oboneament

SOCIETATEA DE ŞTIINŢE MATEMATICE ŞI FIZICE DIN R.P.R.

BULLETIN MATHÉMATIQUE

DE LA SOCIÉTÉ DES SCIENCES MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUES DE LA RÉPUBLIQUE POPULAIRE ROUMAINE

Nouvelle série

TOME 1 (49), n° 4, 1957

EDITURA TEHNICĂ

1. La rédaction du *Bulletin Mathématique* de la Société des Sciences Mathématiques et Physiques offre cette revue en échange avec les périodiques mathématiques d'autres pays.

S'adresser à la rédaction:

Societatea de ştiinţe matematice şi fizice din R.P.R. Redacţia *Bulletin Mathématique*, Bucarest 1, Str. Academiei nr. 14, Roumanie (R.P.R.)

2. Le *Bulletin Mathématique* de la Société des Sciences Mathématiques et Physiques publiera des recensions des livres de mathématiques parus, pour lesquels les auteurs ou les maisons d'édition auront envoyé un exemplaire à la rédaction:

Societatea de ştiinţe matematice şi fizice din R.P.R. Redacţia *Bulletin Mathématique*, Bucarest 1, Str. Academiei nr. 14, Roumanie (R.P.R.)

BULLETIN MATHÉMATIQUE

DE LA SOCIÉTÉ DES SCIENCES MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUES DE LA R.P.R.

Tome 1 (49), n° 4, 1957

SOMMAIRE

Page

EDITURA TEHNICĂ
Bucureşti 1957

BULL. MATH. de la Soc. Sci. Math. Phys. de la R.P.R.
Tome 1 (49), n° 4, 1957

SUR UNE CLASSE DE POLYNÔMES ORTHOGONAUX ET SUR DES FORMULES GÉNÉRALES DE QUADRATURE A NOMBRE MINIMUM DE TERMES *)

PAR

D. D. STANCU (Cluj)

Dans ce travail nous avons essayé d'élaborer une théorie qui permet de donner une méthode utile et aussi simple que possible pour la construction de formules générales de quadrature à nombre minimum de termes. Dans la première partie de l'ouvrage nous avons étudié une classe de polynômes orthogonaux symétriques que nous avons constamment utilisé par la suite, dans la seconde partie du travail, où nous avons établi plusieurs formules qui généralisent les formules classiques de quadrature du type Gauss.

CHAPITRE I

Sur une classe de polynômes orthogonaux symétriques

1. Soit $p(x)$ une fonction définie dans l'intervalle (α, β) fini ou infini, telle que les « moments »

$$c'_r = \int_\alpha^\beta p(x)x^r\,dx \quad (r = 0, 1, 2, \dots) \tag{1}$$

existent et $c'_0 > 0$. On sait que dans ces conditions il y a une suite de polynômes $\{\Phi_m(x)\}$ complètement déterminés si on excepte les facteurs constants, par les relations d'orthogonalité

$$\int_\alpha^\beta p(x)\Phi_i(x)\Phi_k(x)dx = 0 \qquad (i \neq k;\, i, k = 0, 1, 2, \dots)$$

*) Communication présentée à l'Académie de la R.P.R. le 1.VII.1957.

On sait en outre, que ces polynômes peuvent s'exprimer par la formule

$$\Phi_m(x) = \begin{vmatrix} c'_0 & c'_1 & \dots & c'_{m-1} & 1 \\ c'_1 & c'_2 & \dots & c'_m & x \\ \dots & & & \dots & \\ \dots & & & \dots & \\ c'_m & c'_{m+1} & \dots & c'_{2m-1} & x^m \end{vmatrix} \quad (m = 0, 1, 2, \ldots) \tag{2}$$

2. Supposons maintenant que l'intervalle (α, β) soit symétrique par rapport à l'origine: $(-a, +a)$ et que $p(x)$ soit une fonction paire dans cet intervalle, c'est-à-dire $p(-x) = p(x)$. Supposons que tous les moments

$$c_k = \int_{-a}^{+a} p(x) x^k \, dx \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots) \tag{2}$$

existent. Alors, les moments d'ordre impairs C_{2i+1} sont tous nuls. On montre aisément que la formule (2) se réduit dans le cas $m = 2n$ à:

$$I_{2n}(x) = \begin{vmatrix} c_0 & 0 & c_2 & 0 & \dots & c_{2n-2} & 0 & 1 \\ 0 & c_2 & 0 & c_4 & \dots & 0 & c_{2n} & x \\ c_2 & 0 & c_4 & 0 & \dots & c_{2n} & 0 & x^2 \\ \dots & & & & & & & \\ \dots & & & & & & & \\ 0 & c_{2n} & 0 & c_{2n+2} & \dots & 0 & c_{4n-2} & x^{2n-1} \\ c_{2n} & 0 & c_{2n+2} & 0 & \dots & c_{4n-2} & 0 & x^{2n} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} c_2 & c_4 & \dots & c_{2n} \\ c_4 & c_6 & \dots & c_{2n+2} \\ \dots & & & \\ \dots & & & \\ c_{2n} & c_{2n+2} & \dots & c_{4n-2} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c_0 & c_2 & \dots & c_{2n-2} & 1 \\ c_2 & c_4 & \dots & c_{2n} & x^2 \\ c_4 & c_6 & \dots & c_{2n+2} & x^3 \\ \dots & & & & \\ c_{2n} & c_{2n+2} & \dots & c_{4n-2} & x^{2n} \end{vmatrix} \tag{3}$$

et pour $m = 2\,n + 1$ on a:

$$I_{2n+1}(x) = \begin{vmatrix} c_0 & 0 & c_2 & 0 & \dots & 0 & c_{2n} & 1 \\ 0 & c_2 & 0 & c_4 & \dots & c_{2n} & 0 & x \\ c_2 & 0 & c_4 & 0 & \dots & 0 & c_{2n+2} & x^2 \\ \dots & & & & & & & \\ \dots & & & & & & & \\ c_{2n} & 0 & c_{2n+2} & 0 & \dots & 0 & c_{4n} & x^{2n} \\ 0 & c_{2n+2} & 0 & c_{2n+4} & \dots & c_{4n} & 0 & x^{2n+1} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} c_0 & c_2 & \dots & c_{2n} \\ c_2 & c_4 & \dots & c_{2n+2} \\ \dots & & & \\ \dots & & & \\ c_{2n} & c_{2n+2} & \dots & c_{4n} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c_2 & c_4 & \dots & c_{2n} & 1 \\ c_4 & c_6 & \dots & c_{2n+2} & x^2 \\ c_6 & c_8 & \dots & c_{2n+4} & x^4 \\ \dots & & & & \\ c_{2n+2} & c_{2n+4} & \dots & c_{4n} & x^{2n} \end{vmatrix} x. \tag{4}$$

3. $p(x)$ étant définie comme au pt. 2, considérons une fonction de poids de la forme

$$q(x) = p(x)\, x^{2s} \tag{5}$$

où s est un entier > 0.

Les moments qui lui correspondent sont

$$\mu_{k,2s} = \int_{-a}^{+a} q(x)\, x^k \, dx = \int_{-a}^{+a} p(x)^{2s+k} \, dx.$$

Remarquons que

$$\mu_{k,2s} = c_{k+ss}.$$

Notons avec $\{ D_{m,2s}(x) \}$ la suite de polynômes orthogonaux relativement à la fonction de poids (s) et à l'intervalle $(-a, +a)$ fini ou infini. En tenant compte des formules (2), (3) et (4) on a:

$$D_{2n+1,2s}(x) = \begin{vmatrix} c_{2s+2} & c_{2s+4} & \dots & c_{2s+2n} & 1 \\ c_{2s+4} & c_{2s+6} & \dots & c_{2s+2n+2} & x^2 \\ c_{2s+6} & c_{2s+8} & \dots & c_{2s+2n-2} & x^4 \\ \dots & & & & \\ c_{2s+2n+2} & c_{2s+2n+4} & \dots & c_{2s+4n} & x^{2n} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c_{2s} & c_{2s+2} & \dots & c_{2s+n2} \\ c_{2s+2} & c_{2s+4} & \dots & c_{2s+2n+2} \\ \dots & & & \\ \dots & & & \\ c_{2s+2n} & c_{2s+2n+2} & \dots & c_{2s+4n} \end{vmatrix} \tag{7}$$

$$D_{2n,2s}(x) = \begin{vmatrix} c_{2s+2n} & c_{2s+2n+2} & \dots & c_{2s+4n-2} & x_{2n} \\ \dots & & & & \\ c_{2s+4} & c_{2s+4} & \dots & c_{2s+2n+2} & x^4 \\ c_{2s+2} & c_{2s+4} & \dots & c_{2s+2n} & x^4 \\ c_{2s} & c_{2s+2} & \dots & c_{2s+2n-2} & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c_{2s+2n} & c_{2s+2n+2} & \dots & c_{2s+4n-s} \\ \dots & & & \\ & & & \\ c_{2s+4} & c_{2s+6} & \dots & c_{2s+2n+2} \\ c_{2s+2} & c_{2s+4} & \dots & c_{2s+2n} \end{vmatrix} \tag{8}$$

