BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul III (VII), Fasc. 1—2, 1957

512.52

GENERALIZAREA UNOR POLINOAME DE INTERPOLARE PENTRU FUNCŢIILE DE MAI MULTE VARIABILE

DE

D. D. STANCU

1. Se ştie [1] că în cazul a două variabile, formula de interpolare a lui Newton relativă la o funcţie $f(x, y)$ şi la nodurile unei reţele dreptunghiulare definită de punctele $M_{i,k}(x_i, y_k)$ $(i = \overline{1, n+1}; k = \overline{1, m+1})$, se prezintă sub forma

$$(1)\quad f(x, y) = \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{k=1}^{m+1} (x-x_1)\dots(x-x_{i-1})(y-y_1)\dots(y-y_{k-1}) \begin{bmatrix} x_1, \dots, x_i \\ y_1, \dots, y_k \end{bmatrix}; f \Big] + r(x, y)$$

unde

$$(2)\quad r(x, y) = u(x)\, v(y) \left[\begin{matrix} x, x_1, \dots, x_{n+1} \\ y, y_1, \dots, y_{m+1} \end{matrix}; f\right], u(x) = \prod_{\nu=1}^{n+1} (x - x_\nu), \; v(x) = \prod_{k=1}^{m+1} (y - y_\mu)$$

iar

$$\left[\begin{matrix} \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p \\ \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_q \end{matrix}; f\right] = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{q} \frac{f(\alpha_i, \beta_j)}{u'(\alpha_i)\, v'(\beta_j)}$$

este diferenţa divizată de ordinul $(p-1, q-1)$ relativă la funcţia $f(x, y)$ şi la pq noduri ale căror coordonate sînt puse în evidenţă.

F. J. Steffensen [2] a generalizat această formulă făcînd ca numărul termenilor ei să depindă, într-un anumit sens, de numărul nodurilor de interpolare. Formula lui Steffensen este următoarea:

$$(3)\quad f(x, y) = \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=1}^{m_i+1} (x-x_1)\dots(x-x_{i-1})(y-y_1)\dots(y-y_{j-1}) \left[\begin{matrix} x_1, \dots, x_i \\ y_1, \dots, y_j \end{matrix}; f\right] + r_1(x, y),$$

unde

$$(4)\quad r_1(x, y) = (x-x_1)\dots(x-x_{n+1})[x, x_1, \dots, x_{n+1}; f] +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n+1} (x-x_1)\dots(x-x_{i-1})(y-y_1)\dots(y-y_{m_i+1}) \left[\begin{matrix} x_1, x_2, \dots, x_i \\ y, y_1, \dots, y_{m_i+1} \end{matrix}; f\right].$$

2. Formula aceasta se poate încă generaliza. Aplicînd funcției $f(x, y)$ formula de interpolare a lui Newton relativă la variabila x, se obține

$$(5)\quad f(x, y) = \sum_{i=1}^{n+1} (x-x_1) \ldots (x-x_{i-1}) [x_1, \ldots, x_i;\ f] + u(x) [x, x_1, \ldots, x_{n+1}; f].$$

Să considerăm acum funcția de y

$$(6)\qquad [x_1, x_2, \ldots, x_i;\ f(x, y)] = \sum_{k=1}^{i} \frac{f(x_k, y)}{\omega_i'(x_k)}, \quad \omega_i(x) = \prod_{k=1}^{i} (x-x_k).$$

Aceasta se poate de asemenea dezvolta după formula lui Newton. Să considerăm în acest scop ordonatele

$$(7)\qquad y_{i,1}, y_{i,2}, \ldots, y_{i,m_i+1},$$

a căror valori și număr depind de numărul natural i. Formula de interpolare relativă la funcția (6) și ordonatele (7) este

$$(8)\ [x_1, x_2, \ldots, x_i; f] = \sum_{j=1}^{m_i+1} (y - y_{i,1}) \ldots (y - y_{i,j-1}) \begin{bmatrix} x_1, x_2, \ldots, x_i & \\ y_{i,1}, y_{i,2}, \ldots, y_{i,j} & ; f \end{bmatrix} +$$

$$+ (y-y_{i,1}) \ldots y-(y_{i,m_i+1}) \begin{bmatrix} x_1, x_2, \ldots, x_i & \\ y, y_{i,1}, \ldots, y_{i,m_i+1} & ; f \end{bmatrix}.$$

