ÎNTREPRINDEREA POLIGRAFICĂ
IAŞI

cd. 1821

BUL. MAT. al Soc. Şt. Mat. Fiz. din R.P.R.
Tomul 1 (49), nr. 4, 1957

(7)

ASUPRA UNEI CLASE DE POLINOAME ORTOGONALE ŞI UNOR FORMULE GENERALE DE CUADRATURĂ CU NUMĂR MINIM DE TERMENI *)

DE

D. D. STANCU (Cluj)

În această lucrare am încercat să elaborăm o teorie care să ne permită să dăm o metodă, care să fie cît mai simplă şi utilă din punct de vedere practic pentru construirea unor formule generale de cuadratură cu număr minim de termeni. În prima parte a lucrării am studiat o clasă de polinoame ortogonale simetrice, pe care apoi le-am folosit în foarte mare măsură în partea a doua a lucrării, unde am stabilit mai multe formule care generalizează formulele clasice de cuadratură de tip Gauss.

CAPITOLUL I

Asupra unei clase de polinoame ortogonale simetrice

1. Fie $p(x)$ o funcţie definită în intervalul (α, β), finit sau infinit, relativ la care există « momentele »

$$c'_r = \int_\alpha^\beta p(x)\, x^r dx \qquad (r = 0, 1, 2, \ldots), \tag{1}$$

iar $c'_0 > 0$. Se ştie că în aceste ipoteze există un şir de polinoame $\{\Phi_m(x)\}$, complet determinate, exceptînd factorii constanţi, de relaţiile de ortogonalitate

$$\int_\alpha^\beta p(x)\, \Phi_i(x)\, \Phi_k(x)\, dx = 0 \quad (i \neq k;\, i, k = 0, 1, 2 \ldots).$$

*) Comunicare prezentată la Academia R.P.R. la 1. VII. 1957.

Se știe deasemenea că aceste polinoame se pot exprima prin formula

$$\Phi_m(x) = \begin{vmatrix} c'_0 & c'_1 & \ldots & c_{m-1} & 1 \\ c'_1 & c'_2 & \ldots & c'_m & x \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c'_m & c'_{m+1} & \ldots & c'_{2m-1} & x^m \end{vmatrix} \quad (m = 0, 1, 2, \ldots). \tag{2}$$

2. Să presupunem acum că intervalul (α, β) e simetric față de origine: $(-a, +a)$, iar $p(x)$ e o funcție pară în acest interval, adică $p(-x) = p(x)$. Să presupunem încă că există toate momentele

$$c_k = \int_{-a}^{+a} p(x) x^k \, dx \quad (k = 0, 1, 2 \ldots). \tag{1'}$$

În acest caz momentele de ordin impar c_{2i+1} sînt toate nule.

Se arată din aproape în aproape că formula (2) se reduce, în cazul $m = 2n$, la

$$I_{2n}(x) = \begin{vmatrix} c_0 & 0 & c_2 & 0 & \ldots & c_{2n-2} & 0 & 1 \\ 0 & c_2 & 0 & c_4 & \ldots & 0 & c_{2n} & x \\ c_2 & 0 & c_4 & 0 & \ldots & c_{2n} & 0 & x^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & c_{2n} & 0 & c_{2n+2} & \ldots & 0 & c_{4n-2} & x^{2n-1} \\ c_{2n} & 0 & c_{2n+2} & 0 & \ldots & c_{4n-2} & 0 & x^{2n} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} c_2 & c_4 & \ldots & c_{2n} \\ c_4 & c_6 & \ldots & c_{2n+2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{2n} & c_{2n+2} & \ldots & c_{4n-2} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c_0 & c_2 & \ldots & c_{2n-2} & 1 \\ c_0 & c_4 & \ldots & c_{2n} & x^2 \\ c_4 & c_6 & \ldots & c_{2n+2} & x^4 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{2n} & c_{2n+2} & \ldots & c_{4n-2} & x^{2n} \end{vmatrix}, \tag{3}$$

iar în cazul $m = 2n + 1$ la următoarea

$$I_{2n+1}(x) = \begin{vmatrix} c_0 & 0 & c_2 & 0 & \ldots & 0 & c_{2n} & 1 \\ 0 & c_2 & 0 & c_4 & \ldots & c_{2n} & 0 & x \\ c_2 & 0 & c_4 & 0 & \ldots & 0 & c_{2n+2} & x^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{2n} & 0 & c_{2n+2} & 0 & \ldots & 0 & c_{4n} & x^{2n} \\ 0 & c_{2n+2} & 0 & c_{2n+4} & \ldots & c_{4n} & 0 & x^{2n+1} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} c_0 & c_2 & \ldots & c_{2n} \\ c_2 & c_4 & \ldots & c_{2n+2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{2n} & c_{2n+2} & \ldots & c_{4n} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c_2 & c_4 & \ldots & c_{2n} & 1 \\ c_4 & c_6 & \ldots & c_{2n+2} & x^2 \\ c_6 & c_8 & \ldots & c_{2n+4} & x^4 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{2n+2} & c_{2n+4} & \ldots & c_{4n} & x^{2n} \end{vmatrix} x. \tag{4}$$

3. $p(x)$ fiind definită mai sus, să considerăm o funcție pondere de forma

$$q(x) = p(x)x^{2s}, \tag{5}$$

unde s este un număr întreg $\geqq 0$.

Momentele corespunzătoare acesteia sînt

$$\mu_{k,2s} = \int_{-a}^{+a} q(x) x^k \, dx = \int_{-a}^{+a} p(x) x^{2s+k} \, dx.$$

Se observă că avem

$$\mu_{k,2s} = c_{k+2s}. \tag{6}$$

Să notăm cu $\{D_{m,2s}(x)\}$ șirul de polinoame ortogonale relativ la ponderea (5) și intervalul $(-a, +a)$, finit sau infinit. Ținînd seama de formulele (2), (3) și (4) avem

$$D_{2n,2s}(x) = \begin{vmatrix} c_{2s+2} & c_{2s+4} & \ldots & c_{2s+2n} \\ c_{2s+4} & c_{2s+6} & \ldots & c_{2s+2n+2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{2s+2n} & c_{2s+2n+2} & \ldots & c_{2s+4n-2} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c_{2s} & c_{2s+2} & \ldots & c_{2s+2n-2} & 1 \\ c_{2s+2} & c_{2s+4} & \ldots & c_{2s+2n} & x^2 \\ c_{2s+4} & c_{2s+6} & \ldots & c_{2s+2n+2} & x^4 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{2s+2n} & c_{2s+2n+2} & \ldots & c_{2s+4n-2} & x^{2n} \end{vmatrix} \tag{7}$$

$$D_{2n+1,2s}(x) = \begin{vmatrix} c_{2s} & c_{2s+2} & \ldots & c_{2s+2n} \\ c_{2s+2} & c_{2s+4} & \ldots & c_{2s+2n+2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{2s+2n} & c_{2s+2n+2} & \ldots & c_{2s+4n} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c_{2s+2} & c_{2s+4} & \ldots & c_{2s+2n} & 1 \\ c_{2s+4} & c_{2s+6} & \ldots & c_{2s+2n+2} & x^2 \\ c_{2s+6} & c_{2s+8} & \ldots & c_{2s+2n+4} & x^4 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{2s+2n+2} & c_{2s+2n+4} & \ldots & c_{2s+4n} & x^{2n} \end{vmatrix} x. \tag{8}$$

4. Avînd în vedere formulele (7) și (8) se stabilește imediat următoarea relație, care ne va fi foarte utilă în partea a doua a lucrării,

$$D_{2n+1,2s}(x) = \alpha_{2n,2s} \, x \, D_{2n,2s+2}(x), \tag{9}$$

unde

$$\alpha_{2n,2s} = \begin{vmatrix} c_{2s} & c_{2s+2} & \ldots & c_{2s+2n} \\ c_{2s+2} & c_{2s+4} & \ldots & c_{2s+2n+2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{2s+2n} & c_{2s+2n+2} & \ldots & c_{2s+4n} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} c_{2s+4} & c_{2s+6} & \ldots & c_{2s+2n+2} \\ c_{2s+6} & c_{2s+8} & \ldots & c_{2s+2n+4} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{2s+2n+2} & c_{2s+2n+4} & \ldots & c_{2s+4n} \end{vmatrix}. \tag{10}$$