4. En tenant compte des formules (7) et (8) on établit immédiatement la relation suivante, qui nous sera très utile dans la seconde partie du travail

$$D_{2n+1,2s}(x) = \alpha_{2n,\,2s}\, x\, D_{2n,\,2s+2}(x), \tag{9}$$

où

$$\alpha_{2n,2s} = \begin{vmatrix} c_{2s} & c_{2s+2} & \dots & c_{2s+2n} \\ c_{2s+2} & c_{2s+4} & \dots & c_{2s+2n+2} \\ \dots & & & \\ \dots & & & \\ c_{2s+2n} & c_{2s+2n+2} & \dots & c_{2s+4n} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} c_{2s+4} & c_{2s+6} & \dots & c_{2s+2n+2} \\ c_{2s+6} & c_{2s+8} & \dots & c_{2s+2n+4} \\ \dots & & & \\ \dots & & & \\ c_{2s+2n+2} & c_{2s+2n+4} & \dots & c_{2s+4n} \end{vmatrix} \tag{10}$$

Si on note par $\widetilde{D}_{m,2s}(x)$ le produit de $D_{m,2s}(x)$ par une constante d_m telle que $d\, D_{m,2s}(x)$ ait le coefficient de x égal à 1, la relation (9) pourra s'écrire:

$$\widetilde{D}_{2n+1,2s}(x) = x\, \widetilde{D}_{2n,\,2s+2}. \tag{9}$$

5. On obtient des formules précédentes pour $n = 0,1,2$, les polynômes suivants:

$$\widetilde{D}_{0,2s}(x) = 1, \quad \widetilde{D}_{1,2s}(x) = x, \quad \widetilde{D}_{2,2s}(x) = x^2 - \frac{c_{2s+2}}{c_{2s}}, \quad \widetilde{D}_{3,2s} = x^3 - \frac{c_{2s+4}}{c_{2s+2}}\,x,$$

$$\widetilde{D}_{4,2s}(x) = x^4 + \frac{c_{2s+2}\,c_{2s+4} - c_{2s}\,c_{2s+6}}{c_{2s}\,c_{2s+4} - c_{2s+2}^2}\,x^2 + \frac{c_{2s+2}\,c_{2s+6} - c_{2s+4}^2}{c_{2s}\,c_{2s+4} - c_{2s+2}^2},$$

$$\widetilde{D}_{5,2s}(x) = x^5 + \frac{c_{2s+4}\,c_{2s+6} - c_{2s+2}\,c_{2s+8}}{c_{2s+2}\,c_{2s+6} - c_{2s+4}^2}\,x^3 + \frac{c_{2s+4}\,c_{2s+8} - c_{2s+6}^2}{c_{2s+2}\,c_{2s+6} - c_{2s+4}^2}\,x$$

6. Nous allons montrer maintenant qu'un polynôme quelconque $D_{r,2s}(x)$ de la suite $\{D_{m,2s}(x)\}$ peut s'exprimer aussi par l'intermédiaire de certains polynômes de la suite $\{I_p(x)\}$ dont les éléments ont été définis dans (3) et (4).

D'une façon précise nous allons démontrer que, à certains facteurs constants près, on a

$$D_{2n,2s}(x) = \frac{1}{x^{2s}} \begin{vmatrix} I_{2n}(x) & I_{2n+2}(x) & \dots & I_{2n+2s}(x) \\ I_{2n}(0) & I_{2n+2}(0) & \dots & I_{2n+2s}(0) \\ I''_{2n}(0) & I''_{2n+2}(0) & \dots & I''_{2n+2s}(0) \\ I^{(IV)}_{2n}(0) & I^{(IV)}_{2n+2}(0) & \dots & I^{(IV)}_{2n+2s}(0) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ I^{(2s-2)}_{2n}(0) & I^{(2s-2)}_{2n+2}(0) & \dots & I^{(2s-2)}_{2n+2s}(0) \end{vmatrix} \tag{11}$$

$$D_{2n+1,2s}(x) = \frac{1}{x^{2s}} \begin{vmatrix} I_{2n+1}(x) & I_{2n+3}(x) & \dots & I_{2n+2s+1}(x) \\ I'_{2n+1}(0) & I_{2n+3}(0) & \dots & I'_{2n+2s+1}(0) \\ I'''_{2n+1}(0) & I'''_{2n+3}(0) & \dots & I'''_{2n+2s+1}(0) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ I^{(2s-1)}_{2n+1}(0) & I^{(2s-1)}_{2n+3}(0) & \dots & I^{(2s-1)}_{2n+2s+1}(0) \end{vmatrix}. \tag{12}$$

Nous avons noté ici par $\{I_\gamma(x)\}$, comme ci-dessus, la suite de polynômes orthogonaux relativement à la fonction poids $p(x)$ (paire) et à l'intervalle $(-a, +a)$.

D é m o n s t r a t i o n. Ces formules se démontrent d'une manière semblable. Si l'on désigne par $y(x)$ le déterminant de (11) et si l'on tient compte que $I_{2k}(x)$ contient seulement des termes de la forme $a_i x^{2i} (i = 0,1,\dots,k)$ on constate que

$$y'(0) = y'''(0) = \dots = y^{(2s-1)}(0) = 0$$

et que si l'ont tient compte de l'expression de $y(x)$ on peut écrire

$$y(0) = y''(0) = \dots = y^{(2s-1)}(0) = 0.$$

Il résulte que $y(x)$ est divisible par x^{2s}.

Si on note maintenant par $z(x)$ le déterminant qui figure dans (12), comme un polynôme $I_{2k+1}(x)$ contient seulement des termes de la forme $b_i x^{2i+1} (i=0,1,\dots,k)$, on a

$$z(0) = z''(0) = \dots = z^{(2s)}(0) = 0.$$

En tenant compte de l'expression du $z(x)$ on trouve que

$$z'(0) = z'''(0) = \dots = z^{(2s-1)}(0) = 0.$$

De ces égalites il résulte que $z(x)$ est divisible par x^{2s+2}. Le fait que la suite de polynômes $\{D_{m,2s}(x)\}$ est orthogonale relativement à la fonction de poids (5) et à l'intervalle $(-a, +a)$, donc, que

$$\int_{+a}^{-a} p(x) x^{2s} D_{n,2s}(x)\, D_{n,2s}(x)\, dx = 0 \quad (m \neq n)$$

résulte immédiatement si on tient compte du fait que $x^{2s} D_{m,2s}(x)$ s'exprime par une combinaison linéaire de polynômes de degré $\geqslant m$, extraits de la suite $\{I_k(x)\}$.

7. Comme la fonction de poids $q(x) = p(x)\, x^{2s}$ est une fonction paire, la suite $\{D_{m,2s}(x)\}$ est une suite de polynômes orthogonaux symétriques; un polynôme quelconque de cette suite a toutes ses racines réelles, distinctes, situées dans $(-a, +a)$ et réparties symétriquement par rapport à l'origine.

Montrons que les déterminants $y(x)$ et $z(x)$ qui figurent dans (11) et (12) ne sont pas identiquement nuls. Pour montrer par exemple, que $z(x) \not\equiv 0$, il suffit de montrer que le coefficient de $I_{2n+2s+1}(x)$ est différent de zéro, c'est-à-dire que,

$$A^{(s)}_{2n+1,s} = \begin{vmatrix} I^1_{2n+1}(0) & I^1_{2n+3}(0) & \dots & I^1_{2n+2s-1}(0) \\ I'''_{2n+1}(0) & I'''_{2n+3}(0) & \dots & I'''_{2n+2s-1}(0) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ I^{(2s-1)}_{2n+1}(0) & I^{(2s-1)}_{2n+3}(0) & \dots & I^{(2s-1)}_{2n+2s-1}(0) \end{vmatrix} \pm 0.$$

Supposons le contraire, c'est-à-dire $A^{(s)}_{24+1,s} = 0$. On peut trouver alors s constantes, non toutes nulles $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{s-1}$ telles que

$$\sum_{i=o}^{s-1} \alpha_i\, I^{)2k-1)}_{2n+2i+1}(0) = 0 \quad (k = 1,2,\dots, s) \tag{13}$$

car le déterminant de ce système homogène par rapport aux α_i $(i = 0,1,2,\dots,s-1)$ est justement égal à $A^{(s)}_{2n+1,s}$ qui, par hypothèse est égal à zéro.