Înlocuind în (5) obținem formula de interpolare

$$(9)\qquad f(x, y) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=1}^{m_i+1} (x-x_1) \ldots (x-x_{i-1}) (y-y_{i,1}) \ldots (y-y_{i,j-1}) \begin{bmatrix} x_1, \ldots, x_i & \\ y_{i,1}, \ldots, y_{i,j} & ; f \end{bmatrix} + R_2(x, y)$$

unde

$$(10)\qquad R_2(x, y) = (x-x_1) \ldots (x-x_{n+1}) [x, x_1, \ldots, x_{n+1};\ f] +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n+1} (x-x_1) \ldots (x-x_{i-1}) (y-y_{i,1}) \ldots (y-y_{i,m_i+1}) \begin{bmatrix} x_1, x_2, \ldots, x_i & \\ y, y_{i,1}, \ldots, y_{i,m_i+1} & ; f \end{bmatrix}.$$

Formula aceasta, care e mult mai suplă decît formulele clasice de interpolare ale lui Newton și Lagrange, generalizează formula (3) a lui Steffensen.

Se pot da multe exemple de distribuții importante de noduri pe care formula (9) le poate folosi dar pentru care care formula (3) nu se poate aplica.

3. Formula (9) se poate extinde imediat la funcțiile de mai multe variabile. Pentru a nu complica expunerea să ne ocupăm de cazul a trei variabile.

Dacă se aplică funcției $f(x, y, z)$ formula (9) se obține

$$(11)\qquad f(x, y, z) = \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=1}^{m_i+1} (x-x_1) \ldots (x-x_{i-1}) (y-y_{i,1}) \ldots (y-y_{i,j-1}) \times$$

$$\times \begin{bmatrix} x_1, \ldots, x_i & \\ y_{i,1}, \ldots, y_{i,j} & ; f \end{bmatrix} + R(x, y, z),$$

unde $R(x, y, z)$ este dat de (10) aplicat lui $f(x, y, z)$.

Să dezvoltăm acum după formula lui Newton funcția de z

$$\begin{bmatrix} x_1, x_2, \ldots, x_i & \\ y_{i,1}, y_{i,2}, \ldots, y_{i,j} & ; f \end{bmatrix},$$

folosind cotele

$$(12)\qquad z_{i,j,1}, z_{i,j,2}, \ldots, z_{i,j,p_{i,j}+1},$$

care presupunem că depind de i și j atît ca număr cît și ca poziție; vom obține

$$(13)\quad \begin{bmatrix} x_1, \ldots, x_i & \\ y_{i,1}, \ldots, y_{i,j} & ; f \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^{p_{i,j}+1} (z-z_{i,j,1}) \ldots (z_{i,j,k,-1}) \begin{bmatrix} x_1, \ldots, x_i & \\ y_{i,1}, \ldots, y_{i,j} & ; f \\ z_{i,j,1}, \ldots, z_{i,j,k} & \end{bmatrix} +$$

$$+ (z-z_{i,j,1}) \ldots (z-z_{i,j,p_{i,j}+1}) \begin{bmatrix} x_1, x_2, \ldots, x_i & \\ y_{i,1}, y_{i,2}, \ldots, y_{i,j} & ; f \\ z, z_{i,j,1}, \ldots, z_{i,j,p_{i,j}+1} & \end{bmatrix}.$$

Înlocuind în (11) obținem în definitiv

$$(14)\qquad f(x, y, z) =$$

$$\sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=1}^{m_i+1} \sum_{k=1}^{p_{i,j}+1} (x - x_1) \ldots (x-x_{i-1})(y-y_{i,1}) \ldots (y-y_{i,j-1})(z-z_{i,j,1}) \ldots (z-z_{i,j,k-1}) \times$$

$$\times \begin{bmatrix} x_1, \ldots, x_i & \\ y_{i,1}, \ldots, y_{i,j} & ; f \\ z_{i,j,1}, \ldots, z_{i,j,k} & \end{bmatrix} + R_3(x, y, z),$$

