ASUPRA FORMULELOR DE CUADRATURĂ DE TIP GAUSS

de

D. D. STANCU

1. În această lucrare vom face un studiu unitar asupra formulelor de cuadratură de tip Gauss, căutînd să dăm o formă explicită acestor formule într-un caz general. Pe de altă parte, vom prezenta o nouă generalizare a acestor formule care au gradul maxim de exactitate.

2. Să considerăm integrala

$$\int_a^b p(x)f(x)dx, \tag{1}$$

unde $f(x)$ este o funcţie oarecare integrabilă în intervalul (a, b) finit sau infinit, iar $p(x)$ este o funcţie dată astfel încît să existe toate momentele

$$c_n = \int_a^b p(x)x^n dx \ (n = 0, 1, 2, \ldots) \text{ şi } c_0 > 0.$$

Formula de interpolare a lui Lagrange relativă la funcţia $f(x)$ şi la rădăcinile polinomului cu rădăcini distincte

$$l(x) = h(x)\, g(x), \tag{2}$$

unde

$$h(x) = \prod_{i=1}^{n} (x - x_i),\ g(x) = \prod_{k=1}^{p} (x - \gamma_k),\ n \geqq p, \tag{3}$$

este

$$f(x) = L_{n+p-1}(x) + R_{n+p}(x), \tag{4}$$

cu

$$L_{n+p-1}(x) = L\,(x_1, x_2, \ldots, x_n, \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_p;\ f \mid x) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{h(x)g(x)}{(x - x_i)h'(x_i)g(x_i)} f(x_i) + \sum_{k=1}^{p} \frac{h(x)\, g(x)}{(x - \gamma_k)\, h(\gamma_k)g'(\gamma_k)} f(\gamma_k), \tag{5}$$

iar

$$R_{n+p}(x) = l(x)\,[x, x_1, x_2, \ldots, x_n, \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_p;\, f]. \tag{6}$$

3. Dacă se folosește formula de interpolare (4) pentru calculul numeric al integralei (1), se obține o formulă de cuadratură de forma

$$\int_a^b p(x)\, f(x)\, dx = \sum_{i=1}^{n} A_i\, f(x_i) + \sum_{k=1}^{p} B_k\, f(\gamma_k) + \rho(f), \tag{7}$$

unde

$$A_i = \int_a^b \frac{p(x) h(x)\, g(x) dx}{(x - x_i) h'(x_i) g(x_i)},\quad B_k = \int_a^b \frac{p(x)\, h(x)\, g(x)\, dx}{(x - \gamma_k)\, h(\gamma_k)\, g'(\gamma_k)} \tag{8}$$

și

$$\rho(f) = \int_a^b p(x)\, R_{n+p}(x)\, dx. \tag{9}$$

4. Ne punem acum următoarea întrebare: se pot determina nodurile $x_1, x_2, \ldots, x_n$ astfel încît în formula de cuadratură (7) să dispară toți termenii sumei a doua, oricare ar fi $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_p$? Răspunsul este afirmativ și ni-l dă

Teorema 1. Condiția necesară și suficientă ca în formula de cuadratură (7), unde $p = n$, să avem

$$B_1 = B_2 = \ldots = B_n = 0, \tag{10}$$

oricare ar fi $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$, este ca nodurile $x_1, x_2, \ldots, x_n$ să fie cele n rădăcini reale și distincte ale polinomului

$$P_n(x) = \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & \cdots & c_{n-1} & 1 \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_n & x \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ c_n & c_{n+1} & \cdots & c_{2n-1} & x^n \end{vmatrix}, \tag{11}$$

unde

$$c_\nu = \int_a^b p(x)\, x^\nu dx \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots) \tag{12}$$

D e m o n s t r a ț i e. Pentru ca B să fie nuli este necesar, după cum se observă din (8), să avem

$$\int_a^b p(x)\; h(x)\; \frac{g(x)}{x-\gamma_k}\, dx = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Cum $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k$ sînt numere oarecari, rezultă că pentru a avea loc egalitățile (10) este necesar ca

$$\int_a^b p(x)\; h(x)\; Q(x)\; dx = 0,$$

unde $Q(x)$ este un polinom oarecare de gradul $n - 1$. Or, se știe că acest polinom $h(x)$ va trebui să fie egal, afară de un factor constant, cu polinomul (11).