Posons

$$G_{2n+2s-1}(x) = \sum_{i=0}^{s-1} \alpha_i\, I_{2n+2i+1}(x). \tag{14}$$

Ce polynôme n'est pas identiquement nul, est de degré $2n + 2s - 1$ et est orthogonal dans $(-a, +a)$, par rapport à la fonction poids paire $p(x)$, à tout polynôme de degré plus petit que $2n + 1$. En tenant compte de (13) et de la propriété $G_{2n+2s-1}(-x) = G_{2n+2s-1}(x)$, on constate que le polynôme de (14) a le point zéro comme racine multiple d'ordre $2s+1$. Le quotient de ce polynôme et de $x^{2\beta}$, noté C_{2n-1}, est de degré $\leqslant 2n-1$. Comme le polynôme (14) est orthogonal à tout polynôme de degré plus petit que $2n+1$ et que

$$G_{2n+2s-1}(x) = x^{2s}\, C_{2n-1}(x)$$

on a

$$\int_{-a}^{+a} p(x)\, G_{2n+2s-1}(x)\, C_{2n-1}(x)\, dx = \int_{-a}^{+a} p(x)\, x^{2s}\, C_{2n-1}^{2}(x)\, dx = 0$$

ce qui est impossible car le produit

$$p(x)\, x^{2s}\, C_{2n-1}(x)$$

représente une fonction paire. Il résulte que le déterminant $z(x)$ de (12) ne peut être identiquement nul.

On démontre d'une manière absolument analogue, que $y(x) \neq 0$ dans $(-a, +a)$.

8. La suite de polynômes orthogonaux $\{D_{m,2s}(x)\}$ n'est pas en général normée. Dans ce qui suit nous allons normer cette suite de polynômes. Tout d'abord nous alons normer la suite $\{D_{2n+1,2s}(x)\}$.

On a

$$x^{2s}\, D_{2n+1,2s}(x) = \sum_{i=0}^{s} (-1)^{i} A_{2n+1,s}^{(i)}\, I_{2n+2i+1}(x)$$

où $A_{2n+1,s}^{(i)}$ $(i = 0, 1, \ldots, s)$ sont des constantes. En tenant compte des formule précédentes on a:

$$\delta_{2n+1} = \int_{-a}^{+a} p(x)\, x^{2s}\, D_{2n+1,2s}^{2}(x)\, dx = A_{2n+1,s}^{(0)} \int_{-a}^{+a} p(x)\, D_{2n+1,2s}(x)\, I_{2n+1}(x)\, dx.$$

Mais,

$$D_{2n+1,2s}(x) = (-1)^{s} A_{2n+1,s}^{(s)}\, \beta_{2n+2s+1}\, x^{2n+1} + \ldots =$$

$$= (-1)^{s} A_{2n+1,s}^{(s)}\, \frac{\beta_{2n+2s+1}}{\beta_{2n+1}}\, I_{2n+1}(x) + \ldots,$$

où on a noté avec β_{2r+1} le coefficient de x^{2r+1} du polynôme orthogonal $I_{2r+1}(x)$.

Si on utilise la notation

$$\gamma_{2n+1}^{2} = \int_{-a}^{+a} p(x)\, I_{2n+1}^{2}(x)\, dx$$

on obtient

$$\delta_{2n+1} = \int_{-a}^{+a} p(x)\, x^{2s}\, D_{2n+1}^{2}(x)\, dx = (-1)^{s} A_{2n+1,s}^{(0)} A_{2n+1,s}^{(s)}\, \frac{\beta_{2n+2s+1}}{\beta_{2n+1}}\, \gamma_{2n+1}^{2}.$$

En normant le polynôme (12) on trouve

$$\begin{aligned} \hat{D}_{2n+1,2s}(x) &= \frac{1}{\pm\sqrt{\delta_{2n+1}}}\, D_{2n+1,2s}(x) = \\ &= \pm \frac{1}{\gamma_{2n+1}} \sqrt{\frac{(-1)^{s}\, \beta_{2n+1}}{A_{2n+1,p}^{(0)}\, A_{2n+1,s}^{(s)}\, \beta_{2n+2s+1}}}\, D_{2n+1,23}(x) \end{aligned} \qquad (15')$$

où $A_{2n+1,s}^{(0)}$ et $A_{2n+1,s}^{(s)}$ sont les mineurs des éléments $I_{2n+1}(x)$ et $I_{2n+2s+1}(x)$ du déterminant de (12). On choisit le signe devant le radical de telle façon que le coefficient de x^{2n+1} dans $\hat{D}_{2n+1,2s}(x)$ soit positif. On obtient une formule du même type que (15′) pour $\hat{D}_{2n,2s}(x)$.

On peut les réunir dans la formule unique

$$\hat{D}_{m,2s}(x) = \pm \frac{1}{\gamma_m} \sqrt{\frac{(-1)^{s}\, \beta_m}{A_{m,s}^{(0)}\, A_{m,s}^{(s)}\, \beta_{m+2s}}}\, D_{m,2s}(x), \qquad (15)$$

$A_{m,p}^{(0)}$ $A_{ms}^{(s)}$ étant respectivement les mineurs des éléments $I_m(x), I_{m+s}(x)$ du déterminant qui figure dans l'expression de $D_{m,2s}(x)$.

9. Si on utilise les moments $c_{2s}, c_{2s+2}, \ldots$ et on tient compte des expressions (7) et (8) des polynômes $D_{m,2s}(x)$ on obtient, en normant, les polynômes

$$\hat{D}_{2n,2s}(x) = \frac{1}{\sqrt{\Delta_{2n-2,2s}\, \Delta_{2n,2s}}} \begin{vmatrix} c_{2s} & c_{2s+2} & \ldots & c_{2s+2n-2} & 1 \\ c_{2s+2} & c_{2s+4} & \ldots & c_{2s+2n} & x^{2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{2s+2n} & c_{2s+2n+2} & \ldots & c_{2s+4n-2} & x^{2n} \end{vmatrix}, \qquad (16)$$

$$\hat{D}_{2n+1,2s}(x) = \frac{1}{\sqrt{\Delta_{2n-2,2s+2}\, \Delta_{2n,2s+2}}} \begin{vmatrix} c_{2s+2} & c_{2s+4} & \ldots & c_{2s+2n} & 1 \\ c_{2s+4} & c_{2s+4} & \ldots & c_{2s+24+2} & x^{2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{2s+2n+2} & c_{2s+2n+4} & \ldots & c_{2s+4n} & x^{2n} \end{vmatrix} x, \qquad (17)$$

où on a utilisé la notation

$$\Delta_{2n,2s} = \begin{vmatrix} c_{2s} & c_{2s+2} & \ldots & c_{2s+2n} \\ c_{2s+2} & c_{2s+4} & \ldots & c_{2s+2n+2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{2s+2n} & c_{2s+2n+2} & \ldots & c_{2s+4n} \end{vmatrix}. \qquad (18)$$

10. Rappelons aussi la relation de récurrence qui existe entre 3 polynômes consécutifs de la suite $\{\widetilde{D}_{m,2s}(x)\}$

$$\widetilde{D}_{m,2s}(x) = x\, \widetilde{D}_{m-1,2s}(x) - x_{m-1,2s}\, \widetilde{D}_{m-2,2s}(x) \qquad (19)$$

où

$$\lambda_{m-1,2s} = \left(\int_{-a}^{+a} p(x)\, x_{2s}\, D^2_{m-1,2s}(x)\, dx \right) : \left(\int_{-a}^{+a} p(x)\, x_{2s}\, \widetilde{D}^2_{m-2,2s}(x)\, dx \right). \tag{20}$$

Si on utilise les formules (11) et (12), on trouve que

$$\lambda_{m-1,2} = \frac{\beta_{m-2}\, \beta_{m+2s-2}}{\beta_{m-1}\, \beta_{m+2s-1}} \quad \frac{A^{(0)}_{m-1,s}\, A^{(s)}_{m-2,s}}{A^{(0)}_{m-2,s}\, A^{(s)}_{m-1,s}} \quad \frac{\gamma^2_{m-1}}{\gamma^2_{m-2}} \tag{21}$$

et si on utilise les formules (16) et (17) en tenant compte que

$$\widetilde{D}_{2n,2s}(x) = \sqrt{\frac{\Delta_{2n,2,s}}{\Delta_{2n-2,2s}}}\, \hat{D}_{2n,2s}(x) \cdot D_{2n+1,2s}(x) = \sqrt{\frac{\Delta_{2n,2s+2}}{\Delta_{2n-2,2s+2}}}\, \hat{D}_{2n+1,2s}(x), \tag{22'}$$

on obtient les formules

$$\begin{aligned} \gamma_{2n,2s} &= \frac{\Delta_{2n,2s}\, \Delta_{2n-4,2s+2}}{\Delta_{2n-2,2s}\, \Delta_{2n-2,2s+2}} \\ \lambda_{2n-1,2s} &= \frac{\Delta_{2n-2,2s+2}\, \Delta_{2n-4,2s}}{\Delta_{2n-4,2s+2}\, \Delta_{2n-2,2s}}. \end{aligned} \tag{22}$$

11. Cas particuliers des formules (11) et (12).

1° Si $s = 0$ on a $D_{m,0}(x) = I_m(x)$.

