

## Bibliografie

- [1] H. Gonska, D-x Zhou. On an extremal problem concerning Bernstein operators, *Serdica Math. J.*, **21** (1995), 137–150.
- [2] R. Păltănea. Best constant in estimates with second order moduli of continuity, *Approximation Theory, (Proc. Int. Dortmund Meeting on Approximation Theory 1995, ed. by M. W. Müller et al.)*, Akademie Verlag, Berlin, 1995, 251–275.
- [3] R. Păltănea. Estimates with second order moduli, *Rend. Circ. Mat. Palermo*, **68** Suppl. (2002), 727–738.
- [4] R. Păltănea, Optimal constant in approximation by Bernstein operators, *J. Comput. Analysis Appl.*, **5**, No. 2, (2003), 195–235.
- [5] R. Păltănea. *Approximation Theory using Positive Linear Operators*, Birkhäuser, Boston, 2004.

## O metodă de tip Aitken-Steffensen-Hermite de ordinul 3

ION PĂVĂLOIU

Fie dată ecuația

$$(1) \quad f(x) = 0$$

unde  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Pentru scopurile noastre, alături de ecuația (1), vom considera încă două ecuații echivalente cu aceasta, și anume:

$$(2) \quad \begin{aligned} x - p(x) &= 0 \\ x - q(x) &= 0 \end{aligned}$$

unde  $p, q : [a, b] \rightarrow [a, b]$ . Notăm cu  $h : [a, b] \rightarrow [a, b]$  funcția dată de relația:

$$(3) \quad h(x) = q(p(x)).$$

Fie  $F = f([a, b])$ , mulțimea valorilor funcției  $f$  pentru  $x \in [a, b]$ . Considerăm  $s, k \in \mathbb{N}$ ,  $s \geq 1$ ,  $k \geq 1$  și notăm  $n = s + k$ .

Asupra funcției  $f$  vom face următoarele ipoteze:

$\alpha$ )  $f \in C^n([a, b])$ ;

$\beta$ )  $f'(x) \neq 0$  pentru orice  $x \in [a, b]$ .

Dacă  $f$  verifică  $\alpha$ ) și  $\beta$ ) atunci există  $f^{-1} : F \rightarrow [a, b]$  și  $f^{-1} \in C^n(F)$ .

Este bine cunoscută următoarea teoremă [1], [3].

**Teorema 1.** Dacă  $f$  verifică ipotezele  $\alpha$ ) și  $\beta$ ) și dacă  $1 \leq j \leq n$ ,  $j \in \mathbb{N}$ , atunci  $f^{-1} \in C^n(F)$  și au loc relațiile

$$(4) \quad [f^{-1}(y)]^{(j)} =$$

$$\sum \frac{(2j-2-i_1)(-1)^{j-1+i_1}}{i_2!i_3! \dots i_k! [f'(x)]^{2j-1}} \left( \frac{f'(x)}{1!} \right)^{i_1} \left( \frac{f''(x)}{2!} \right)^{i_2} \dots \left( \frac{f^{(j)}(x)}{j!} \right)^{i_j},$$

pentru  $j = \overline{1, n}$ , unde  $y = f(x)$ . Suma de mai sus se extinde asupra tuturor soluțiilor în numere întregi nenegative ale sistemului

$$\begin{cases} i_2 + 2i_3 + \dots + (j-1)i_j = j-1; \\ i_1 + i_2 + i_3 + \dots + i_j = j-1. \end{cases}$$

Câteva cazuri particulare ale relației (4) ne conduc la următoarele expresii pentru derivatele succesive ale lui  $f$

$$(5) \quad (f^{-1}(y))' = \frac{1}{f'(x)};$$

$$(6) \quad (f^{-1}(y))'' = -\frac{f''(x)}{[f'(x)]^3};$$

$$(7) \quad [f^{-1}(y)]''' = \frac{3[f''(x)]^2 - f'(x)f'''(x)}{[f'(x)]^5}, \quad y = f(x).$$

Fie  $x_1, x_2 \in [a, b]$  și  $y_1 = f(x_1)$ ,  $y_2 = f(x_2)$  valorile funcției  $f$ .

Notăm cu  $H(y_1, s; y_2, k; f^{-1}(y))$  polinomul de interpolare al lui Hermite pentru  $f^{-1}$  cu  $y_1$  având ordinul de multiplicitate  $s$  și  $y_2$  cu ordinul  $k$ .

În ipotezele  $\alpha$ ) și  $\beta$ ), ținând cont de Teorema 1 există  $\eta \in \text{int}(F)$ , astfel încât

$$(8) \quad f^{-1}(y) = H(y_1, s; y_2, k; f(y)) + \frac{[f^{-1}(\eta)]^{(n)}}{n!} (y - y_1)^s (y - y_2)^k.$$

În ipoteza  $\beta$ ) dacă  $\bar{x} \in [a, b]$  este o rădăcină a ecuației (1) atunci  $\bar{x}$  este unică și  $\bar{x} = f^{-1}(0)$ .