Dacă notăm cu $\widetilde{D}_{m,2s}(x)$ produsul dintre $D_{m,2s}(x)$ și o constantă d_m aleasă astfel încît $d_m D_{m,2s}(x)$ să aibă coeficientul lui x^m egal cu 1, relația (9) se va scrie

$$\widetilde{D}_{2n+1,2s}(x) = x \widetilde{D}_{2n,2s+2}(x). \tag{9'}$$

5. Din formulele precedente se obţin, pentru $n = 0, 1, 2$, următoarele polinoame:

$$\widetilde{D}_{0,2s}(x) = 1,\ \widetilde{D}_{1,2s}(x) = x,\ \widetilde{D}_{2,2s}(x) = x^2 - \frac{c_{2s+2}}{c_{2s}},\ \widetilde{D}_{3,2s}(x) = x^3 - \frac{c_{2s+4}}{c_{2s+2}}\,x,$$

$$\widetilde{D}_{4,2s}(x) = x^4 + \frac{c_{2s+2}\ c_{2s+4} - c_{2s}\ c_{2s+6}}{c_{2s}\ c_{2s+4} - c_{2s+2}^2}\,x^2 + \frac{c_{2s+2}\ c_{2s+6} - c_{2s+4}^2}{c_{2s}\ c_{6s+4} - c_{2s+2}^2},$$

$$\widetilde{D}_{5,2s}(x) = x^5 + \frac{c_{2s+4}\ c_{2s+6} - c_{2s+2}\ c_{2s+8}}{c_{2s+2}\ c_{2s+6} - c_{2s+4}^2}\,x^3 + \frac{c_{2s+4}\ c_{2s+8} - c_{2s+6}^2}{c_{2s+2}\ c_{2s+6} - c_{2s+4}^2}\,x.$$

6. Vom arăta acum că un polinom oarecare $D_{r,2s}(x)$, din şirul de polinoame ortogonale $\{D_{m,2s}(x)\}$, se poate exprima şi cu ajutorul unor anumite polinoame din şirul $\{I_p(x)\}$, ale cărui elemente au fost definite la (3) şi (4).

În mod precis vom demonstra că avem, dacă facem abstracţie de unii factori constanţi,

$$D_{2n,2s}(x) = \frac{1}{x^{2s}}\begin{vmatrix} I_{2n}(x) & I_{2n+2}(x) & \ldots & I_{2n+2s}(x) \\ I_{2n}(0) & I_{2n+2}(0) & \ldots & I_{2n+2s}(0) \\ I''_{2n}(0) & I''_{2n+2}(0) & \ldots & I''_{2n+2s}(0) \\ I^{(IV)}_{2n}(0) & I^{(IV)}_{2n+2}(0) & \ldots & I^{(IV)}_{2n+2s}(0) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ I^{(2s-2)}_{2n}(0) & I^{(2s-2)}_{2n+2}(0) & \ldots & I^{(2s-2)}_{2n+2s}(0) \end{vmatrix}, \qquad (11)$$

$$D_{2n+1,2s}(x) = \frac{1}{x^{2s}}\begin{vmatrix} I_{2n+1}(x) & I_{2n+3}(x) & \ldots & I_{2n+2s+1}(x) \\ I'_{2n+1}(0) & I'_{2n+3}(0) & \ldots & I'_{2n+2s+1}(0) \\ I'''_{2n+1}(0) & I'''_{2n+3}(0) & \ldots & I'''_{2n+2s+1}(0) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ I^{(2s-1)}_{2n+1}(0) & I^{(2s-1)}_{2n+3}(0) & \ldots & I^{(2s-1)}_{2n+2s+1}(0) \end{vmatrix}. \qquad (12)$$

Aici prin $\{I_r(x)\}$ am notat, ca şi mai sus, şirul de polinoame ortogonale relative la funcţia pondere pară $p(x)$ şi intervalul $(-a, +a)$.

D e m o n s t r a ţ i e. Formulele acestea se demonstrează într-un mod foarte asemănător. Dacă se notează cu $y(x)$ determinantul de la (11) şi se ţine seama că $I_{2k}(x)$ conţine numai termeni de forma $a_i x^{2i}$ $(i = 0, 1, \ldots, k)$, constatăm că

$$y'(0) = y'''(0) = \cdots = y^{(2s-1)}(0) = 0,$$

iar dacă avem în vedere expresia lui $y(x)$, putem scrie

$$y(0) = y''(0) = \cdots = y^{(2s-2)}(0) = 0.$$

Rezultă că $y(x)$ e divizibil cu y^{2s}.

Să notăm acum cu $z(x)$ determinantul care figurează la (12). Întrucît un polinom $I_{2k+1}(x)$ conţine numai termeni de forma $b_i x^{2i+1}$ $(i = 0, 1, \ldots, k)$, avem

$$z(0) = z''(0) = \cdots = z^{(2s)}(0) = 0.$$

Pe de altă parte, dacă se are în vedere expresia lui $z(x)$ se găseşte că

$$z'(0) = z'''(0) = \cdots = z^{(2s-1)}(0) = 0.$$

Din aceste egalităţi rezultă că $z(x)$ e divizibil cu x^{2s+1}.

Faptul că şirul de polinoame $\{D_{m,2s}(x)\}$ este ortogonal, relativ la funcţia pondere (5) şi intervalul $(-a, +a)$, deci că

$$\int_{-a}^{+a} p(x)\, x^{2s}\, D_{m,2s}(x)\, D_{n,2s}(x)\, dx = 0\ (m \neq n),$$

rezultă imediat, dacă avem în vedere că $x^{2s} D_{m,2s}(x)$ se exprimă printr-o combinaţie liniară de polinoame de grad $\geqq m$, extrase din şirul $\{I_k(x)\}$.

7. Întrucît ponderea $q(x) = p(x)\, x^{2s}$ e o funcţie pară, şirul $\{D_{m,2s}(x)\}$ e un şir de polinoame ortogonale simetrice; un polinom oarecare din acest şir are toate rădăcinile reale, distincte, cuprinse în $(-a, +a)$ şi repartizate simetric faţă de origine.

Să arătăm că determinanţii $y(x)$ şi $z(x)$, care figurează la (11) şi (12) nu sînt identic nuli. Pentru a arăta de pildă că $z(x) \not\equiv 0$, e suficient să dovedim că e diferit de zero coeficientul lui $I_{2n+2s+1}(x)$, adică că

$$A^{(s)}_{2n+1,s} = \begin{vmatrix} I'_{2n+1}(0) & I'_{2n+3}(0) & \ldots & I'_{2n+2s-1}(0) \\ I'''_{2n+1}(0) & I'''_{2n+3}(0) & \ldots & I'''_{2n+2s-1}(0) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ I^{(2s-1)}_{2n+1}(0) & I^{(2s-1)}_{2n+3}(0) & \ldots & I^{(2s-1)}_{2n+2s-1}(0) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Să presupunem contrariul — şi anume că $A^{(s)}_{2n+1,s} = 0$. Atunci se vor putea găsi s constante, nu toate nule: $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{s-1}$, astfel încît să avem

$$\sum_{i=0}^{s-1} \alpha_i\, I^{(2k-1)}_{2n+2i+1}(0) = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, s), \qquad (13)$$

căci determinantul acestui sistem, omogen în α_i $(i = 0, \ldots, s-1)$, este egal tocmai cu $A^{(s)}_{2n+1,s}$, care prin ipoteză e egal cu zero. Să punem

$$G_{2n+2s-1}(x) = \sum_{i=0}^{s-1} \alpha_i\, I_{2n+2i+1}(x). \qquad (14)$$

Acest polinom nu este identic nul, are gradul $2n + 2s - 1$ şi e ortogonal în $(-a, +a)$, faţă de funcţia pondere pară $p(x)$, cu orice polinom de grad mai mic decît $2n + 1$. Ţinînd seama de (13) şi de proprietatea $G_{2n+2s-1}(-x) = G_{2n+2s-1}(x)$, se constată că polinomul de la (14) are pe $x = 0$ rădăcină multiplă de ordinul $2s + 1$. Cîtul dintre polinomul acesta şi x^{2s} să îl notăm cu $C_{2n-1}(x)$; el are gradul cel mult

$2n-1$. Avînd în vedere că polinomul (14) e ortogonal față de orice polinom de grad mai mic ca $2n+1$ și că

$$G_{2n+2s-1}(x) = x^{2s}\, C_{2n-1}(x),$$

avem

$$\int_{-a}^{+a} p(x)\, G_{2n+2s-1}(x)\, C_{2n-1}(x)\, dx = \int_{-a}^{+a} p(x)\, x^{2s}\, C^2_{2n-1}(x)\, dx = 0,$$

ceeace e imposibil căci produsul

$$p(x)\, x^{2s}\, C^2_{2n-1}(x)$$

reprezintă o funcție pară. Rezultă că determinantul $z(x)$, de la (12), nu poate fi identic nul.