2° Si au lieu de $I_m(x)$ on prend $\widetilde{I}_m(x)$ et on fait $s = 1$ dans les formules (11) et (12) on obtient

$$x^2 D_{2n,2}(x) = \widetilde{I}_{2n,2}(0)\, \widetilde{I}_{2n}(x) - \widetilde{I}_{2n}(0)\, \widetilde{I}_{2n+2}(x), \tag{23}$$

$$x^2 D_{2n+1,2}(x) = \widetilde{I}'_{2n+3}(0)\, \widetilde{I}_{2n+1}(x) - \widetilde{I}'_{2n+1}(0)\, \widetilde{I}_{2n+3}(x). \tag{24}$$

On peut écrire la formule (23) d'une manière plus simple. En effet on sait qu'entre trois polynomes consécutifs $\widetilde{I}_{2n+2}(x)$, $\widetilde{I}_{2n+1}(x)$, $\widetilde{I}_{2n}(x)$ il y a la relation

$$\widetilde{I}_{2n+2}(x) + \lambda_{2n+1}\, \widetilde{I}_{2n}(x) = x\, \widetilde{I}_{2n+1}(x)$$

où

$$\lambda_{2n+1} = \left(\int_{-a}^{+a} p(x)\, \widetilde{I}^2_{2n+1}(x)\, dx \right) : \left(\int_{-a}^{+a} p(x)\, I_{2n}(\widetilde{x})\, dx \right). \tag{25}$$

Comme

$$I_{2n}(x) = \frac{1}{\Delta_{2n-2,0}} \begin{vmatrix} c_0 & c_2 & \dots & c_{2n-2} & 1 \\ c_2 & c_4 & \dots & c_{2n} & x^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{2n} & c_{2n+2} & \dots & c_{3n-2} & \alpha^{2n} \end{vmatrix} \tag{26}$$

on trouve que

$$\lambda_{2n+1} = \frac{\Delta_{2n-2,0}\, \Delta_{2n,2}}{\Delta_{2n,0}\, \Delta_{2n-2,2}}. \tag{27}$$

Mais

$$I_{2n}(0) = (-1)^n \frac{\Delta_{2n-2,2}}{\Delta_{2n-2,0}} \tag{28}$$

et la formule précédente devient

$$\lambda_{2n+1} = -\frac{\widetilde{I}_{2n+2}(0)}{\widetilde{I}_{2n}(0)}. \tag{29}$$

En tenant compte de (23), (25) et 29) on arrive à

$$\widetilde{D}_{2n,2}(x) = \frac{1}{x}\, \widetilde{I}_{2n+1}(x). \tag{30}$$

Dans le cas du degré impair, vu (24), on trouve que

$$\widetilde{D}_{2n+1,2}(x) = \frac{1}{x^2} \left[\widetilde{I}_{2n+3}(x) - \frac{\widetilde{I}'_{2n+3}(0)}{\widetilde{I}'_{2n+1}(0)}\, \widetilde{I}_{2n+1}(x) \right]. \tag{31}$$

12. Dans le cas particulier

$$a = 1,\ p(x) = (1 - x^2)^\alpha \quad (\alpha > -1) \tag{32}$$

les polynômes $I_n(x)$ seront les polynômes ultrasphériques de J a c o b i

$$J_n(x) = \frac{1}{2^n\, n!} (x^2 - 1)^{-\alpha} [(x^2 - 1)^{n+\alpha}]^{(n)}. \tag{33}$$

Vu que

$$J'_{2n+1}(0) = (-1) \frac{(\alpha + 2n + 1)(\alpha + 2n) \dots (\alpha + n + 1)}{2^{2n}\, n!} \tag{34}$$

on trouve, à un facteur numérique pres, que

$$\begin{aligned} x^2 D_{2n+1,2}(x) = {} & 4(n+1)(\alpha + n + 1)\, J_{2n+3}(x) + \\ & + (\alpha + 2n + 3)(\alpha + 2n + 2)\, J_{2n+1}(x). \end{aligned} \tag{35}$$

Les 6 premiers polynômes $\widetilde{D}_{m,2}(x)$ sont

$$\left. \begin{aligned} & \widetilde{D}(x) = 1,\ \widetilde{D}_{1,2}(x) = x,\ \widetilde{D}_{2,2}(x) = x^2 - \frac{3}{2\alpha + 5}, \\ & \widetilde{D}_{3,2}(x) = x^3 - \frac{5}{2\alpha + 7}\, x,\ \widetilde{D}_{4,2}(x) = x^4 - \frac{10}{2\alpha + 9}\, x^2 + \frac{15}{(2\alpha + 7)(2\alpha + 9)}, \\ & \widetilde{D}_{5,2}(x) = x^5 - \frac{14}{2\alpha + 11}\, x^3 + \frac{35}{(2\alpha + 9)(2\alpha + 11)}\, x. \end{aligned} \right\} \tag{36}$$

13. Considérons encore le cas particulier suivant, très important:

$$a = \infty,\quad p(x) = e^{-x^2}. \tag{37}$$

Les polynômes $I_n(x)$ correspondants sont les polynômes d'H e r m i t e

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2}[e^{-x^2}]^{(n)}. \tag{38}$$

Comme

$$\widetilde{H}'_{2n+1}(0) = (-1)^n \frac{(2n+2)!}{(n+1)!}, \tag{38}$$

la formule (31) devient:

$$\widetilde{D}_{2n+1,2}(x) = \frac{1}{x^2}\left[\widetilde{H}_{2n+3}(x) + \frac{2n+3}{2}\widetilde{H}_{2n+1}(x)\right]. \tag{39}$$

Dans ce cas les premiers polynômes $D_{m,2}(x)$ sont

$$\left.\begin{array}{l} \widetilde{D}_{0,2}(x) = 1,\ \widetilde{D}_{1,2}(x) = x,\ \widetilde{D}_{2,2}(x) = x^2 - \dfrac{3}{2},\ \widetilde{D}_{3,2}(x) = x^3 - \dfrac{5}{2}x, \\ \widetilde{D}_{4,2}(x) = x^4 - 5x^2 + \dfrac{15}{4},\ \widetilde{D}_{5,2}(x) = x^5 - 7x^3 + \dfrac{35}{4}x. \end{array}\right| \tag{40}$$

14. 3. Considérons aussi le cas particulier $s = 2$ des formules (11) et (12). On a

$$x^4 D_{2n,4}(x) = \begin{vmatrix} I_{2n}(x) & I_{2n+2}(x) & I_{2n+4}(x) \\ I_{2n}(0) & I_{2n+2}(0) & I_{2n+4}(0) \\ I''_{2n}(0) & I''_{2n+2}(0) & I''_{2n+4}(0) \end{vmatrix} \tag{41}$$

$$x^3 D_{2n+1,4}(x) = \begin{vmatrix} I_{2n+1}(x) & I_{2n+3}(x) & I_{2n+5}(x) \\ I'_{2n+1}(0) & I'_{2n+3}(0) & I'_{2n+5}(0) \\ I'''_{2n+'}(0) & I'''_{2n+3}(0) & I'''_{2n+5}(0) \end{vmatrix} \tag{42}$$

