots m_s h_1\ldots h_s f(M_0)+\rho,$$

unde D este hiperparalelipipedul

$$t_0^i-m_ih_i\leqq t^i\leqq t_0^i+m_ih_i \qquad (i=\overline{1,s})$$

iar restul are expresia

$$\rho=\frac{m_1m_2\ldots m_sh_1\ldots h_s}{3}\Big[2^{s-1}m_1^2h_1^2D_{\xi_1}^2+\cdots+2^{s-1}m_s^2h_s^2D_{\xi_s}^2-2^{s-2}\frac{m_1^2m_2^2h_1^2h_2^2}{3}D_{\xi_1}^2D_{\xi_2}^2-$$
$$-\ldots-2^{s-2}\frac{m_{s-1}^2m_s^2h_{s-1}^2h_s}{3}D_{\xi_{s-1}}^2D_{\xi_s}^2 \tag{63}$$
$$+\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+\frac{(-1)^{s-1}}{3^{s-1}}m_1^2\ldots m_s^2h_1^2\ldots h_s^2D_{\xi_1}^2\ldots D_{\xi_s}^2\Big].$$

21. Dacă în formula (39) se face

$$p_1=p_2=\ldots=p_s=m_1=m_2=\ldots=m_s=1$$

se obţine următoarea formulă de cubatură, de grad parţial de exactitate (3,3,...,3), care reprezintă extinderea formulei lui Cavalieri-Sompson în E_s

$$\iint\cdots\int_D f(M)dM= \tag{64}$$

$$=\frac{h_1h_2\ldots h_s}{3^s}\{4^s f(M_0)+4^{s-1}\sum_{i_1=1}^{s} S_1^{0,i_1}f(M_0)+4^{s-2}\sum_{\substack{i_1=1\\(i_1<i_2)}}^{s-1}\sum_{i_2=2}^{s} S_1^{0,i_1}S_1^{0,i_2}f(M_0)+$$

$$+\ldots+S_1^{0,1}\ldots S_1^{0,s}f(M_0)\}+\rho_s,$$

unde restul e dat de formula

$$-\frac{1}{2^s}\rho_s=\frac{1}{180}\sum_{i=1}^{s}N_ih_1\ldots h_{i-1}h_1^5h_{i+1}\ldots h_sD_{\xi_i}^4+ \tag{65}$$

$$+\frac{1}{180^2}\sum_{\substack{i=1\\(i<k)}}^{s-1}\sum_{k=2}^{s}N_{ik}h_1\ldots h_{i-1}h_i^5h_{i+1}\ldots h_{k-1}h_k^5h_{k+1}\ldots h_sD_{\xi_i}^4D_{\xi_k}^4$$

$$+\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+\frac{1}{180^s}h_1^5\ldots h_s^5D_{\xi_1}^4\ldots D_{\xi_s}^4.$$

Aici, pentru economie de scris, am folosit notaţiile introduse la (29), (34) şi (43).

22. In lucrarea [4] am stabilit mai multe formule de cubatură de un grad de exactitate global dat, iar în lucrarea [5] ne-am ocupat de formule de cubatură cu un număr minim de termeni. Intr-o lucrare următoare vom căuta să extindem aceste ultime rezultate.

BIBLIOGRAFIE

1. Ş. E. Mikeladze, *Cislennîe metodî matimaticeskogo analiza.* Moscova, 1953.
2. W. E. Milne, *Numerical calculus.* Princeton, 1949.
3. D. D. Stancu, *Consideraţii asupra interpolării polinomiale a funcţiilor de mai multe variabile.* Buletinul Universităţilor Babeş-Bolyai din Cluj, Seria ştiinţelor naturii, nr. 1–2, 1957.
4. — *Studiu asupra interpolării polinomiale a funcţiilor de mai multe variabile, cu aplicaţii la derivarea şi integrarea numerică; studiul restului.* Lucr. de disertaţie susţinută în Cluj, la 12. V. 1956.
5. — *Generalizarea unor formule de interpolare pentru funcţiile de mai multe variabile şi unele consideraţii asupra formulei de integrare numerică a lui Gauss.* Bul. ştiinţific, — Acad. R.P.R., nr. 2, 1957.
6. I. F. Steffensen, *Interpolation.* Baltimore, 1950.

ОТНОСИТЕЛЬНО ЧИСЛЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

(Краткое содержание)

Пользуясь некоторыми формулами интерполяций для функций многих переменных, автор строит несколько формул для приближенного вычисления кратных определенных интегралов. Для каждой приведенной формулы устанавливается выражение остаточного члена.

В первом параграфе, после общих сведений относительно численного интегрирования функций многих переменных, из одного предложения, автор выводит, в частности, формулу кавальери Симпсона для двух переменных. В этом случае дается и точное выражение остаточного члена (25) этой формулы.

Во втором параграфе, строится кубатурная формула (39) для s-кратных интегралов. В (42) устанавливается выражение остаточного члена этой формулы.

В третьем параграфе явно выводится из (39) целый ряд формул численного интегрирования для простых, двойных и тройных интегралов.

В последнем параграфе даются конкретно две кубатурные формулы для s-кратных интегралов: формулу (62), которая использует один узел и формулу (64), которая представляет собой обобщение квадратурной формулы Кавальери-Симпсона.

CONTRIBUTIONS À L'INTÉGRATION NUMÉRIQUE DES FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES

(Résumé)

En utilisant certaines formules d'interpolation pour les fonctions de plusieurs variables, on construit plusieurs formules pour le calcul approché des intégrales multiples définies. Pour chaque formule donnée on établit l'expression du reste.

Dans le premier paragraphe, après quelques considérations générales sur l'intégration numérique des fonctions de plusieurs variables, on déduit, en particulier, la formule de Cavalieri-Simpson pour deux variables. A cette occasion on donne aussi une expression précise du reste (25) de cette formule.

Dans le second paragraphe est construite une formule de cubature (39) pour les intégrales s-uples. Au (42) on établit l'expression du reste de cette formule.

Dans le troisième paragraphe on déduit sous une forme explicite, de (39), une série de formules d'intégration numérique pour les intégrales simple, double et triple.

Dans le dernier paragraphe on donne effectivement deux formules de cubature pour les intégrales s-uples: la formule (62) qui utilise un seul noeud et la formule (64) qui représente la généralisation de la formule de quadrature de Cavalieri-Simpson.