unde

$$(15)\qquad R_3(x, y, z) = (x-x_1)(x-x_2) \ldots (x-x_{n+1}) [x, x_1, \ldots, x_{n+1}; f] +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n+1} (x-x_1) \ldots (x-x_{i-1}) (y-y_{i,1}) \ldots (y-y_{i,m_i+1}) \begin{bmatrix} x_1, x_2, \ldots, x_i & \\ y, y_{i,j}, \ldots, y_{i,m_i+1} & ; f \end{bmatrix} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=1}^{m_i+1} (x-x_1) \ldots (x-x_{i-1}) (y - y_{i,1}) \ldots (y-y_{i,j-1}) (z-z_{i,j,1}) \ldots (z-z_{i,j,p_{i,j}+1}) \times$$

$$\times \begin{bmatrix} x_1, x_2, \ldots, x_i & \\ y_{i,1}, y_{i,2}, \ldots, y_{i,j} & ; f \\ z, z_{i,j,1}, \ldots, z_{i,j,p_{i,j}+1} & \end{bmatrix}.$$

4. Cazuri particulare importante ale formulei (14).

1) Dacă valorile şi numărul ordonatelor (7) şi cotelor (12) nu depind de i şi j, se obţine formula de interpolare a lui Newton pentru trei variabile

$$(16)\quad f(x,y,z)=\sum_{i=1}^{n+1}\sum_{j=1}^{m+1}\sum_{k=1}^{p+1}(x-x_1)\dots(x-x_{i-1})(y-y_1)\dots(y-y_{j-1})(z-z_1)\dots(z-z_{k-1})\times\begin{bmatrix}x_1,\dots,x_i\\ y_1,\dots,y_j;\,f\\ z_1,\dots,z_k\end{bmatrix}+$$

$$+(x-x_1)\dots(x-x_{n+1})(y-y_1)\dots(y-y_{m+1})(z-z_1)\dots(z-z_{p+1})\begin{bmatrix}x,x_1,\dots,x_{n+1}\\ y,y_1,\dots,y_{m+1};\,f\\ z,z_1,\dots,z_{p+1}\end{bmatrix}.$$

2) Dacă

$$(17)\quad m_i=n+1-i\ ,\quad p_{i,j}=n+2-i-j\ ,\quad y_{i,k}=y_k\ ,\quad z_{i,j,s}=z_s,$$

formula (14) devine

$$(18)\quad f(x,y,z)=$$

$$=\sum_{i=1}^{n+1}\sum_{j=1}^{n+2-i}\sum_{k=1}^{n+3-i-j}(x-x_1)\dots(x-x_{i-1})(y-y_1)\dots(y-y_{j-1})(z-z_1)\dots(z-z_{k-1})\times\begin{bmatrix}x_1,x_2,\dots,x_i\\ y_1,y_2,\dots,y_j;\,f\\ z_1,z_2,\dots,z_k\end{bmatrix}+\varrho_3(x,y,z),$$

unde restul e dat de formula

$$(19)\quad \varrho_3(x,y,z)=(x-x_1)\dots(x-x_{n+1})[x,x_1,\dots,x_{n+1};f]+$$

$$+\sum_{i=1}^{n+1}(x-x_1)\dots(x-x_{i-1})(y-y_1)\dots(y-y_{n+1-i})\begin{bmatrix}x_1,x_2,\dots,x_i\\ y,y_1,\dots,y_{n+1-i}\end{bmatrix};f\Bigg]+$$

$$+\sum_{i=1}^{n+1}\sum_{j=1}^{n+2-i}(x-x_1)\dots(x-x_{i-1})(y-y_1)\dots(y-y_{j-1})(z-z_1)\dots(z-z_{n+1-i-j})\times\begin{bmatrix}x_1,x_2,\dots,x_i\\ y_1,y_2,\dots,y_j\quad;f\\ z,z_1,\dots,z_{n+1-i-j}\end{bmatrix}.$$

Formula aceasta reprezintă o generalizare a unei formule de interpolare a lui O. B i e r m a n n [3]. Polinomul de interpolare folosit de formula (18) are gradul global n.

3) Dacă valorile ordonatelor (7) şi cotelor (12) se aleg independente de i şi j, se obţine extinderea formulei lui Steffensen la trei variabile.