15. Dans le cas (32), vu que

$$J_{2n}(0) = (-1)^n \frac{(\alpha+2n)(\alpha+2n-1)\ldots(\alpha+n+1)}{2^{2n}\,n!},$$

$$J''_{2n}(0) = (-1)^{n-1}\frac{(\alpha+2n)(\alpha+2n-1)\ldots(\alpha+n+1)(2\alpha+2n+1)}{2^{2n-1}(n-1)!},$$

$$J'''_{2n+1}(0) = (-1)^{n-1}\frac{(\alpha+2n+1)(\alpha+2n)\ldots(\alpha+n+1)(2\alpha+2n+3)}{2^{2n-1}(n-1)!}$$

et que $J'_{2n+1}(0)$ est donné par la formule (34), on trouve, à un facteur numérique près, les formules

$$\begin{aligned} x^4 D_2(x) = {} & 16(n+1)(n+2)(\alpha+n+1)(\alpha+n+2)(2\alpha+4n+3)J_{2n+4}(x) + \\ & + 8(n+1)(\alpha+n+1)(\alpha+2n+3)(\alpha+2n+4)(2\alpha+4n+5)J_{2n+2}(x) + \\ & + (\alpha+2n+1)(\alpha+2n+2)(\alpha+2n+3)(\alpha+2n+4)(2\alpha+4n+7)J_{2n}(x), \end{aligned} \tag{43}$$

$$\begin{aligned} x^4 D_2(x) = {} & 16(n+1)(n+2)(\alpha+n+1)(\alpha+n+2)(2\alpha+4n+5)J_{2n+5}(x) + \\ & + 8(n+1)(\alpha+n+1)(\alpha+2n+4)(\alpha+2n+5)(2\alpha+4n+7)J_{2n+3}(x) + \\ & + (\alpha+2n+2)(\alpha+2n+3)(\alpha+2n+4)(\alpha+2n+5)(2\alpha+4n+\rho)J_{2n+1}(x). \end{aligned} \tag{44}$$

Les formules (43) et (44) peuvent être réunies dans une formule unique

$$\begin{aligned} x^4 D_{m,4}(x) = {} & 16\left(\left[\frac{m}{2}\right]+1\right)\left(\left[\frac{m}{2}\right]+2\right)\left(\alpha+\left[\frac{m}{2}\right]+1\right)\left(\alpha+\left[\frac{m}{2}\right]+2\right)(2\alpha+2m+ \\ & +3)J_{m+4}(x) + 8\left(\left[\frac{m}{2}\right]+1\right)\left(\alpha+\left[\frac{m}{2}\right]+1\right)(\alpha+m+3)(\alpha+m+4)(\alpha+2m+5), \\ & J_{m+2}(x) + (\alpha+m+1)(\alpha+m+2)(\alpha+m+3)(\alpha+m+4)(2\alpha+2m+7)I_m(x) \end{aligned} \tag{45}$$

où l'on a noté par $[\alpha]$ la partie entière du nombre α.

Les quatre premier polynômes sont

$$\widetilde{D}_{0,4}(x) = 1,\ \widetilde{D}_{1,4}(x) = x,\ \widetilde{D}_{2,4}(x) = x^2 - \frac{5}{2\alpha+7},\ \widetilde{D}_{3,4}(x) = x^3 - \frac{7}{2\alpha+9}x.$$

16. Dans le cas des polynômes de H e r m i t e (38) vu que

$$H_{2n}(0) = (-1)^n\frac{(2n)!}{n!}, \qquad H''_{2n}(0) = 4(-1)^{n-1}\frac{(2n)!}{(n-1)!},$$

$$H'''_{2n+1}(0) = 8(-1)^{n-1}\frac{(2n+1)!}{(n-1)!}$$

et que $H'_{2n+1}(0)$ a la valeur de (38), les formules (41) et (42) conduisent à

$$\widetilde{D}_{2n,4}(x) = \frac{1}{x^4}\left[\widetilde{H}_{2n+n}(x) + (2n+3)\widetilde{H}_{2n+2}(x) + \frac{(2n+1)(2n+3)}{4}\right]\widetilde{H}_{2n}(x), \tag{46}$$

$$\widetilde{D}_{2n+1,4}(x) = \frac{1}{x^4}[\widetilde{H}_{2n+5}(x) + (2n+5)\widetilde{H}_{2n+3}(x) + (2n+3)(2n+5)\widetilde{H}_{2n+1}(x)]. \tag{47}$$

Les quatre premiers polynômes $\widetilde{D}_{m,4}(x)$ correspondant à la fonction poids (37) sont

$$\widetilde{D}_{0,4}(x) = 1 \quad \widetilde{D}_{1,4}(x) = x \quad \widetilde{D}_{2\,4}(x) = x^2 - \frac{5}{2}\ \widetilde{D}_{3,4}(x) = x^3 - \frac{1}{2}x.$$

CHAPITRE II

Sur qulques formules de quadrature du type Gauss

17. D é f i n i t i o n. Nous nommerons formules généralisée de quadrature de type G a u s s, toute formule de quadrature de la forme:

$$\int_a^b p(t)\,f(t)\,dt = \sum_{i=1}^{s}\sum_{k=0}^{r_{i-s}} a_{ik}\,f^{(k)}_{(t_i)} + \rho[f], \tag{48}$$

qui a le degré d'exactitude $2N-1$, N étant le nombre des coefficients a_{ik} différents de zéro.

Dans le cas $s = n$ et $r_1 = r_2 = \ldots = r_n = 1$ on obtient la formule de quadrature classique de type G a u s s, dont les nœuds $t_1 t_2, \ldots, t_n$ sont les n racines réelles et distinctes du polynôme $\Phi_n(t)$ orthogonal, par rapport à la fonction poids $p(t)$ et à l'intervalle (a, b) — à tout polynôme de degré plus petit que n.

Dans ce chapitre nous allons montrer qu'il y a aussi d'autres formules de quadrature généralisées de type G a u s s.

18. Pour cela on va considérer les polynômes

$$h(x) = \prod_{i=1}^{m} (x - x_i),\ g(x) = \prod_{k=1}^{r} (x - \alpha_k),\ l(x) = x^{2s}, \tag{49}$$

qui ont les racines réelles.

La formule d'interpolation de L a g r a n g e - H e r m i t e relative à une fonction $f(x)$ dérivable un nombre suffisant de fois — et à $m + r + 2s$ nœuds qui coïncident avec les racines des polynômes (49), est de la forme:

$$f(x) = L(\underbrace{0, \ldots, 0}_{2s}, x_1, x_2, \ldots, x_m, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r; f \mid x) + R(x), \tag{50}$$

où

$$L(0, \ldots, 0, x_1, x_2, \ldots, x_m, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r; f \mid x) = L_{2s+m+r}(x) =$$
$$= \sum_{i=1}^{m} \frac{h_i(x)}{h_i(x_i)} \frac{g(x)}{g(x_i)} \frac{x^{2s}}{x_i^{2s}} f(x_i) + \sum_{k=1}^{r} \frac{h(x)}{h(\alpha_k)} \frac{g_k(x)}{g_k(\alpha_k)} \frac{x^{2s}}{\alpha_k^{2s}} f(\alpha_k) +$$
$$+ \sum_{i=0}^{2s-1} \sum_{k=0}^{2s-i-1} \frac{x^i}{i!} \left[\frac{x_k}{k!} \left(\frac{1}{u(x)} \right)^{(k)}_{x=0} \right] u(x) f(i)(0), \tag{51}$$
$$h_i(x) = \frac{h(x)}{x - x_i},\ g_k(x) = \frac{g(x)}{x - \alpha_k}\ u(x) = h(x)\, g(x)$$

et

$$R(x) = h(x)\, g(x)\, x^{2s} [x, \underbrace{0, \ldots, 0}_{2s}, x_1, x_2, \ldots, x_m, x, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r; f]^{1)}. \tag{52}$$

19. Si on multiplie par la fonction poids $p(x)$ que nous supposons être une fonction paire dans $(-a, +a)$ et telle que les moments (1') existent, et si on fait l'intégration, on obtient la formule suivante de quadrature

$$\int_{-a}^{+a} p(x) f(x) dx = \sum_{i=1}^{m} A_i f(x_i) + \sum_{j=1}^{r} B_j f(\alpha_j) + \sum_{k=0}^{2s-1} C_k f^{(k)}(0) + \rho[f]. \tag{53}$$

Les expressions des coefficients et du reste de cette formule sont évidentes.

Nous essaierons de déterminer $h(x)$ afin que les coefficients B_j disparaissent. A cette occasion nous établirons le

[1]) Par ce crochet nous avons indiqué la différence divisée relative à la fonction $f(x)$ et les nœuds mis en évidence.