Evident că această condiție este și suficientă pentru a avea egalitățile (10).

Dacă $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sînt rădăcinile polinomului ortogonal (11), rădăcini care se știe că sînt toate reale, distincte și interioare intervalului (a, b), vor dispare coeficienții B_k și în cazul cînd $p < n$.

În aceste condiții se obține formula de cuadratură

$$\int_a^b p(x)\, f(x)\, dx = \sum_{i=1}^{n} A_i\, f(x_i) + \rho(f), \tag{13}$$

de grad de exactitate $2n - 1$.

5. Deoarece coeficienții formulei de cuadratură (13) sînt independenți de $f(x)$ să facem în (13)

$$f(x) = \frac{P_n(x)}{(x - x_i)\, P_n'(x_i)}; \tag{14}$$

se obține imediat

$$A_i = \int_a^b \frac{p(x)\; P_n(x)}{(x - x_i)\; P_n'(x_i)}\, dx, \tag{15}$$

adică coeficienții A_i se exprimă independent de parametri $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_p$.

6. Avînd în vedere că oricare este polinomul $g(x)$ de grad $p \leqq n$, avem

$$g(x) = C P_n(x) + \sum_{j=1}^{n} \frac{P_n(x)\; g(x_j)}{(x - x_j)\; P_n'(x_j)},$$

unde $C \neq 0$ dacă $p = n$ și $C = 0$ dacă $p < n$, polinomul de interpolare (5) se va putea pune sub forma

$$L_{n+p-1}(x) = C \sum_{i=1}^{n} P_n(x) \frac{P_n(x)\; f(x_i)}{(x - x_i)\; P_n'(x_i)\, g(x_i)} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{P_n(x)}{(x - x_i)\; P_n'(x_i)} \cdot \frac{P_n(x)}{(x - x_j)\; P_n'(x_j)}\, \frac{g(x_j)}{g(x_i)}\, f(x_i) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{p} P_n(x) \frac{g(x)\; f(\gamma_k)}{(x - \gamma_k)\; P_n(\gamma_k)\; g'(\gamma_k)}.$$

Înmulțind cu $p(x)$ și integrînd găsim că

$$\int_a^b p(x)\; L_{n+p-1}(x)\; dx = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \int_a^b p(x) \left(\frac{P_n(x)}{(x - x_i) P'_n(x_i)} \right)^2 dx.$$

În felul acesta pentru coeficienții A_i ai formulei de cuadratură (13), pe lîngă expresiile (15), am mai obținut și următoarele

$$A_i = \int_a^b p(x) \left(\frac{P(x)}{(x - x_i)\, P'_n(x_i)} \right)^2 dx. \tag{16}$$

O b s e r v a ț i i. 1°. Se vede de aici că formula de cuadratură (13), care are gradul de exactitate $2n - 1$ și care folosește drept noduri rădăcinile polinomului ortogonal (11), este formula clasică generală de cuadratură de tip Gauss, la care s-a ajuns prin lucrările lui C. F. Gauss [1], C. G. Jacobi [2], E. B. Christoffel [3], F. G. Mehler [4], E. Heine [5], K. A. Possé [6], T. J. Stieltjes [7] și A. Markoff [8, 9].

2°. Expresiile (16), care ne spun că toți coeficienții formulei de cuadratură (13) sînt pozitivi, au fost obținute prima dată de Stieltjes [7].

3°. Marcov [8, 9] a arătat că dacă se folosește polinomul de interpolare al lui Lagrange-Hermite $L(x_1, x_1, x_2, x_2, \ldots, x_n, x_n; f | x)$, unde x_i sînt rădăcinile polinomului (11), se înmulțește cu $p(x)$ și se integrează de la a la b, vor dispare termenii de forma $B_i f'(x_i)$ din formula de cuadratură care se obține. Din lucrarea noastră se observă că această proprietate se menține și într-un caz mai general. În lucrarea [10] am arătat (în cazul $p(x) = 1$) că dacă $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_p$ nu sînt distincți, vor dispare de asemenea din formula de cuadratură respectivă, toți termenii de forma $B_i f^{(r_i - 1)}(\gamma_i)$, unde r_i este ordinul de multiplicitate al lui γ_i. Bineînțeles că proprietatea aceasta se păstrează și în cazul cînd $p(x)$ e oarecare — supusă doar condițiilor arătate la începutul acestei lucrări.