4) În cazul cînd coordonatele (7) şi (12) nu depind, ca număr, de i şi j, dar valorile lor depind, se găseşte o formulă de interpolare care rezultă din (14) făcînd

$$m_i=m\ ,\quad p_{i,j}=p\,,\ (i=1,2,\dots,m+1;\ j=1,2,\dots,p+1).$$

5. Formula de interpolare (18), care foloseşte un polinom de interpolare de gradul global n în x,y,z, se referă la o reţea tetraedrică de $\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6}$ noduri şi anume

$$(20)\quad P_{i,j,k}\,(x_i,y_j,z_k)\ ,\quad (i=\overline{1,n+1}\ ;\ j=\overline{1,n+2-i}\ ;\ k=\overline{1,n+3-i-j}).$$

Relativ la restul (19) al formulei de interpolare (18) vom demonstra următoarea

T e o r e m ă. *Dacă funcţia $f(x,y,z)$ e continuă şi admite derivate parţiale continue pînă la ordinul $n+1$ inclusiv, restul în formula de interpolare (18) se poate pune sub următoarea formă*

$$\varrho_3(x,y,z)=$$

$$(21)\quad =\sum_{i=0}^{n+1}\sum_{j=0}^{n+1-i}\frac{(x-x_1)\dots(x-x_i)(y-y_1)\dots(y-y_j)(z-z_1)\dots(z-z_{n+1-i-j})}{i!\,j!\,(n+1-i-j)!}\times$$

$$\times\frac{\partial^{n+1}f(\xi,\eta,\zeta)}{\partial\xi^i\,\partial\eta^j\,\partial\zeta^{n+1-i-j}},$$

unde ξ, η, ζ sînt valori din cele mai mici intervale care conţin respectiv numerele $x_1,\dots,x_{n+1},x$; $y_1,\dots,y_{n+1},y$; $z_1,\dots,z_{n+1},z$.

Demonstraţia pe care o vom da e analoagă cu aceea care se foloseşte la stabilirea formulei lui Taylor pentru trei variabile.

Fie M_0 (x_0,y_0,z_0) un punct din tetraedrul (T) care conţine nodurile de interpolare şi să notăm

$$(22)\quad x-x_0=h,\ y-y_0=k\ ,\ z-z_0=l.$$

Să considerăm funcţia de variabila t

$$(23)\quad F(t)=f(x_0+ht,y_0+kt,z_0+lt)\ ,\ 0\leq t\leq 1.$$

Dacă $f(x,y,z)$ admite în (T) derivate pînă la ordinul $n+1$ inclusiv, atunci $F(t)$ va avea derivate continue pînă la ordinul $n+1$ inclusiv pe segmentul $0\leq t\leq 1$.

Putem dezvolta funcţia $F(t)$ după formula lui Mac-Laurin

$$(24)\quad F(t)=\sum_{s=0}^{n}\frac{t^s}{s!}F^{(s)}(0)+\frac{t^{n+1}}{(n+1)!}F^{(n+1)}(\vartheta t)\ ,\ 0<\vartheta<1.$$

Vom căuta restul formulei de interpolare (18) sub forma

$$(25)\quad \varrho_3(x,y,z)=$$

$$\sum_{i=0}^{n+1}\sum_{j=0}^{n+1-i}C_{i,j,n+1-i-j}\,(x-x_1)\dots(x-x_i)(y-y_1)\dots(y-y_j)(z-z_1)\dots(z-z_{n+1-i-j}),$$

unde $C_{i,j,n+1-i-j}$ sînt valori pe care voim să le determinăm.

Ţinînd seama că $f(x,y,z)$ e dată de formula (18), cu restul (25) şi că polinomul din membrul al doilea al formulei (18) e de gradul n, rezultă că restul formulei (24) este

$$\frac{t^{n+1}}{(n+1)\,!}F^{n+1}(\vartheta t)=\frac{t^{n+1}}{(n+1)\,!}(\varrho_3(t))^{(n+1)}\,\bigg|\begin{matrix}x_0+h\vartheta t\\ y_0+k\vartheta t\\ z_0+l\vartheta t\end{matrix}\,. \tag{26}$$

Dar folosind o notație simbolică cunoscută avem

$$\frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}}F(t)=\left(\frac{\partial}{\partial x_0}h+\frac{\partial}{\partial y_0}k+\frac{\partial}{\partial z_0}l\right)^{n+1}f(\alpha\,,\beta\,,\gamma)\,, \tag{27}$$

unde

$$\alpha=x_0+ht\quad,\quad\beta=y_0+kt\quad,\quad\gamma=z_0+lt\,.$$

Restul formulei (18) se obține făcînd $t=1$ în (26). Din (25) deducem

$$\frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}}\varrho_3(x_0+ht,y_0+kt,z_0+lt)=(n+1)!\sum_{i=0}^{n+1}\ \sum_{j=0}^{n+1-i}C_{i,j,n+1-i-j}\ h^ik^jl^{n+1-i-j}. \tag{28}$$