În mod absolut analog se demonstrează că $y(x) \not\equiv 0$ în $(-a, +a)$.

8. Șirul de polinoame ortogonale $\{D_{m,s}(x)\}$ în general nu este normat. In cele ce urmează ne propunem să normăm acest șir de polinoame. Mai întîi să normăm șirul $\{D_{2n+1,2s}(x)\}$. Avem

$$x^{2s} D_{2n+1,2s}(x) = \sum_{i=0}^{s} (-1)^i A^{(i)}_{2n+1,s}\, I_{2n+2i+1}(x),$$

unde $A^{(i)}_{2n+1,s}\ (i = 0, 1, \ldots, s)$ sînt constante. Pe baza formulelor precedente avem

$$\delta_{2n+1,s} = \int_{-a}^{+a} p(x)\, x^{2s}\, D^2_{2n+1,2s}(x)\, dx = A^{(0)}_{2n+1,s} \int_{-a}^{+a} p(x)\, D_{2n+1,2s}(x)\, I_{2n+1}(x)\, dx.$$

Dar

$$D_{2n+1,2s}(x) = (-1)^s A^{(s)}_{2n+1,s}\, \beta_{2n+2s+1}\, x^{2n+1} + \ldots =$$
$$(-1)\, A^{(s)}_{2n+1,s}\, \frac{\beta_{2n+2s+1}}{\beta_{2n+1}}\, I_{2n+1}(x) + \ldots,$$

unde am notat cu β_{2r+1} coeficientul lui x^{2r+1} din polinomul ortogonal $I_{2r+1}(x)$. Dacă se folosește notația

$$\gamma^2_{2n+1} = \int_{-a}^{+a} p(x)\, I^2_{2n+1}(x)\, dx,$$

se va obține

$$\delta_{2n+1} = \int_{-a}^{+a} p(x)\, x^{2s}\, D^2_{2n+1}(x)\, dx = (-1)^s A^{(0)}_{2n+1,s}\, A^{(s)}_{2n+1,s}\, \frac{\beta_{2n+2s+1}}{\beta_{2n+1}}\, \gamma^2_{2n+1}.$$

Normînd polinomul (12), se găsește

$$\hat{D}_{2n+1,2s}(x) = \frac{1}{\pm\sqrt{\delta_{2n+1}}}\, D_{2n+1,2s}(x) =$$
$$\pm \frac{1}{\gamma_{2n+1}} \sqrt{\frac{(-1)^s \beta_{2n+1}}{A^{(0)}_{2n+1,s}\, A^{(s)}_{2n+1,s}\, \beta_{2n+2s+1}}}\, D_{2n+1,2s}(x), \tag{15'}$$

unde $A^{(0)}_{2n+1,s}$ și $A^{(s)}_{2n+1,s}$ sînt respectiv minorii elementelor $I_{2n+1}(x)$ și $I_{2n+2s+1}(x)$ din determinantul de la (12). Semnul din fața radicalului se alege astfel încît coeficientul lui x^{2n+1} din $\hat{D}_{2n+1,2s}(x)$ să fie pozitiv. O formulă de același fel cu formula (15′) se obține pentru $\hat{D}_{2n,2s}(x)$.

Ele pot fi cuprinse în formula unică

$$\hat{D}_{m,2s}(x) = \pm \frac{1}{\gamma_m} \sqrt{\frac{(-1)^s \beta_m}{A^{(0)}_{m,s}\, A^{(s)}_{m,s}\, \beta_{m+2s}}}\, D_{m,2s}(x), \tag{15}$$

$A^{(0)}_{m,s}$, $A^{(s)}_{m,s}$ fiind respectiv minorii elementelor $I_m(x)$, $I_{m+s}(x)$ din determinantul care figurează în expresia lui $D_{m,2s}(x)$.

9. Dacă se folosesc momentele $c_{2s}, c_{2s+2}, \ldots$ și se ține seama de expresiile (7) și (8) ale polinoamelor $D_{m,2s}(x)$, prin normare se obțin polinoamele

$$\hat{D}_{2n,2s}(x) = \frac{1}{\sqrt{\Delta_{2n-2,2s}\,\Delta_{2n,2s}}} \begin{vmatrix} c_{2s} & c_{2s+2} & \cdots & c_{2s+2n-2} & 1 \\ c_{2s+2} & c_{2s+4} & \cdots & c_{2s+2n} & x^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{2s+2n} & c_{2s+2n+2} & \cdots & c_{2s+4n-2} & x^{2n} \end{vmatrix}, \tag{16}$$

$$\hat{D}_{2n+1,2s}(x) = \frac{1}{\sqrt{\Delta_{2n-2,2s+2}\,\Delta_{2n,2s+2}}} \begin{vmatrix} c_{2s+2} & c_{2s+4} & \cdots & c_{2s+2n} & 1 \\ c_{2s+4} & c_{2s+6} & \cdots & c_{2s+2n+2} & x^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{2s+2n+2} & c_{2s+2n+4} & \cdots & c_{2s+4n} & x^{2n} \end{vmatrix} x, \tag{17}$$

unde am folosit notația

$$\Delta_{2n,2s} = \begin{vmatrix} c_{2s} & c_{2s+2} & \cdots & c_{2s+2n} \\ c_{2s+2} & c_{2s+4} & \cdots & c_{2s+2n+2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{2s+2n} & c_{2s+2n+2} & \cdots & c_{2s+4n} \end{vmatrix} \tag{18}$$

10. Menționăm încă relația de recurență care există între 3 polinoame consecutive din șirul $\{ \widetilde{D}_{m,2s}(x) \}$

$$\widetilde{D}_{m,2s}(x) = x\,\widetilde{D}_{m-1,2s}(x) - \lambda_{m-1,2s}\,\widetilde{D}_{m-2,2s}(x). \tag{19}$$

unde

$$\lambda_{m-1,2s} = \left(\int_{-a}^{+a} p(x)\, x^{2s} \widetilde{D}^2_{m-1,2s}(x)\, dx \right) : \left(\int_{-a}^{+a} p(x)\, x^{2s} \widetilde{D}^2_{m-2,2s}(x)\, dx \right). \tag{20}$$

Dacă se folosesc formulele (11) și (12), se găsește că

$$\lambda_{m-1,2s} = \frac{\beta_{m-2}\,\beta_{m+2s-2}}{\beta_{m-1}\,\beta_{m+2s-1}} \; \frac{A^{(0)}_{m-1,s}}{A^{(0)}_{m-2,s}} \; \frac{A^{(s)}_{m-2,s}}{A'^{(s)}_{m-1,s}} \; \frac{\gamma^2_{m-1}}{\gamma^2_{m-2}}, \tag{21}$$

iar dacă se folosesc formulele (16) și (17) și avem în vedere că

$$\widetilde{D}_{2n-1,2s}(x) = \sqrt{\frac{\Delta_{2n,2s}}{\Delta_{2n-2,2s}}}\, \widehat{D}_{2n,2s}(x),\quad \widetilde{D}_{2n+1,2s}(x) = \sqrt{\frac{\Delta_{2n,2s+2}}{\Delta_{2n-2,2s+2}}}\, \widehat{D}_{2n+1,2s}(x), \tag{22'}$$

se obțin formulele

$$\lambda_{2n,2s} = \frac{\Delta_{2n,2s}\,\Delta_{2n-4,2s+2}}{\Delta_{2n-2,2s}\,\Delta_{2n-2,2s+2}},\quad \lambda_{2n-1,2s} = \frac{\Delta_{2n-2,2s+2}\,\Delta_{2n-4,2s}}{\Delta_{2n-4,2s+2}\,\Delta_{2n-2,2s}}. \tag{22}$$

11. *Cazuri particulare ale formulelor* (11) *și* (12).
1°. Dacă $s = 0$ avem $D_{m,0}(x) = I_m(x)$.