Are loc relația

$$(9) \quad \bar{x} = H(y_1, s; y_2, p; f^{-1}(0)) + (-1)^n \frac{[f^{-1}(\eta)]^{(n)}}{n!} y_1^s y_2^k$$

unde  $\eta_1$  este cuprins în interiorul celui mai mic interval ce conține punctele  $y_1, y_2$  și 0.

Din (9) obținem o aproximație pentru  $\bar{x}$  astfel:

$$(11) \quad \bar{x} \cong x_3 = H(y_1, s; y_2, k; f^{-1}(0)).$$

În general dacă  $x_{n-1}, x_n \in [a, b]$ , sunt două aproximații ale lui  $\bar{x}$ , atunci  $x_{n+1}$  dată de relația

$$(12) \quad x_{n+1} = H(y_{n-1}, s; y_n, k; f^{-1}(0)), \quad y_{n-1} = f(x_{n-1}) \quad \text{și} \\ y_n = f(x_n), \quad n = 2, 3, \dots$$

este o nouă aproximație pentru  $\bar{x}$ .

În lucrarea [2] se arată că ordinul de convergență al metodei de iterație (12) este dat de rădăcina pozitivă

$$\omega = \frac{k + \sqrt{k^2 + 4s}}{2},$$

a ecuației

$$t^2 - kt - s = 0.$$

Tot aici, prin controlul nodurilor de interpolare se obține o clasă de metode de tip Steffensen cu ordinul de convergență  $n = s + k$ . Se arată apoi că indicele de eficiență al metodei de tip Steffensen este opțional pentru  $s + k = 3$ .

În lucrarea [2] se studiază convergența metodei optimale și se obțin condiții în care șirurile generate conduc la aproximații bilaterale pentru rădăcina  $\bar{x}$ .

În această lucrare vom controla nodurile de interpolare în (12) cu ajutorul funcțiilor  $p, q$  și  $h$  date de (2) și (3).

Fie  $x_n \in [a, b]$  o aproximație a rădăcinii  $\bar{x}$  a ecuației (1). Notăm cu  $y_n = f(f(x_n))$  și  $\bar{y}_n = f(h(x_n))$ . Din (12) obținem:

$$(13) \quad x_{n+1} = H(y_n, s; \bar{y}_n, k; f^{-1}(0))$$

cu eroarea dată de relația

$$(14) \quad \bar{x} - x_{n+1} = (-1)^{s+k} \frac{[f^{-1}(\eta_n)]^{(s+k)}}{(s+k)!} y_n^s \bar{y}_n^k$$

unde  $\eta_n \in \text{int}(F)$ .

În continuare asupra funcțiilor  $p$  și  $q$  vom admite următoarele ipoteze:

$$\gamma) |p(x) - p(\bar{x})| \leq l_1 |x - \bar{x}|^u, \quad n \geq 1, \quad u \in \mathbb{R}$$

$$\delta) |q(x) - q(\bar{x})| \leq l_2 |x - \bar{x}|^v, \quad v \geq 1, \quad v \in \mathbb{R}$$

Dacă notăm  $M = \sup_{y \in F} |[f^{-1}(y)]^{(s+k)}|$ ,  $m = \sup_{x \in [a, b]} |f'(x)|$ , atunci din (14) obținem

$$|\bar{x} - x_{n+1}| \leq \frac{M m^{s+k} l_1^{s+k} l_2^{sk}}{(s+k)!} |\bar{x} - x_n|^{u(s+k)}$$

de unde rezultă că ordinul de convergență al metodei (13) este cel puțin  $u(s+k)$ .

În cele ce urmează vom studia convergența metodei (13) pentru cazul particular  $s + k = 3$ .

Vom studia aici numai unul din cazurile  $s = 1, k = 2$  sau  $s = 2, k = 1$ .

Fie  $s = 1, k = 2$ , atunci din (13) obținem pentru  $x_{n+1}$  oricare una din următoarele reprezentări:

$$(15) \quad x_{n+1} = p(x_n) - \frac{f(p(x_n))}{[p(x_n), h(x_n); f]} \\ - \frac{[p(x_n), h(x_n), h(x_n); f] f(p(x_n)) f(h(x_n))}{[p(x_n), h(x_n); f]^2 f'(h(x_n))}$$

$$(16) \quad x_{n+1} = h(x_n) - \frac{f(h(x_n))}{[p(x_n), h(x_n); f]} \\ - \frac{[p(x_n), h(x_n), h(x_n); f]f(p(x_n))f(h(x_n))}{[p(x_n), h(x_n); f]^2 f'(h(x_n))}$$

sau

$$(17) \quad x_{n+1} = h(x_n) - \frac{f(h(x_n))}{f'(h(x_n))} - \frac{[p(x_n), h(x_n), h(x_n); f]f^2(h(x_n))}{[p(x_n), h(x_n); f]^2 f'(h(x_n))},$$