T h é o r è m e. *La condition nécessaire et suffisante pour que l'on ait dans la formule de quadrature (53), où $r = m$, quels que soient $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$,*

$$B_1 = B_2 = \ldots = B_m = 0,$$

est que $x_1, x_2, \ldots, x_m$ soient les m racines réelles et distinctes da polynôme $D_{m,2s}(x)$.

D é m o n s t r a t i o n. Étant donné que

$$B_k = \int_{-a}^{+a} p(x) \frac{h(x)}{h(\alpha_k)} \frac{g_k(x)}{g_k(\alpha_k)} \frac{x^{2s}}{\alpha_k^{2s}} dx \qquad (k = 1, 2, \ldots, r), \tag{54}$$

on remarque que pour avoir $B_k = 0$ $(k = 0, 1, 2, \ldots r.)$ il est nécessaire que

$$\int_{-a}^{+a} p(x)\, x^{2s} h(x)\, g_k(x)\, dx = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, r).$$

Si on prend $r = m$ on constate qu'il est nécessaire que $h(x)$ soit tel que

$$\int_{-a}^{+a} p(x)\, x^{2s} h(x)\, q(x) dx,$$

où $q(x)$ est un polynôme de degré $n - 1$ (car α_i sont arbitraires). Il résulte qu'il est nécessaire que $h(x)$ soit orthogonal, relativement à la fonction de poids $p(x)x^{2s}$ et à l'intervalle $(-a, +a)$, à tout polynôme de degré $< m - 1$; ceci signifie qu'il doit être égal — à un facteur numérique près — au polynôme $D_{m,2s}(x)$ défini au chap. I.

La suffisance de la condition est évidente.

Remarque. Si $r < m$ alors les coefficients B_k $(k = 1, 2, \ldots, r)$ seront aussi nuls si $h(x) = \tilde{D}_{m,2s}(x)$. On ne peut pas prendre $r > m$ car on trouve pour x_i des valeurs imaginaires. Cela signifie que si l'on fixe le degré d'exactitude à $2N-1$, le nombre des termes ne peut être plus petit que N.

20. Vu que dans la formule (51) les valeurs $f^{(2j-1)}(0)$, $(j = 1, 2, \ldots, s)$ sont multipliées par des polynômes dans lesquels interviennent seulement les puissances impaires de x, que $p(x)$ est une fonction paire et que l'intervalle d'intégration est symétrique par rapport à l'origine, il résulte que tous les coefficients de $f^{(2j-1)}(0)$ de la formule (53) seront nuls.

Dans ces conditions la formule de quadrature (53) devient, pour $m = 2n$,

$$\int_{-a}^{+a} p(x) f(x) dx = \sum_{i=1}^{2n} A_i f(x_i) + \sum_{k=0}^{s-1} C_{2k} \overset{(2k)}{f}(0) + \rho[f] \tag{55}$$

et pour $m = 2n + 1$

$$\int_{-a}^{+a} p(x) f(x) dx = \sum_{i=1}^{2n} A'_i f(x_i) + \sum_{k=0}^{s} C'_{2k} \overset{(2k)}{f}(0) + \rho'[f]. \tag{56}$$

Les nœuds $x_1, x_2 \ldots, x_{2n}$ qui interviennent ci-dessus et qui sont les racines de $D_{2n,2s}(x)$ ou de $D_{2n,2s+2}(x)$ seront dénommés les nœuds fondamentaux des formules de quadrature (55) et (57).

21. Si l'on tient compte de la formule (9) et d'une remarque que nous avons fait aussi dans [1, 3][2]) on constate que la formule (56) est toujours du type (55). En effet, la formule (55) a comme nœuds effectifs les racines du polynôme $x^{2s} D_{2n,2s}(x)$ tandis que la formule (56) utilise comme nœuds les racines du polynôme $x^{2s} D_{2n+1,2s}(x)$. Mais d'après la formule (9′) $x^{2s} D_{2n+1,2s} = x^{s+1} D_{2n,2s+2}(x)$ et les formules qui utilisent comme nœuds les racines des polynômes $x^{2s+1} D_{2n,2s+2}(x)$, $x^{2s+2} D_{2n,2s+2}(x)$ sont les mêmes.

Tenant compte de cette remarque on constate qu'il est suffisant d'étudier les formules du type (55) c'est-à-dire les formules pour lesquelles $x = 0$ est un nœud d'ordre $2s$ et x sont les racines du polynôme $D_{2n,2s}(x)$ défini par plusieurs formules dans le premier chapitre du travail présent. Il est évident que la formule (55) est une formule de type G a u s s généralisée.

22. Nous chercherons maintenant à établir des formules aussi simples que possible pour le calcul des coefficients de la formule de quadrature (55). Comme ils sont indépendants de $f(x)$, substituons dans (55)

$$f(x) = \frac{h(x)}{h_i(x_i)} \; \frac{x^{2s}}{x_i^{2s}} \qquad (i = 1, 2, \ldots, 2n)$$

où $h(x) = D_{2n,2s}(x)$. On obtient

$$A_i = \int_{-a}^{+a} p(x) \frac{D_{2n,2s}(x)}{(x - x_i) D'_{2n,2s}(x)} \frac{x^{2s}}{x_i^{2s}} dx. \tag{57}$$

23. En tenant compte que, quel que soit le polynôme $g(x)$ de degré $r < 2n$, on a

$$g(x) = C\, D_{2n,2s}(x) + \sum_{\nu=1}^{2n}{}' \frac{D_{2n,2s}(x)}{(x - x_\nu) D_{2n,2s}(x_\nu)} g(x_\nu)$$

où $C \neq 0$ si $r = 2n$ et $C = 0$ si $r < 2n$, les deux premières sommes de la formule (51) dans lesquelles on prend $h(x) = D_{2n,2s}(x)$ deviennent:

$$C \sum_{i=1}^{2n} \frac{D_{2n,2s}(x)}{(x - x_i).\, D'_{2n,2s}(x_i)} \cdot \frac{D_{2n,2s}(x)}{g(x_i)} \frac{x^{2s}}{x_i^{2s}} f(x_i) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{r} \frac{D_{2n,2s}(x)}{D_{2n,2s}(\alpha_k)} \frac{g(x)}{(x - \alpha_k)\, g'(\alpha_k)} \cdot \frac{x^{2s}}{\alpha_k^{2s}} f(\alpha_k) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{2n} \sum_{k=1}^{2n} \frac{D_{2n,2s}(x)}{(x - x_i) D'_{2n,2s}(x_i)} \cdot \frac{D_{2n,2s}(x)}{(x - x_k) D'_{2n,2s}(x_k)} \cdot \frac{g(x_k)}{g(x_i)} \frac{x^{2s}}{x_i^{2s}} f(x_i).$$

[2]) De cette remarque ressort que si à n nœuds fondamentaux on ajoute k ($< n$) autres nœuds arbitraires, dans la formule de quadrature respective tous les coefficients des valeurs de la fonction à integrer sur les nouveaux nœuds introduits sont nuls.

Si on multiplie par $p(x)$, en prenant l'intégrale de $-a$ à $+a$ et en tenant compte de la définition de $D_{2n,2s}(x)$, on obtient la somme

$$\sum_{i=1}^{2n} \left[\int_{-a}^{+a} p(x) \left(\frac{D_{2n,2s}(x)}{(x - x_i) D'_{2n,2s}(x_i)} \right) \frac{x^{2s}}{x_i^{2s}} \right] f(x_i).$$

On obtient ainsi pour les coefficients A_i les expressions suivantes

$$A_i = \int_{-a}^{+a} p(x) \left(\frac{D_{2n,2s}(x)}{(x - x_i) D'_{2n,2s}(x_i)} \right)^2 \frac{x^{2s}}{x_i^{2s}} dx. \tag{58}$$

Comme $p(x) > 0$ dans $(-a, +a)$, on déduit que tous les coefficients A_i de la formule (55) sont positifs. Si on tient compte que $D_{2n,2s}$ est un polynôme orthogonal symétrique, relativement à la fonction de poids (5) et à l'intervalle $(-a, +a)$ et si on suppose que $x_1 < x_2 < \ldots < x_{2n}$ on constate que

$$A_i = A_{2n-i+1} \qquad (i = 1, 2, \ldots, 2n).$$

24. Les coefficients C_{2k} ($k = 0, 1, \ldots, s-1$) de la formule (55) peuvent s'exprimer aussi indépendamment des paramètres $\alpha_1\, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$.