2°. Dacă în loc de $I_m(x)$ se ia $\widetilde{I}_m(x)$ și se face $s = 1$ în formulele (11) și (12), se obțin

$$x^2 D_{2n,2}(x) = \widetilde{I}_{2n+2}(0)\,\widetilde{I}_{2n}(x) - \widetilde{I}_{2n}(0)\,\widetilde{I}_{2n+2}(x), \tag{23}$$

$$x^2 D_{2n+1,2}(x) = \widetilde{I}'_{2n+3}(0)\,\widetilde{I}_{2n+1}(x) - \widetilde{I}'_{2n+1}(0)\,\widetilde{I}_{2n+3}(x). \tag{24}$$

Formula (23) se poate aduce la o formă mai simplă. Într-adevăr, se știe că între 3 polinoame consecutive $\widetilde{I}_{2n+2}(x), \widetilde{I}_{2n+1}(x), \widetilde{I}_{2n}(x)$, există relația

$$\widetilde{I}_{2n+2}(x) + \lambda_{2n+1}\,\widetilde{I}_{2n}(x) = x\,\widetilde{I}_{2n+1}(x), \tag{25}$$

unde

$$\lambda_{2n+1} = \left(\int_{-a}^{+a} p(x)\,\widetilde{I}^2_{2n+1}(x)\, dx \right) : \left(\int_{-a}^{+a} p(x)\,\widetilde{I}^2_{2n}(x)\, dx \right).$$

Avînd în vedere că

$$\widetilde{I}_{2n}(x) = \frac{1}{\Delta_{2n-2,0}} \begin{vmatrix} c_0 & c_2 & \dots & c_{2n-2} & 1 \\ c_2 & c_4 & \dots & c_{2n} & x^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{2n} & c_{2n+2} & \dots & c_{4n-2} & x^{2n} \end{vmatrix}, \tag{26}$$

se găsește că

$$\lambda_{2n+1} = \frac{\Delta_{2n-2,0}\,\Delta_{2n,2}}{\Delta_{2n,0}\,\Delta_{2n-2,2}}, \tag{27}$$

întrucît

$$I_{2n}(0) = (-1)^n \frac{\Delta_{2n-2,2}}{\Delta_{2n-2,0}}, \tag{28}$$

formula precedentă devine

$$\lambda_{2n+1} = -\frac{\widetilde{I}_{2n+2}(0)}{\widetilde{I}_{2n}(0)}. \tag{29}$$

Ținînd seama de (23), (25) și (29) se ajunge la formula

$$\widetilde{D}_{2n,2}(x) = \frac{1}{x}\,\widetilde{I}_{2n+1}(x). \tag{30}$$

În cazul gradului impar, dacă avem în vedere formula (24), se găsește că

$$\widetilde{D}_{2n+1,2}(x) = \frac{1}{x^2}\left[\widetilde{I}_{2n+3}(x) - \frac{\widetilde{I}'_{2n+3}(0)}{\widetilde{I}'_{2n+1}(0)}\,\widetilde{I}_{2n+1}(x) \right]. \tag{31}$$

12. În cazul particular

$$a = 1,\ p(x) = (1 - x^2)^\alpha \quad (\alpha > -1), \tag{32}$$

polinoamele $I_n(x)$ vor fi polinoamele ultrasferice ale lui J a c o b i

$$J_n(x) = \frac{1}{2^n\, n!}\,(x^2 - 1)^{-\alpha}\,[(x^2 - 1)^{n+\alpha}]^{(n)}. \tag{33}$$

Avînd în vedere că

$$J'_{2n+1}(0) = (-1)^n \frac{(\alpha + 2n + 1)(\alpha + 2n)\dots(\alpha + n + 1)}{2^{2n}\, n!}, \tag{34}$$

se găsește că, exceptînd un factor numeric, avem

$$\begin{aligned} x^2 D_{2n+1,2}(x) &= 4(n+1)(\alpha + n + 1)\,J_{2n+3}(x) + \\ &+ (\alpha + 2n + 3)(\alpha + 2n + 2)\,J_{2n+1}(x). \end{aligned} \tag{35}$$

Primele 6 polinoame $\widetilde{D}_{m,2}(x)$ sînt

$$\left.\begin{aligned} &\widetilde{D}_{0,2}(x) = 1,\ \widetilde{D}_{1,2}(x) = x,\ \widetilde{D}_{2,2}(x) = x^2 - \frac{3}{2\alpha + 5}, \\ &\widetilde{D}_{3,2}(x) = x^3 - \frac{5}{2\alpha + 7}\,x,\ \widetilde{D}_{4,2}(x) = x^4 - \frac{10}{2\alpha + 9}\,x^2 + \frac{15}{(2\alpha + 7)(2\alpha + 9)}, \\ &\widetilde{D}_{5,2}(x) = x^5 - \frac{14}{2\alpha + 11}\,x^3 + \frac{35}{(2\alpha + 9)(2\alpha + 11)}\,x. \end{aligned}\right\} \tag{36}$$

13. Să mai considerăm şi următorul caz particular foarte important

$$a = \infty, p(x) = e^{-x^2}. \tag{37}$$

Polinoamele $I_n(x)$ corespunzătoare sînt polinoamele lui H e r m i t e

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2}[e^{-x^2}]^{(n)}. \tag{38'}$$

Avînd în vedere că

$$H'_{2n+1}(0) = (-1)^n \frac{(2n+2)!}{(n+1)!}, \tag{38}$$

formula (31) devine

$$\widetilde{D}_{2n+1,2}(x) = \frac{1}{x^2}\left[\widetilde{H}_{2n+3}(x) + \frac{2n+3}{2}\widetilde{H}_{2n+1}(x)\right]. \tag{39}$$

În acest caz primele 6 polinoame $D_{m,2}(x)$ sînt

$$\left.\begin{aligned} &\widetilde{D}_{0,2}(x) = 1,\ \widetilde{D}_{1,2}(x) = x,\ \widetilde{D}_{2,2}(x) = x^2 - \frac{3}{2},\ \widetilde{D}_{3,2}(x) = x^3 - \frac{5}{2}x, \\ &\widetilde{D}_{4,2}(x) = x^4 - 5x^2 + \frac{15}{4},\ \widetilde{D}_{5,2}(x) = x^5 - 7x^3 + \frac{35}{4}x. \end{aligned}\right\} \tag{40}$$

14. 3°. Să mai considerăm şi cazul particular $s = 2$ al formulelor (11) şi (12). Avem

$$x^4 D_{2n,4}(x) = \begin{vmatrix} I_{2n}(x) & I_{2n+2}(x) & I_{2n+4}(x) \\ I'_{2n}(0) & I'_{2n+2}(0) & I'_{2n+4}(0) \\ I''_{2n}(0) & I''_{2n+2}(0) & I''_{2n+4}(0) \end{vmatrix}, \tag{41}$$

$$x^4 D_{2n+1,4}(x) = \begin{vmatrix} I_{2n+1}(x) & I_{2n+3}(x) & I_{2n+5}(x) \\ I'_{2n+1}(0) & I'_{2n+3}(0) & I'_{2n+5}(0) \\ I'''_{2n+1}(0) & I'''_{2n+3}(0) & I'''_{2n+5}(0) \end{vmatrix}. \tag{42}$$

15. În cazul (32), dacă se are în vedere că

$$J_{2n}(0) = (-1)^n \frac{(\alpha+2n)(\alpha+2n-1)\ldots(\alpha+n+1)}{2^{2n}\, n!},$$

$$J''_{2n}(0) = (-1)^{n-1}\frac{(\alpha+2n)(\alpha+2n-1)\ldots(\alpha+n+1)(2\alpha+2n+1)}{2^{2n-1}(n-1)!},$$

$$J'''_{2n+1}(0) = (-1)^{n-1}\frac{(\alpha+2n+1)(\alpha+2n)\ldots(\alpha+n+1)(2\alpha+2n+3)}{2^{2n-1}(n-1)!}$$

i că $J'_{2n+1}(0)$ e dat de formula (34), se găseşte că, excepţînd un factor numeric, avem formulele

$$\begin{aligned} x^4 D_{2n,4}(x) = {} & 16(n+1)(n+2)(\alpha+n+1)(\alpha+n+2)(2\alpha+4n+3)J_{2n+4}(x) + \\ & + 8(n+1)(\alpha+n+1)(\alpha+2n+3)(\alpha+2n+4)(2\alpha+4n+5)J_{2n+2}(x) + \\ & + (\alpha+2n+1)(\alpha+2n+2)(\alpha+2n+3)(\alpha+2n+4)(2\alpha+4n+7)J_{2n}(x). \end{aligned} \tag{43}$$

$$\begin{aligned} x^4 D_{2n+1,4}(x) = {} & 16(n+1)(n+2)(\alpha+n+1)(\alpha+n+2)(2\alpha+4n+5)J_{2n+5}(x) + \\ & + 8(n+1)(\alpha+n+1)(\alpha+2n+4)(\alpha+2n+5)(2\alpha+4n+7)J_{2n+3}(x) + \\ & + (\alpha+2n+2)(\alpha+2n+3)(\alpha+2n+4)(\alpha+2n+5)(2\alpha+4n+9)J_{2n+1}(x). \end{aligned} \tag{44}$$