pentru care din (14) obținem

$$(18) \quad \bar{x} - x_{n+1} = -\frac{[f^{-1}(\eta_n)]''' f(p(x_n))f^2(h(x_n))}{3!}$$

unde  $\eta_n$  este în interiorul celui mai mic interval ce conține punctele  $0, f(p(x_n)), f(h(x_n))$ .Din faptul că  $f$  este bijectivă și din (7) rezultă că pentru  $\eta_n$  există un unic  $\xi_n \in [a, b]$  pentru care  $\eta_n = f(\xi_n)$  și

$$[f^{-1}(\eta_n)]''' = \frac{3[f''(\eta_n)]^2 - f'(\xi_n), f'''(\xi_n)}{[f'(\xi_n)]^5}.$$

Ținând cont de egalitatea de mai sus, din (18) obținem:

$$(19) \quad \bar{x} - x_{n+1} = -\frac{E_f(\xi_n) f(p(x_n)) f(h(x_n))}{6[f'(\xi_n)]^5}$$

unde am notat cu  $E_f(x)$  funcția  $E_f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  dată de relația

$$(20) \quad E_f(x) = 3[f''(x)]^2 - f'(x)f'''(x)$$

În cele ce urmează, asupra funcțiilor  $f, p$  și  $q$  vom face următoarele ipoteze:

- 1) ecuația (1) are o rădăcină  $\bar{x} \in [a, b]$ ;
- 2)  $f \in C^3([a, b])$ ;
- 3)  $p$  este crescătoare și continuă pe  $[a, b]$ ;
- 4)  $q$  este descrescătoare și continuă pe  $[a, b]$ ;
- 5) ecuațiile (1) și (2) sunt echivalente.

Are loc următoarea teoremă:

**Teorema 2.** Dacă  $x_0 \in [a, b]$  și funcțiile  $f, p$  și  $q$  verifică ipotezele 1)-5) și în plus dacă sunt verificate condițiile:

- i)  $f'(x) > 0$ , pentru orice  $x \in [a, b]$ ;
- ii)  $f''(x) \geq 0$ , pentru orice  $x \in [a, b]$ ;
- iii)  $E_f(x) \geq 0$ , pentru orice  $x \in [a, b]$ ;
- iv)  $f(x_0) < 0$ ;
- v)  $h(x_0) \leq b$  și  $p(x_0) > x_0$ ,

atunci șirurile  $(x_n)_{n \geq 0}$ ,  $(p(x_n))_{n \geq 0}$  și  $(h(x_n))_{n \geq 0}$  generate de oricare una din relațiile (15)-(17) au următoarele proprietăți:

- j) șirul  $(x_n)_{n \geq 0}$  este crescător și mărginit;

- jj) șirul  $(p(x_n))_{n \geq 0}$  este crescător și mărginit;
- jjj) șirul  $(h(x_n))_{n \geq 0}$  este descrescător și mărginit;
- jjv)  $x_n < p(x_n) < x_{n+1} \leq \bar{x} \leq h(x_{n+1}) < h(x_n)$ ,  $n = 0, 1, \dots$ ,
- jjv)  $\bar{x} - x_{n+1} \leq h(x_{n+1}) - x_{n+1}$
- jjv)  $\lim x_n = \lim p(x_n) = \lim h(x_n) = \bar{x}$ .

**Observație.** Funcțiile auxiliare  $p$  și  $q$ , ținând cont de ipotezele i) și ii) ale Teoremei 2 se pot construi astfel:

$$p(x) = x - \frac{f(x)}{f'(b)}$$

și

$$q(x) = x - \frac{f(x)}{f'(a)}.$$

Este ușor de văzut că  $p'(x) \geq 0$  pentru orice  $x \in [a, b]$  și  $q'(x) \leq 0$  pentru orice  $x \in [a, b]$ .Mai mult dacă  $\lambda \geq f'(b)$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ , atunci putem considera funcția  $p$  sub forma:

$$p(x) = x - \frac{f(x)}{\lambda}.$$

Analog dacă  $0 < \mu < f'(a)$  atunci  $q$  poate avea forma

$$q(x) = x - \frac{f(x)}{\mu}.$$

Pentru oricare din funcțiile  $p$  și  $q$  date mai sus sunt verificate ipotezele 3), 4) și 5).

## Bibliografie

- [1] I. Păvăloiu și N. Pop, *Interpolare și aplicații*, Risoprint, Cluj-Napoca, România, 2005.
- [2] I. Păvăloiu, *Optimal algorithm concerning the solving of equations by interpolation*, Research on Theory of Alure, Approximation, Convexity and Optimization, Ed. SRIMA, Cluj-Napoca, 1999, pp. 222-248.
- [3] B.A. Turowicz, *Sur les dérivées d'ordre supérieure d'une fonction inverse*, Ann. Polon. Math., 8(1960), 265-269.