En effet, on considère le polynôme d'interpolation

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_{2n}, 0, \ldots 0; f \mid x) =$$

$$= \sum_{i=1}^{2n}{}' \frac{D_{2n,2s}(x)}{(x - x_i) D'_{2n,2s}(x_i)} \frac{x^{2s}}{x_i^{2s}} f(x_i) + \sum_{j=0}^{2s-1} l_j(x) f^{(i)}_{(0)}$$

où

$$l_j(x) = \frac{x^j}{j!} \left[\sum_{k=0}^{2s-j-1} \frac{x^k}{k!} \left(\frac{1}{D_{2n,2s}(x)} \right)^{(k)}_{x=0} \right] D_{2n,2s}(x). \tag{59}$$

Les coefficients des formules de quadrature étant indépendants de la fonction à intégrer $f(x)$, substituons dans (55)

$$f(x) = l_j(x) \quad (j = 0, 1, \ldots, 2s - 1).$$

On obtient immédiatement

$$C_{2k} = \int_{-a}^{+a} p(x)\, l_{2k}(x)\, dx \quad (k = 0, 1, \ldots s - 1). \tag{60}$$

25. Nous essaierons maintenant de donner des formules explicites pour les coefficients A_i ($i = 1, 2 \ldots, 2n$), formules que nous croyons très utiles en pratique.

Considérons la formule de C h r i s t o f f e l-D a r b o u x

$$K_{2n-1}(t, x) = \sum_{i=1}^{2n-1} \hat{D}_{i,2s}(t)\, \hat{D}_{i,2s}(x) =$$

$$= \sqrt{\lambda_{2n,2s}} \frac{\hat{D}_{2n,2s}(t)\, \hat{D}_{2n-1,2s}(x) - \hat{D}_{2n,2s}(x)\, \hat{D}_{2n-1,2s}(t)}{t - x}, \tag{61}$$

où nous avons employé les notations de (15), (16), (17) et (20). Si on multiplie par $p(t)t^{2s}$ les deux membres de cette formule et si on fait l'intégration de $-a$ et $+a$ on obtient

$$\int_{-a}^{+a} p(t)t^{2s}\,\frac{\hat{D}_{2n,2s}(t)\,\hat{D}_{2n-1,2s}(x)-\hat{D}_{2n,2s}(x)\,\hat{D}_{2n-1,2s}(t)}{t-x}\,dt=\frac{1}{\sqrt{\lambda_{2n,2s}}}.$$

$x_1, x_2, \ldots, x_{2n}$ étant les racines du polynôme orthonormal $\hat{D}_{2n,2s}(x)$, faisons dans cette formule $x = x_i$; on trouve

$$\int_{-a}^{+a} p(t)t^{2s}\,\frac{\hat{D}_{2n,2s}(t)}{t-x_i}\,dt=\frac{1}{\sqrt{\lambda_{2n,2s}}\,\hat{D}_{2n-1,2s}(x_i)}. \tag{62}$$

En tenant compte de (57) et (62) on déduit que

$$A_i=\frac{1}{\sqrt{\lambda_{2n,2s}}\;x_i^{2s}\,\hat{D}'_{2n,2s}(x_i)\,\hat{D}_{2n-1,2s}(x_i)}. \tag{63}$$

Vu les formules (18), (22) et (22′), on peut écrire ces expressions autrement

$$A_i=\frac{\Delta_{2n-2,2s+2}}{\Delta_{2n-4,2s+2}}\cdot\frac{1}{x_i^{2s}\widetilde{D}_{2n,2s}(x_i)\,\widetilde{D}_{2n-1,2s}(x_i)} \tag{64}$$

Si on utilise les formules (15) et (21) on peut obtenir des expressions analogues à celles-ci.

26. Évaluons maintenant le reste de la formule de quadrature (55).

Si on prend $m = r = 2n$ et on tient compte de (52) on trouve pour le reste de la formule de quadrature (55) l'expression

$$\rho[f]=\int_{-a}^{+a} p(x)\,\widetilde{D}_{2n,2s}(x)\,x^{2s}\,g(x)\,[x,\underbrace{0,\ldots,0}_{2s},x_1,x_2,\ldots, \ldots,x_{2n},\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{2n};f]\,dx. \tag{65}$$

En considérant le cas limite $g(x)=\widetilde{D}_{2n,2s}(x)$, on obtient

$$\rho[f]=\int_{-a}^{+a} p(x)\,\widetilde{D}^2_{2n,2s}(x)\,x^{2s}\,[x,\underbrace{0,\ldots,0}_{2s},x_1,x_1\,x_2,x_2,\ldots,x_{2n},x_{2n};f]\,dx.$$

Si on suppose que $f(x)$ a des dérivées d'ordre $4n+2s$ dans tout point de $(-a, +a)$ et si on applique un théorème connu relatif aux différences divisées, on trouve l'évaluation

$$\rho[f]=\frac{1}{(4n+2s)!}\int_{-a}^{+a}\widetilde{D}^2_{2n,2s}(x)\,x^{2s}f^{(4n+2s)}(\eta)\,dx,$$

où η appartient au plus petit intervalle qui contient $x, x_1, x_2, \ldots, x_2$, 0.

Étant donné que $p(x)x^{2s}\widetilde{D}^2_{2n,2s}(x)\geq 0$ dans $(-a, +a)$ on peut appliquer le premier théorème de moyenne du calcul intégral et on trouve pour le reste de la formule de quadrature (55) l'évaluation

$$\rho[f]=\frac{f^{(4n+2s)}(\xi)}{(4n+2s)!}\int_{-a}^{+a} p(x)\,x^{2s}\,\widetilde{D}^2_{2n,2s}(x)\,dx, \tag{66}$$

où $\xi\in(-a, +a)$.

27. Dans ce qui suit, nous allons construire effectivement plusieurs exemples de formules de quadrature, en utilisant les résultats généraux obtenus ci-dessus[3]). Supposons $s = 1$.

1°. Si les nœuds fondamentaux sont les racines du polynôme $D_{n,2}(x)$, la formule (55) se réduit à la formule générale de type G a u s s à nombre impair de nœuds[4]).

$$\int_{-a}^{+a} p(x)f(x)\,dx = C_0 f(0)+\sum_{i=1}^{2n} A_i f(x_i)+\frac{f^{(4n+2)}(\xi)}{(4n+2)!}\int_{-a}^{+a} p(x)\,\widetilde{I}^2_{2n+1}(x)\,dx. \tag{67}$$

2°. Si on utilise comme nœuds les racines du polynôme $x^2 D_{2n+1,2}(x)$, on obtient des formules de quadrature de type G a u s s généralisées. Donnons quelques exemples. Rappelons que si $p(x)$ a l'expression de (32), les six premiers polynômes $D_{m,2}(x)$ correspondants ont été donnés à (36).

3°. Pour $m = 1$ on obtient la formule

$$\int_{-1}^{+1}(1-x^2)^{\alpha}f(x)\,dx = 2^{\alpha+1}\frac{\Gamma(\alpha+1)\,\Gamma(\alpha+2)}{\Gamma(s\alpha+4)}[2(2\alpha+3)f(0)+f''(0)]+ + 2^{\alpha}\frac{\Gamma(\alpha+1)\,\Gamma(\alpha+3)}{\Gamma(2\alpha+6)}f^{(IV)}(\xi), \tag{68}$$

où $\Gamma(\lambda)$ est la fonction d'E u l e r de seconde espèce.

4°. La formule correspondant au cas $m = 3$ a été trouvée par une autre voie par T. P o p o v i c i u [4].

5°. Pour $m = 5$ on trouve les nœuds fondamentaux

$$-x_1 = x_4 = \sqrt{\frac{7(2\alpha+9)+2\sqrt{7(\alpha+2)(2\alpha+9)}}{(2\alpha+9)(2\alpha+11)}}, \qquad -x_2 = x_3 = \sqrt{\frac{7(2\alpha+9)-2\sqrt{7(\alpha+2)(2\alpha+9)}}{(2\alpha+9)(2\alpha+11)}} \tag{69}$$

---

[3]) Certains cas particuliers de la formule générale (55) ont été rencontrés dans [2] et [3.]