Formulele (43) şi (44) pot fi cuprinse în formula unică

$$\begin{aligned} x^4 D_{m,4}(x) = {} & 16\left(\left[\frac{m}{2}\right]+1\right)\left(\left[\frac{m}{2}\right]+2\right)\left(\alpha+\left[\frac{m}{2}\right]+1\right)\left(\alpha+\left[\frac{m}{2}\right]+2\right)(2\alpha + \\ & + 2m+3)J_{m+4}(x) + 8\left(\left[\frac{m}{2}\right]+1\right)\left(\alpha+\left[\frac{m}{2}\right]+1\right)(\alpha+m+3)(\alpha + \\ & + m+4)(\alpha+2m+5)J_{m+2}(x) + (\alpha+m+1)(\alpha+m+2)(\alpha + \\ & + m+3)(\alpha+m+4)(2\alpha+2m+7)J_m(x), \end{aligned} \tag{45}$$

unde cu $[\beta]$ am notat partea întreagă a numărului β.

Primele 4 plinoame $D_{m,4}(x)$ sînt

$$\widetilde{D}_{0,4}(x) = 1,\ \widetilde{D}_{1,4}(x) = x,\ \widetilde{D}_{2,4}(x) = x^2 - \frac{5}{2\alpha+7},\ \widetilde{D}_{3,4}(x) = x^2 - \frac{7}{2\alpha+9}x.$$

16. În cazul polinoamelor lui H e r m i t e (38′), avînd în vedere că

$$H_{2n}(0) = (-1)^n\frac{(2n)!}{n!},\ H''_{2n}(0) = 4(-1)^{n-1}\frac{(2n)!}{(n-1)!},\ H'''_{2n+1}(0) = $$
$$= 8(-1)^{n-1}\frac{(2n+1)!}{(n-1)!}$$

şi că $H'_{2n+1}(0)$ are valoarea de la (38), formulele (41) şi (42) ne conduc la următoarele

$$\widetilde{D}_{2n,4}(x) = \frac{1}{x^4}\left[\widetilde{H}_{2n+4}(x) + (2n+3)\widetilde{H}_{2n+2}(x) + \frac{(2n+1)(2n+3)}{4}\widetilde{H}_{2n}(x)\right], \tag{46}$$

$$\widetilde{D}_{2n+1,4}(x) = \frac{1}{x^4}\left[\widetilde{H}_{2n+5}(x) + (2n+5)\widetilde{H}_{2n+3}(x) + (2n+3)(2n+5)\widetilde{H}_{2n+1}(x)\right]. \tag{47}$$

Primele 4 polinoame $\widetilde{D}_{m,4}(x)$ corespunzătoare funcţiei pondere (37) sînt

$$\widetilde{D}_{0,4}(x) = 1,\ \widetilde{D}_{1,4}(x) = x,\ \widetilde{D}_{2,4}(x) = x^2 - \frac{5}{2},\ \widetilde{D}_{3,4}(x) = x^3 - \frac{7}{2}x.$$

CAPITOLUL II

Asupra unor formule de cuadratură de tip Gauss generalizate

17. Definiție. *Vom numi formulă de cuadratură de tip Gauss generalizată orice formulă de cuadratură de forma*

$$\int_a^b p(t)\, f(t)\, dt = \sum_{i=1}^{s} \sum_{k=0}^{r_i-1} a_{i,k} f^{(k)}(t_i) + \rho\,[f], \tag{48}$$

care are gradul de exactitate $2N-1$, unde N este numărul coeficienților $a_{i,k}$ diferiți de zero.

În cazul $s = n$ și $r_1 = r_2 = \ldots = r_n = 1$, se obține formula de cuadratură clasică de tip Gauss, ale cărei noduri $t_1, t_2, \ldots, t_n$ sînt cele n rădăcini reale și distincte ale polinomului $\Phi_n(t)$ ortogonal, relativ la intervalul (a, b) și funcția pondere $p(t)$, cu orice polinom de grad mai mic ca n.

În acest capitol vom arăta că există și alte formule de cuadratură de tip Gauss generalizate.

18. În acest scop să considerăm polinoamele

$$h(x) = \prod_{i=1}^{m} (x - x_i), \quad g(x) = \prod_{k=1}^{r} (x - \alpha_k), \quad l(x) = x^{2s}, \tag{49}$$

care au rădăcinile reale.

Formula de interpolare a lui Lagrange-Hermite, relativă la o funcție $f(x)$ – derivabilă de un număr suficient de ori – și la $m + r + 2s$ noduri, care coincid cu rădăcinile polinoamelor (49), e de forma

$$f(x) = L(\underbrace{0, \ldots, 0}_{2s}, x_1, x_2, \ldots, x_m, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r; f \mid x) + R(x), \tag{50}$$

unde

$$L(\underbrace{0, \ldots, 0}_{2s}, x_1, x_2, \ldots, x_m, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r; f \mid x) = L_{2s+m+r}(x) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \frac{h_i(x)\, g(x)}{h_i(x_i)\, g(x_i)} \frac{x^{2s}}{x_i^{2s}} f(x_i) + \sum_{k=1}^{r} \frac{h(x)}{h(\alpha_k)} \frac{g_k(x)}{g_k(\alpha_k)} \frac{x^{2s}}{\alpha_k^{2s}} f(\alpha_k) +$$

$$+ \sum_{i=0}^{2s-1} \sum_{k=0}^{2s-i-1} \frac{x^i}{i!} \left[\frac{x^k}{k!} \left(\frac{1}{u(x)} \right)^{(k)}_{x=0} \right] u(x)\, f^{(i)}_{(0)}, \tag{51}$$

$$h_i(x) = \frac{h(x)}{x - x_i}, \quad g_k(x) = \frac{g(x)}{x - \alpha_k}, \quad u(x) = h(x)\, g(x),$$

iar

$$R(x) = h(x)\, g(x)\, x^{2s} [x, \underbrace{0, \ldots, 0}_{2s}, x_1\, x_2, \ldots, x_m, \alpha_1\, \alpha_2, \ldots, \alpha_r; f]^{1)}. \tag{52}$$

---

1) Paranteza [. . .] reprezintă diferența divizată relativă la funcția $f(x)$ și nodurile puse în evidență.

19. Dacă se înmulțește cu funcția pondere $p(x)$, despre care presupunem că e pară în $(-a, +a)$ și astfel încît să existe momentele $(1')$, și se integrează, se obține următoarea formulă de cuadratură

$$\int_{-a}^{+a} p(x)\, f(x)\, dx = \sum_{i=1}^{m} A_i f(x_i) + \sum_{j=1}^{r} B_j f(\alpha_j) + \sum_{k=0}^{2s-1} C_k f^{(k)}_{(0)} + \rho\,[f]. \tag{53}$$

Expresiile coeficienților și restului acestei formule sînt evidente.