Pe de altă parte, din (27) găsim că

$$\begin{aligned}\frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}}F(t)&=\left(\frac{\partial}{\partial z_0}l+\frac{\partial}{\partial y_0}k+\frac{\partial}{\partial x_0}k\right)^{n+1}f=\\ &=\sum_{i=0}^{n+1}\binom{n+1}{i}\left(\frac{\partial}{\partial z_0}l+\frac{\partial}{\partial y_0}k\right)^{n+1-i}\frac{\partial^i}{\partial x_0^i}h^i f=\\ &=\sum_{i=0}^{n+1}\binom{n+1}{i}\frac{\partial^i}{\partial x_0^i}h^i\left\{\sum_{j=0}^{n+1-i}\binom{n+1-i}{j}\frac{\partial^{n+1-i-j}}{\partial z_0^{n+1-i-j}}l^{n+1-i-j}\ \frac{\partial^j}{\partial y_0^j}\cdot k^j\right\}f=\\ &=\sum_{i=0}^{n+1}\ \sum_{j=0}^{n+1-i}\binom{n+1}{i}\binom{n+1-i}{j}\frac{\partial^{n+1}f}{\partial x_0^i\,\partial y_0^j\,\partial z_0^{n+1-i-j}}\,h^i\,k^j\,l^{n+1-i-j}\,.\end{aligned} \tag{29}$$

În felul acesta avem

$$\begin{aligned}\frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}}F(t)&=\frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}}\varrho_3(x_0+ht\ ,\ y_0+kt\ ,\ z_0+lt)=\\ &=\sum_{i=0}^{n+1}\ \sum_{j=0}^{n+1-i}\binom{n+1}{i}\binom{n+1-i}{j}\frac{\partial^{n+1}f(\xi,\eta,\zeta)}{\partial\xi^i\,\partial\eta^j\,\partial\zeta^{n+1-i-j}}\,h^ik^j\,l^{n+1-i-j}\ ,\end{aligned} \tag{30}$$

unde

$$\xi=x_0+h\vartheta\ ,\ \eta=y_0+k\vartheta\ ,\ \zeta=z_0+l\vartheta\ .$$

Făcînd identificările cu rezultatul de la (28) găsim în definitiv că

$$C_{i,j,n+1-i-j}=\frac{\binom{n+1}{i}\binom{n+1-i}{j}}{(n+1)\,!}\cdot\frac{\partial^{n+1}f(\xi,\eta,\zeta)}{\partial\xi^i\,\partial\eta^j\,\partial\zeta^{n+1-i-j}}=$$

$$=\frac{1}{i!\,j!\,(n+1-i-j)\,!}\ \frac{\partial^{n+1}f(\xi,\eta,\zeta)}{\partial\xi^i\,\partial\eta^j\,\partial\zeta^{n+1-i-j}}\,.$$

Înlocuind aceste valori în (25) se obține tocmai formula (21) pe care voiam s-o demonstrăm.

Observație. Aici ni se pare interesant faptul că toate derivatele parțiale din (21) se iau în același punct $\Omega(\xi,\eta,\zeta)$, rezultat la care nu se putea ajunge dacă se aplicau diferențelor divizate din expresia (19) a restului formulei (18), formulele de medie cunoscute.

6. Dacă se consideră cazul limită

$$x_i=a\,,y_j=b\,,z_k=c\,,(i=\overline{1\,,n+1}\,;\ j=\overline{1\,,n+2-i}\,;\ k=\overline{1\,;n+3-i-j}) \tag{31}$$

formula de interpolare (18), cu restul sub forma (21), se reduce la formula lui Taylor

$$\begin{aligned}f(x\,,y,z)&=f(a\,,b\,,c)+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k\,!}\left[\frac{\partial}{\partial x}h+\frac{\partial}{\partial y}k+\frac{\partial}{\partial z}l\right]^kf(a\,,b\,,c)\,+\\ &+\frac{1}{(n+1)\,!}\left[\frac{\partial}{\partial x}h+\frac{\partial}{\partial y}k+\frac{\partial}{\partial z}l\right]^{n+1}f(a+\vartheta h\,,b+\vartheta k\,,c+\vartheta l)\,,\end{aligned} \tag{32}$$