[4]) Ce sont justement les racines du polynôme $I_{2n+1}(x)$ de (4).

et la formule de quadrature a degré d'exactitude 11

$$
\begin{aligned}
\int_{-1}^{+1}(1-x^2)^\alpha f(x)\,dx = {} & \frac{4^{\mu+1}\,\Gamma(\alpha+1)\,\Gamma(\alpha+4)}{1225(\alpha+2)\,\Gamma(2\alpha+8)}\Big\{896(\alpha+1)(\alpha+2)^2(34\alpha+123)f(0)+ \\
& +2240(\alpha+1)(\alpha+2)^2 f''(0)+3(2\alpha+9)[7(\alpha+2)(52\alpha^2+316\alpha+389)- \\
& -(92\alpha^2+396\alpha+179)\sqrt{7(\alpha+2)(2\alpha+9)}]\,[f(x_1)+f(x_4)]+ \\
& +3(2\alpha+9)[7(\alpha+2)(52\alpha^2+316\alpha+389)+(92\alpha^2+396\alpha+ \\
& +179)\sqrt{7(\alpha+2(2\alpha+9)}]\,[f(x_2)+f(x_3)]\Big\}+\frac{4^{\alpha+1}}{4455(2\alpha+9)(2\alpha+11)} \\
& \frac{\Gamma(\alpha+3)\,\Gamma(\alpha+7)}{\Gamma(2\alpha+14)}f^{(12)}(\xi).
\end{aligned}
\tag{70}
$$

Pour $\alpha = 0$ on trouve

$$
\begin{aligned}
\int_{-1}^{+1} f(x)\,dx = {} & \frac{1}{514\,500}[440\,832 f(0)+8960 f''(0)+27(5446-537\sqrt{14})f(x_1)+ \\
& +f(x_4)]+27(5446+537\sqrt{14})\,[f(x_2)+f(x_3)]+\frac{1}{476804928600}f^{(12)}(\xi),
\end{aligned}
\tag{71}
$$

où

$$
-x_1 = x_4 = \sqrt{\frac{21+2\sqrt{14}}{33}}\,, \quad -x_2 = x_3 = \sqrt{\frac{21-2\sqrt{14}}{33}}
$$

et pour $\alpha = \frac{1}{2}$ la formule se réduit à

$$
\begin{aligned}
\int_{-1}^{+1}\frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = {} & \frac{\pi}{29400}[8904 f(0)+216 f''(0)+4(1281-4)(f(x_1)+f(x_4))+ \\
& +4(1281+4\sqrt{21})(f(x_2)+f(x_3))+\frac{\pi}{71565312000}f^{(12)}(\xi),
\end{aligned}
$$

où

$$
-x_1 = x_4 = \sqrt{\frac{14+\sqrt{21}}{20}}, \quad -x_2 = x_3 = \sqrt{\frac{14-\sqrt{21}}{20}}.
$$

28. Pour $p(x) = e^{-x^2}$, $a = \infty$, $s = 1$ les 6 premiers polynômes $D_{m,2}(x)$ correspondants ont été donnés dans (4).

6°. Au cas $m = 1$ correspond la formule

$$
\int_{-\infty}^{+\infty} e_{-x_2} f(x)\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4}[4f(0)+f''(0)]+\frac{\sqrt{\pi}}{32}f^{(IV)}(\xi).
$$

7°. La formule correspondant à $m = 3$ a été obtenue à l'aide d'autres considérations par T. Popoviciu [4].

8°. Pour $m = 5$ on a les nœuds fondamentaux

$$
-x_1 = x_4 = \sqrt{\frac{7+\sqrt{14}}{2}}, \; -x_2 = x_3 = \sqrt{\frac{7-\sqrt{14}}{2}}
$$

et la formule de quadrature a degré d'exactitude 11

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} f(x)\,dx = {} & \frac{\sqrt{\pi}}{4900}\{3808 f(0)+280 f''(0)+3(91+23\sqrt{14})[f(x_2)+f(x_3)]+ \\
& +3(91-23\sqrt{14})[f(x_1)+f(x_4)]\}+\frac{\sqrt{\pi}}{36495360}f^{(12)}(\xi).
\end{aligned}
$$

29. Donnons aussi quelques exemples pour le cas $s = 2$.

9°. Si $p(x)$ a l'expression de (32) les polynômes $D_{m,4}(x)$ qui donnent les nœuds fondamentaux peuvent s'obtenir à l'aide de (45).

Si $m = 2$ on trouve (compte tenu des remarques déjà faites) la formule de quadrature qui correspond à $m = 3$ du cas $s = 1$. En général aux cas $m = 2^n$, $s = 2$ et $m = 2^n + 1$, $s = 1$ correspond la même formule de quadrature à degré d'exactitude $4n + 3$.

10. Si $m = 3$ on obtient la formule suivante de quadrature à degré d'exactitude 9

$$
\begin{aligned}
\int_{-1}^{+2}(1-x^2)^\alpha f(x)\,dx = {} & 2^{2\alpha-1}\frac{\Gamma(\alpha+1)\,\Gamma(\alpha+4)}{343\,\Gamma(2\alpha+8)}\Big\{64(\alpha+1)(4\alpha+11)(82\alpha+ \\
& +285)f(0)+112(\alpha+1)(34\alpha+125)f''(0)+196(\alpha+1)f^{\mathrm{IV}}(0)+ \\
& +60(2\alpha+9)^3\left[f\left(-\sqrt{\frac{7}{2\alpha+9}}\right)+f\left(\sqrt{\frac{7}{2\alpha+9}}\right)\right]+ \\
& \frac{4^\alpha\,\Gamma(\alpha+2)\,\Gamma(\alpha+6)}{135(2\alpha+9)\,\Gamma(2\alpha+12)}f^{(10)}(\xi).
\end{aligned}
$$

Pour $\alpha = 0$ ceci se réduit à

$$
\begin{aligned}
\int_{-1}^{+1} f(x)\,dx = {} & \frac{1}{36015}\Big\{50\,160 f(0)+3\,500 f''(0)+49 f^{(IV)}(0)+10\,935\left[f\left(-\frac{\sqrt{7}}{3}\right)+\right. \\
& \left.\left.+f\left(\frac{\sqrt{7}}{3}\right)\right]\right\}+\frac{1}{404\,157\,600}f^{(10)}(\xi)
\end{aligned}
$$

et pour $\alpha = -\frac{1}{2}$ et $\alpha = \frac{1}{2}$ on trouve

$$\int_{-1}^{+1} \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^3}}\, dx = \frac{\pi}{65\,856}\Big\{35\,136\, f(0) + 3\,024\, f''(0) + 49\, f^{(IV)}(0) +$$

$$+ 15\,360\left[f\left(-\sqrt{\frac{7}{8}}\right) + f\left(\sqrt{\frac{7}{8}}\right)\right]\Big\} + \frac{\pi}{530\,841\,600} f^{(10)}(\xi).$$

$$\int_{-1}^{+1} \sqrt{1-x^2}\, f(x)\, dx = \frac{\pi}{175\,616}\Big\{678\text{c}8\, f(0) + 3976\, f''(0) + 49\, f^{(IV)}(0) +$$

$$+ 10.000\left[f(-\sqrt{0{,}7}) + f(\sqrt{0{,}7})\right]\Big\} + \frac{\pi}{1\,592\,524\,800} f^{(10)}(\xi).$$

30. Si $p(x) = e^{-x^2}$, $a = \infty$, $s = 2$, $m = 3$ on obtient la formule de quadrature de type Gauss généralisée:

$$\int_{+\infty}^{+\infty} e^{-x^2} f(x)\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{16\,464}\Big\{15\,744\, f(0) + 2\,856\, f''(0) + 147\, f^{(I\Lambda)}(0) +$$

$$+ 360\left[f\left(-\sqrt{\frac{7}{2}}\right) + f\left(\sqrt{\frac{2}{7}}\right)\right]\Big\} + \frac{\sqrt{\pi}}{552\,960} f^{(10)}(\xi)$$

à 5 termes et à degré d'exactitude 9.

Reçu le 20. VI. 1957

BIBLIOGRAPHIE

1. D. D. Stancu, *Generalizarea unor formule de interpolare pentru funcțiile de mai multe variabile și unele considerații asupra formulei de integrare numerică a lui Gauss*, Bul. Științ. Acad. R.P.R., Secț. Mat.-Fiz., **9**, 2 (1957).
2. D. D. Stancu, *Generalizarea formulei de cuadratură a lui Gauss-Christoffel*, Stud. și Cerc. Științ. Iași, Seria Matem., 1 (1957).
3. D. D. Stancu, *O metodă pentru construirea de formule de cuadratură de grad înalt de exactitate*, Comunicările Acad. R.P.R. **7** (1957) (à paraître).
4. T. Popoviciu, *Asupra unei generalizări a formulei de integrare numerică a lui Gauss*, Stud. și Cerc. Științ. Iași **6** (1957), 29–57.