Vom încerca acum să determinăm pe $h(x)$ astfel ca toți coeficienții B_j să dispară. Cu acest prilej vom stabili următoarea

Teoremă. *Condiția necesară și suficientă ca în formula de cuadratură (53), unde $r = m$, să avem, oricare sînt $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$, $B_1 = B_2 = \ldots = B_m = 0$, este ca $x_1, x_2, \ldots, x_m$ să fie cele m rădăcini reale și distincte ale polinomului $D_{m,2s}(x)$.*

Demonstrație. Avînd în vedere că

$$B_k = \int_{-a}^{+a} p(x) \frac{h(x)}{h(\alpha_k)} \frac{g_k(x)}{g_k(\alpha_k)} \frac{x^{2s}}{\alpha_k^{2s}}\, dx \quad (k = 1, 2, \ldots, r), \tag{54}$$

se observă că pentru a avea $B_k = 0$ $(k = 1, 2, \ldots, r)$ este necesar să avem

$$\int_{-a}^{+a} p(x)\, x^{2s} h(x)\, g_k(x)\, dx = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, r).$$

Dacă se ia $r = m$, se constată că e necesar ca $h(x)$ să fie astfel încît

$$\int_{-a}^{+a} p(x)\, x^{2s} h(x)\, q(x)\, dx,$$

unde $q(x)$ e un polinom oarecare de grad $n-1$ (căci α_i sînt arbitrari). Rezultă că e necesar ca $h(x)$ să fie ortogonal relativ la ponderea $p(x)x^{2s}$ și intervalul $(-a, +a)$ față de orice polinom de grad cel mult $m-1$; aceasta însemnează că, exceptînd un factor numeric, el trebuie să coincidă cu polinomul $D_{m,2s}(x)$ definit în cap. I.

Suficiența condiției este evidentă.

Observare. Dacă $r < m$ atunci coeficienții B_k $(k = 1, 2, \ldots, r)$ vor fi deasemenea nuli dacă $h(x) = \widetilde{D}_{m,2s}(x)$. Nu se poate însă ca să se ia $r > m$ căci se găsesc pentru x_i valori imaginare. Insemnează că dacă fixăm gradul de exactitate la $2N-1$, nu se poate ca numărul termenilor să fie mai mic decît N.

20. Avînd în vedere că în formula (51) valorile $f^{(2j-1)}(0)$ $(j = 1, 2, \ldots, s)$ sînt înmulțite prin polinoame în care intervin numai puterile impare ale lui x, că $p(x)$ e o funcție pară și că intervalul de integrare e simetric față de origine, rezultă că toți coeficienții lui $f^{(2j-1)}(0)$ din formula (53) vor fi nuli.

În aceste condiții formula de cuadratură (53) se reduce, în cazul $m = 2n$, la următoarea

$$\int_{-a}^{+a} p(x)\, f(x)\, dx = \sum_{=1}^{2n} A_i f(x_i) + \sum_{k=0}^{s-1} C_{2k} f^{(2k)}_{(0)} + \rho\,[f], \tag{55}$$

iar în cazul $m = 2n + 1$ la

$$\int_{-a}^{+a} p(x) f(x)\, dx = \sum_{i=1}^{2n} A_i' f(x_i) + \sum_{k=0}^{s} C_{2k}' f_{(0)}^{(2k)} + \rho'[f]. \tag{56}$$

Nodurile $x_1, x_2, \ldots, x_{2n}$ care intervin mai sus și sînt rădăcinile lui $D_{2n,2s}(x)$ sau $D_{2n,2s+2}(x)$ le vom numi *nodurile fundamentale* ale formulelor de cuadratură (55) și (56).

21. Dacă se ține seama de formula (9') și de o observație [2]) pe care am făcut-o în [1,3], se constată că formula (56) e tot de tipul (55). Într-adevăr, formula (55) folosește drept noduri efective rădăcinile polinomului $x^{2s} D_{2n,2s}(x)$, în timp ce formula (56) folosește drept noduri rădăcinile polinomului $x^{2s} D_{2n+1,2s}(x)$. Dar în baza formulei (9'), avem $x^{2s} D_{2n+1,2s} = x^{2s+1} D_{2n,2s+2}(x)$. Dar formula care folosește ca noduri rădăcinile polinoamelor $x^{2s+1} D_{2n,2s+2}(x)$, $x^{2s+2} D_{2n,2s+2}(x)$ sînt evident identice.

Avînd în vedere această observație, se constată că este suficient să se studieze formulele de tipul (55), adică acele formule în care $x = 0$ e nod de ordinul $2s$, iar x_i sînt rădăcinile polinomului $D_{2n,2s}(x)$, definit prin mai multe formule în cap. I al acestei lucrări. E evident că formula (55) este o formulă de tip G a u s s generalizată.

22. Vom căuta acum să stabilim niște formule cît mai simple pentru calculul coeficienților formulei de cuadratură (55). Întrucît ei sînt independenți de $f(x)$ să înlocuim în (55)

$$f(x) = \frac{h(x)}{h_i(x_i)} \frac{x^{2s}}{x_i^{2s}} \qquad (i = 1, 2, \ldots, 2n),$$

unde $h(x) = D_{2n,2s}(x)$.

Vom obține că

$$A_i = \int_{-a}^{+a} p(x) \frac{D_{2n,2s}(x)}{(x - x_i) D_{2n,2s}'(x_i)} \frac{x^{2s}}{x_i^{2s}}\, dx. \tag{57}$$

23. Ținînd seama că oricare este polinomul $g(x)$, de grad $r \leqq 2n$, avem

$$g(x) = C D_{2n,2s}(x) + \sum_{\nu=1}^{2n} \frac{D_{2n,2s}(x)}{(x - x_\nu) D_{2n,2s}'(x_\nu)} g(x_\nu),$$

unde $C \neq 0$ dacă $r = 2n$ și $C = 0$ dacă $r < 2n$, atunci primele două sume din formula (51), în care se ia $h(x) = D_{2n,2s}(x)$, devin

$$C \sum_{i=1}^{2n} \frac{D_{2n,2s}(x)}{(x - x_i) D_{2n,2s}'(x_i)} \frac{D_{2n,2s}(x)}{g(x_i)} \frac{x^{2s}}{x_i^{2s}} f(x_i) +$$
$$+ \sum_{k=1}^{r} \frac{D_{2n,2s}(x)}{D_{2n,2s}(\alpha_k)} \frac{g(x)}{(x - \alpha_k) g'(\alpha_k)} \frac{x^{2s}}{\alpha_k^{2s}} f(\alpha_k) +$$
$$+ \sum_{i=1}^{2n} \sum_{k=1}^{2n} \frac{D_{2n,2s}(x)}{(x - x_i) D_{2n,2s}'(x_i)} \frac{D_{2n,2s}(x)}{(x - x_k) D_{2n,2s}'(x_k)} \frac{g(x_k)}{g(x_i)} \frac{x^{2s}}{x_i^{2s}} f(x_i).$$

[2]) În baza căreia dacă la n noduri fundamentale se atașează alte $k(\leqq n)$ noduri arbitrare, în formula de cuadratură respectivă vor fi nuli toți coeficienții valorilor funcției de integrat pe noile noduri introduse.

Dacă se înmulțește cu $p(x)$, se integrează de la $-a$ la $+a$ și se ține seama de definiția lui $D_{2n,2s}(x)$, se obține suma

$$\sum_{i=1}^{2n} \int_{-a}^{+a} p(x) \left[\frac{D_{2n,2s}(x)}{(x - x_i) D_{2n,2s}'(x_i)} \right]^2 \frac{x^{2s}}{x_i^{2s}} f(x_i).$$

În felul acesta pentru coeficienții A_i se găsesc și expresiile următoare

$$A_i = \int_{-a}^{+a} p(x) \left(\frac{D_{2n,2s}(x)}{(x - x_i) D_{2n,2s}'(x_i)} \right)^2 \frac{x^{2s}}{x_i^{2s}}\, dx. \tag{58}$$

Avînd în vedere că $p(x) > 0$ în $(-a, +a)$, putem trage concluzia că toți coeficienții A_i ai formulei (55) sînt pozitivi. Dacă ținem seama că $D_{2n,2s}(x)$ este un polinom ortogonal simetric, relativ la ponderea (5) și intervalul $(-a, +a)$, și presupunem că $x_1 < x_2 < \ldots < x_{2n}$ se constată că

$$A_i = A_{2n-i+1} \; (i = 1, 2, \ldots, 2n).$$

24. Coeficienții C_{2k} $(k = 0, 1, \ldots, s-1)$ din formula (55) se pot exprima deasemenea independent de parametrii $\alpha_1 \alpha_2, \ldots, \alpha_r$. Într-adevăr, să considerăm polinomul de interpolare

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_{2n}\; 0, \ldots 0; f \mid x) =$$
$$= \sum_{i=1}^{2n} \frac{D_{2n,2s}(x)}{(x - x_i) D_{2n,2s}'(x_i)} \frac{x^{2s}}{x_i^{2s}} f(x_i) + \sum_{j=0}^{2s-1} l_j(x) f_{(0)}^{(j)},$$

unde

$$l_j(x) = \frac{x^j}{j!} \left[\sum_{k=0}^{2s-j-1} \frac{x^k}{k!} \left(\frac{1}{D_{2n,2s}(x)} \right)_{x=0}^{(k)} \right] D_{2n,2s}(x). \tag{59}$$

Coeficienții formulelor de cuadratură fiind independenți de funcția de integrat $f(x)$, să înlocuim în (55)

$$f(x) = l_j(x) \quad (j = 0, 1, \ldots, 2s - 1).$$

Se obține imediat că

$$C_{2k} = \int_{-a}^{+a} p(x)\, l_{2k}(x)\, dx \quad (k = 0, 1, \ldots, s - 1). \tag{60}$$

25. Vom căuta acum să dăm pentru coeficienții A_i $(i = 1, 2, \ldots, 2n)$ formule explicite, care credem că sînt foarte utile în practică.