unde

$$0<\vartheta<1\,,h=x-a\,,k=y-b\,,l=z-c\,.$$

7. Într-o lucrare viitoare vom arăta cum se pot obține, plecînd de la anumite formule de interpolare, dezvoltări tayloriene de felul celor obținute de M. Picone [4] și M. Nicolescu [5]. Vom face apoi și anumite aplicații la integrarea numerică, folosind unele rezultate obținute recent de D. Mangeron [6].

Primit la 12 I 1957 *Universitatea „V. Babeș", Cluj*

BIBLIOGRAPHIE

1. Narumi S., Tôhoku Math. J., 1920, **18**, p. 309.
2. Steffensen J. F., *Interpolation*, Baltimore, 1950.
3. Biermann O., Monatshefte f. Math. u. Physik, 1903, **14**, pp. 211—225.
4. Picone M., Ann. Sc. Norm. Sup Pisa, 1951, (3), **5**, 3—4, pp. 193—244.
5. Nicolescu M., St. și Cercet. Mat., Acad. R.P.R., 1952, **3**, nr. 1—2, pp. 181—196.
6. Mangeron D., Bul. Inst. Polit. Iași, 1956, 2 (6), 1—2, pp. 21—27.

ОБОБЩЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ФОРМУЛ ИНТЕРПОЛИРОВАНИЯ ДЛЯ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

(Резюме)

Автор обобщает в (9) формулу интерполирования (3) Ж. Ф. Штеффенсена, считая что значения ординат (7) зависят от натурального числа i, которое входит в данную формулу.

Далее устанавливается формула интерполирования (14) в случае трёх переменных. Если ординаты (7) и аппликаты (12) не зависят от i и j ни в числе, ни по значению, то получается формула интерполирования Ньютона (16). Также отмечается частный случай (17), который приводит к формуле интерполирования (18), обобщающей формулу О. Бирманна [3] относительно трёх переменных. В пятом параграфе

показано, что если $f(x, y, z)$ непрерывна и имеет частные производные непрерывные до порядка $n+1$ включительно в области (T), содержащей узлы (20), то остаточный член (19) формулы интерполирования (18) можно выразить формулой (21), причём все частные производные, фигурирующие в ней, взяты в точке $\Omega(\xi, \eta, \zeta)$ области (T). В предельном случае (31) предыдущая формула интерполирования сводится к формуле Тэйлора (32).

Автор редактирует для опубликования в ближайшем будущем статью о разложении функций по типу Тэйлора, вроде тех которые были изучены М. Пиконе [4] и М. Николеску [5] и об установлении кубатурных формул высшей степени точности, используя некоторые ортогональные многочлены, введенные недавно Д. Манджероном [6].

THE GENERALIZATION OF CERTAIN INTERPOLATION FORMULAE FOR THE FUNCTIONS OF MANY VARIABLES

(Summary)

The author has generalized at (9) the interpolation formula (3) of J. F. Steffensen, in manner that the values of the ordonates (7) depend of the natural number i, which take place in the formula Afterwards he has established, for the case of three variables, the interpolation formula (14). If the ordonates (7) and the cotes (12) are independent of i and j, as much as number and as much as position, one obtains the interpolation formula (16) of Newton.

We mention also the particular case (17) which conduct us to the interpolation formula (18), that extends at three variables one formula due to O. Biermann [3]. At nr. 5 it is demonstrated that if $f(x, y, z)$ is continuous and has continuous partial derivates until the $n+1$ order inclusive into a definite domain (T) which includes the knots (20), the rest (19) of the interpolation formula (18) can be put into the form (21), the partial derivates which occur being considered all at the point $\Omega(\xi, \eta, \zeta)$ of (T). In the limit case (31) the precedent interpolation formula reduces at Taylor's formula (32).

The author promise that in future he will occupy himself with tayloriennes developments, of the type studied by M. Picone [4] and M. Nicolescu [5] and will search to establish the cubature formula of high degree of exactitude, employing a class of orthogonal polynoms introduced recently by D. Mangeron [6].