Să considerăm formula lui C h r i s t o f f e l - D a r b o u x

$$K_{2n-1}(t, x) = \sum_{i=0}^{2n-1} \hat{D}_{i,2s}(t) \hat{D}_{i,2s}(x) =$$
$$= \sqrt{\lambda_{2n,2s}} \; \frac{\hat{D}_{2n,2s}(t) \hat{D}_{2n-1,2s}(x) - \hat{D}_{2n,2s}(x) \hat{D}_{2n-1,2s}(t)}{t - x}, \tag{61}$$

unde am întrebuințat notațiile de la (15), (16), (17) și (20). Dacă înmulțim cu $p(t)t^{2s}$ ambii membri ai acestei formule și integrăm de la $-a$ la $+a$, obținem

$$\int_{-a}^{+a} p(t)\, t^{2s} \frac{\hat{D}_{2n,2s}(t)\,\hat{D}_{2n-1,2s}(x) - \hat{D}_{2n,2s}(x)\,\hat{D}_{2n-1,2s}(t)}{t-x}\, dt = \frac{1}{\sqrt{\lambda_{2n,2s}}};$$

$x_1, x_2, \ldots, x_{2n}$ fiind rădăcinile polinomului ortonormal $D_{2n,2s}(x)$, să înlocuim în formula aceasta $x = x_i$; se obține

$$\int_{-a}^{+a} p(t)\, t^{2s} \frac{\hat{D}_{2n,2s}(t)}{t-x_i}\, dt = \frac{1}{\sqrt{\lambda_{2n,2s}}\;\hat{D}_{2n-1,2s}(x_i)}. \tag{62}$$

Ținînd seama de formulele (57) și (62), se deduce că

$$A_i = \frac{1}{\sqrt{\lambda_{2n,2s}}\, x_i^{2s}\, \hat{D}'_{2n,2s}(x_i)\, \hat{D}_{2n-1,2s}(x_i)}. \tag{63}$$

Dacă avem în vedere formulele (18), (22) și (22′) aceste expresii se pot pune și sub forma

$$A_i = \frac{\Delta_{2n-2,\,2s+2}}{\Delta_{2n-4,\,2s+2}} \cdot \frac{1}{x_i^{2s}\, \widetilde{D}'_{2n,2s}(x_i)\, \widetilde{D}_{2n-1,2s}(x_i)}. \tag{64}$$

Se mai pot obține expresii analoage cu acestea dacă se folosesc formulele (15) și (21).

26. Să ne ocupăm acum de evaluarea restului formulei de cuadratură (55).

Dacă se ia $m = r = 2n$ și se ține seama de formula (52), vom găsi pentru restul formulei de cuadratură (55) expresia

$$\rho[f] = \int_{-a}^{+a} p(x)\, \widetilde{D}_{2n,2s}(x)\, x^{2s} g(x)\, [x, 0, \ldots, 0\; x_1, x_2, \ldots, x_{2n}, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2n}; f]\, dx. \tag{65}$$

Considerînd cazul limită $g(x) \equiv \widetilde{D}_{2n,2s}(x)$ se obține că

$$\rho[f] = \int_{-a}^{+a} p(x)\, \widetilde{D}^2_{2n,2s}(x)\, x^{2s} [x, \underbrace{0, \ldots, 0,}_{2s}\; x_1, x_1, x_2, x_2, \ldots, x_{2n}, x_{2n}; f]\, dx.$$

Dacă presupunem că $f(x)$ are derivate de ordinul $4n + 2s$ — în orice punct al intervalului $(-a, +a)$ — și aplicăm o cunoscută teoremă de medie relativă la diferențele divizate, vom obține evaluarea

$$\rho[f] = \frac{1}{(4n+2s)!} \int_{-a}^{+a} \widetilde{D}^2_{2n,2s}(x)\, x^{2s} f^{(4n+2s)}_{(\eta)}\, dx,$$

unde η aparține intervalului cel mai mic care îi conține pe $x, x_1, x_2, \ldots, x_{2n}, 0$.

Avînd în vedere că $p(x)x^{2s} D^2_{2n,2s}(x) \geq 0$ în $(-a, +a)$, se poate aplica prima teoremă a mediei calculului integral și se va obține pentru restul formulei de cuadratură (55) evaluarea

$$\rho[f] = \frac{f^{(4n+2s)}_{(\xi)}}{(4n+2s)!} \int_{-a}^{+a} p(x)\, x^{2s}\, \widetilde{D}^2_{2n,2s}(x)\, dx, \tag{66}$$

unde $\xi \in (a, +a)$.

27. În cele ce urmează vom construi în mod efectiv mai multe exemple de formule de cuadratură, folosind rezultatele generale obținute mai sus[3]).

Să presupunem că $s = 1$.

1°. În cazul cînd nodurile fundamentale sînt rădăcinile polinomului $D_{2n,2}(x)$, formula de cuadratură (55) se reduce la formula generală de tip Gauss cu număr impar de noduri[4]):

$$\int_{-a}^{+a} p(x) f(x)\, dx = C_0 f(0) + \sum_{i=1}^{2n} A_i f(x_i) + \frac{f^{(4n+2)}_{(\xi)}}{(4n+2)!} \int_{-a}^{+a} p(x)\, \widetilde{I}^2_{2n+1}(x)\, dx. \tag{67}$$

2°. În cazul cînd se folosesc drept noduri rădăcinile polinomului $x^2 D_{2n+1,2}(x)$, se obțin formule de cuadratură de tip Gauss generalizate. Să dăm cîteva exemple. Să avem în vedere că dacă $p(x)$ are expresia de la (32), primele 6 polinoame $D_{m,2}(x)$ corespunzătoare au fost date la (36).

3°. În cazul $m = 1$ se obține formula

$$\int_{-1}^{+1} (1-x^2)^\alpha f(x)\, dx = 2^{\alpha+1} \frac{\Gamma(\alpha+1)\,\Gamma(\alpha+2)}{\Gamma(2\alpha+4)} [2(2\alpha+3) f(0) + f''(0)]$$

$$+\, 2^\alpha \frac{\Gamma(\alpha+1)\,\Gamma(\alpha+3)}{\Gamma(2\alpha+6)} f^{(IV)}_{(\xi)}, \tag{68}$$

unde $\Gamma(\lambda)$ e funcția lui Euler de speța a doua.

4°. Formula corespunzătoare cazului $m = 3$ a fost găsită, pe o cale deosebită, de prof. T. Popoviciu [4].

5°. În cazul $m = 5$ se obțin nodurile fundamentale

$$-x_1 = x_4 = \sqrt{\frac{7(2\alpha+9) + 2\sqrt{7(\alpha+2)(2\alpha+9)}}{(2\alpha+9)(2\alpha+11)}},$$
$$-x_2 = x_3 = \sqrt{\frac{7(2\alpha+9) - 2\sqrt{7(\alpha+2)(2\alpha+9)}}{(2\alpha+9)(2\alpha+11)}}, \tag{69}$$

3) Unele cazuri particulare ale formulei generale (55) au fost întîlnite deja în lucrări [2, 3].

4) Care sînt tocmai rădăcinile polinomului $I_{2n+1}(x)$ de la (4).

și formula de cuadratură de grad de exactitate 11:

$$\int_{-1}^{+1}(1-x^2)^\alpha f(x)\,dx = \frac{4^{\alpha+1}\,\Gamma(\alpha+1)\,\Gamma(\alpha+4)}{1225\,(\alpha+2)\,\Gamma(2\alpha+8)}\{896\,(\alpha+1)(\alpha+2)^2(34\alpha+123)\,f(0)+$$

$$+2240\,(\alpha+1)(\alpha+2)^2\,f''(0)+3(2\alpha+9)\,[7\,(\alpha+2)\,(52\alpha^2+316\,\alpha+389)-$$

$$-(92\alpha^2+396\alpha+179)\sqrt{7(\alpha+2)(2\alpha+9)}][f(x_1)+f(x_4)]+$$

$$+3\,(2\alpha+9)\,[7\,(\alpha+2)\,(52\alpha^2+316\alpha+389)+(92\alpha^2+$$

$$+396\alpha+179)\sqrt{7\,(\alpha+2)\,(2\alpha+9)}][f(x_2)+f(x_3)]\}+$$

$$\frac{4^{\alpha+1}}{4455\,(2\alpha+9)\,(2\alpha+11)}\,\frac{\Gamma(\alpha+3)\,\Gamma(\alpha+7)}{\Gamma(2\alpha+14)}\,f^{(12)}_{(\xi)}. \qquad (70)$$

În cazul $\alpha=0$ aceasta devine

$$\int_{-1}^{+1}f(x)\,dx = \frac{1}{514500}\,[440832\,f(0)+8960\,f''(0)+$$

$$+27\,(5446-537\sqrt{14})\,(f(x_1)+f(x_4))+27\,(5446+537\sqrt{14})\,(f(x_2)+f(x_3))]+$$

$$+\frac{1}{476804928600}\,f^{(12)}_{(\xi)}, \qquad (71)$$

unde

$$-x_1=x_4=\sqrt{\frac{21+2\sqrt{14}}{33}},\quad -x_2=x_3=\sqrt{\frac{21-2\sqrt{14}}{33}},$$

iar în cazul $\alpha=-\frac{1}{2}$ se reduce la

$$\int_{-1}^{+1}\frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{\pi}{29400}\,[8904\,f(0)+210\,f''(0)+4\,(1281-4\sqrt{21})\,(f(x_1)+f(x_4))+$$

$$+4\,(1281+4\sqrt{21})\,(f(x_2)+f(x_3))]+\frac{\pi}{71565312000}\,f^{(12)}_{(\xi)},$$

unde

$$-x_1=x_4=\sqrt{\frac{14+\sqrt{21}}{20}},\quad -x_2=x_3=\sqrt{\frac{14-\sqrt{21}}{20}}.$$

28. În cazul cînd $p(x)=e^{-x^2}$, $a=\infty$, $s=1$, primele 6 polinoame $\tilde{D}_{m,2}(x)$ corespunzătoare au fost date la (40).

6°. Cazului $m=1$ îi corespunde formula

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}f(x)\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4}\,[4\,f(0)+f''(0)]+\frac{\sqrt{\pi}}{32}\,f^{(\mathrm{IV})}_{(\xi)}.$$

7°. Formula corespunzătoare cazului $m=3$ a fost obținută, prin considerații deosebite, de către prof. T. Popoviciu [4].

8°. În cazul $m=5$ avem nodurile fundamentale

$$-x_1=x_4=\sqrt{\frac{7+\sqrt{14}}{2}},\quad -x_2=x_3=\sqrt{\frac{7-\sqrt{14}}{2}}$$

și formula de cuadratură de grad de exactitate 11

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}f(x)dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4900}\Big\{\,3808\,f(0)+280\,f''(0)+3(91+23\sqrt{14})\,[f(x_2)+$$

$$+f(x_3)]+3(91-23\sqrt{14})\,[f(x_1)+f(x_4)]\Big\}+\frac{\sqrt{\pi}}{36495360}\,f^{(12)}_{(\xi)}.$$

29. Să mai dăm și cîteva exemple în cazul $s=2$.

9°. Dacă $p(x)$ are expresia de la (32), polinoamele $D_{m,4}(x)$ care ne dau nodurile fundamentale se pot obține cu ajutorul formulei (45).

Dacă $m=2$ se obține, pe baza observațiilor deja făcute, formula de cuadratură care corespunde lui $m=3$ din cazul $s=1$. In general cazurilor $m=2n$, $s=2$ și $m=2n+1$, $s=1$ le corespunde aceiași formulă de cuadratură de grad de exactitate $4n+3$.

10°. Dacă $m=3$ se obține următoarea formulă de cuadratură, de grad de exactitate 9:

$$\int_{-1}^{+1}(1-x^2)^\alpha\,f(x)\,dx = 2^{2\alpha+1}\,\frac{\Gamma(\alpha+1)\,\Gamma(\alpha+4)}{343\,\Gamma(2\alpha+8)}\Big\{64\,(\alpha+1)\,(4\alpha+11)\,(82\alpha+$$

$$+285)\,f(0)+112\,(\alpha+1)\,(34\alpha+125)\,f''(0)+196\,(\alpha+1)\,f^{(\mathrm{IV})}(0)+60\,(2\alpha+$$

$$+9)^3\left[f\left(-\sqrt{\frac{7}{2\alpha+9}}\right)+f\left(\sqrt{\frac{7}{2\alpha+9}}\right)\right]\Big\}+\frac{4^\alpha\,\Gamma(\alpha+2)\,\Gamma(\alpha+6)}{135\,(2\alpha+9)\,\Gamma(2\alpha+12)}\,f^{(10)}_{(\xi)}.$$

Pentru $\alpha=0$ aceasta se reduce la

$$\int_{-1}^{+1}f(x)\,dx = \frac{1}{36015}\Big\{(50\,160\,f(0)+3\,500\,f''(0)+49\,f^{(\mathrm{IV})}(0)+10\,935\left[f\left(-\frac{\sqrt{7}}{3}\right)+\right.$$

$$\left.+f\left(\frac{\sqrt{7}}{3}\right)\right]\Big\}+\frac{1}{404\,157\,600}\,f^{(10)}_{(\xi)},$$

iar pentru $\alpha=\frac{-1}{2}$ și $\alpha=\frac{1}{2}$ se transformă respectiv în formulele

$$\int_{+1}^{-1}\frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{\pi}{65\,856}\Big\{35136\,f(0)+3\,024\,f''(0)+49\,f^{(\mathrm{IV})}(0)+15\,360\left[f\left(-\frac{\sqrt{7}}{8}\right)+\right.$$

$$\left.+f\left(\frac{\sqrt{7}}{8}\right)\right]\Big\}+\frac{\pi}{530\,841\,600}\,f^{(10)}_{(\xi)},$$

$$\int_{-1}^{+1}\sqrt{1-x^2}\, f(x)dx = \frac{\pi}{175\,616}\Big\{67\,808\, f(0) + 3\,976\, f''(0) + 49\, f^{(IV)}(0) +$$

$$+ 10\,000\Big[f\big(-\sqrt{0,7}\big) + f\big(\sqrt{0,7}\big)\Big]\Big\} + \frac{\pi}{1\,592\,524\,800}\, f^{(10)}_{(\xi)}.$$

30. Dacă $p(x) = e^{-x^2}$, $a = \infty$, $s = 2$, $m = 3$, se obține formula de cuadratură de tip Gauss generalizată:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} f(x)\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{16\,464}\Big\{15\,744\, f(0) + 2\,856\, f''(0) + 147\, f^{(VI)}(0) + 360\Big[f\Big(-\frac{\sqrt{7}}{2}\Big) +$$

$$+ f\Big(\frac{\sqrt{7}}{2}\Big)\Big]\Big\} + \frac{\sqrt{\pi}}{55\,2960}\, f^{(10)}_{(\xi)},$$

cu 5 termeni și de grad de exactitate 9.

Primit la 5.VII.1957.

BIBLIOGRAFIE

1. D. D. Stancu, *Generalizarea unor formule de interpolare pentru funcțiile de mai multe variabile și unele considerații asupra formulei de integrare numerică a lui Gauss*, Bul. Științ. Acad. R.P.R., Secț. Mat.-Fiz., **9**, 2 (1957), 287–313.
2. D. D. Stancu, *Generalizarea formulei de cuadratură a lui Gauss – Christoffel*, Stud. și Cerc. Științ. Iași, Seria Matem., **1** (1957), 1–18.
3. D. D. Stancu, *O metodă pentru construirea de formule de cuadratură de grad înalt de exactitate*, Comunicările Acad. R.P.R. (sub tipar).
4. T. Popovici, *Asupra unei generalizări a formulei de integrare numerică a lui Gauss*, Stud. și Cerc. Științ. Iași **6** (1955), 29–57.