7. Dacă se ia $p = n$ și se consideră cazul limită $\gamma_i = x_i \quad (i = \overline{1, n})$ formula (6) ne conduce la următoarea expresie a restului formulei de cuadratură (13)

$$\rho(f) = \int_a^b p(x)\, \overline{P}^2_n(x)\, [x, x_1, x_1, x_2, x_2, \ldots, x_n, x_n; f]\, dx = $$
$$= \frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!} \int_a^b p(x)\, \overline{P}^2_n(x)\, dx, \tag{17}$$

unde am folosit notațiile

$$\overline{P}_n(x) = \frac{1}{\Delta_{n-1}} P_n(x),\ \Delta_n = \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & \ldots & c_n \\ c_1 & c_2 & \ldots & c_{n+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_n & c_{n+1} & \ldots & c_{2n} \end{vmatrix}. \tag{18}$$

O b s e r v a ț i i. 4°. Polinomul ortogonal (11) a fost înmulțit cu factorul numeric $\frac{1}{\Delta_{n-1}}$ pentru ca x^n din polinomul care ne dă nodurile formulei (13) să aibă coeficientul egal cu 1.

5°. Expresia (17) a restului formulei de cuadratură (13) a fost prima dată obținută de Marcov [8].

8. Rezultatele precedente se pot generaliza. Într-adevăr, dacă se ține seama de expresiile de la (8) ale coeficienților B_k, se constată că pentru a dispare acești coeficienți, în cazul $p < n$, este suficient ca nodurile $x_1, x_2, \ldots x_n$ să fie rădăcinile polinomului (11). E evident că această condiție nu este necesară. De aceea în cazul $p < n$ avem

Teorema 2. Condiția necesară și suficientă ca în formula de cuadratură (7), unde $p \leqq n$, să avem

$$B_1 = B_2 = \ldots = B_p = 0, \tag{10'}$$

oricare ar fi parametri $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_p$, este ca $n - p = s$ noduri $x_1, x_2, \ldots, x_s$ să fie supuse singurei condiții ca $\varphi_s(x) = (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_s)$ să păstreze un semn constant în (a, b), iar celelalte noduri să fie cele $n - s$ rădăcini reale și distincte ale polinomului

$$\frac{1}{\varphi_s(x)} \begin{vmatrix} \Phi_{n-s}(x) & \Phi_{n-s+1}(x) & \ldots & \Phi_n(x) \\ \Phi_{n-s}(x_1) & \Phi_{n-s+1}(x_1) & \ldots & \Phi_n(x_1) \\ \Phi_{n-s}(x_2) & \Phi_{n-s+1}(x_2) & \ldots & \Phi_n(x_2) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \Phi_{n-s}(x_s) & \Phi_{n-s+1}(x_s) & \ldots & \Phi_n(x_s) \end{vmatrix}, \tag{19}$$

unde $\{\Phi_k(x)\}$ este șirul de polinoame ortogonale relative la intervalul (a, b) și ponderea $p(x)$.

D e m o n s t r a ț i e. Polinomul $h(x)$ de la (2) să-l descompunem astfel

$$h(x) = \varphi_s(x) H_{n-s}(x),\ \varphi_s(x) = \prod_{i=1}^{s} (x - x_i),\ H_{n-s}(x) = \prod_{k=s+1}^{n} (x - x_k).$$

Pentru a dispărea toți coeficienții B_k de la (7) se observă că este necesar ca să avem

$$\int_a^b p(x)\, \varphi_s(x)\, H_{n-s}(x)\, Q_{p-1}(x)\, dx = 0,$$

oricare este polinomul $Q_{p-1}(x)$ de grad $p - 1$. Înseamnează că este necesar ca $H_{n-s}(x)$ să fie ortogonal relativ la intervalul (a, b) și ponderea

$$q(x) = p(x)\, \varphi_s(x),$$

cu orice polinom de grad cel mult $p - 1$. Rezultă (vezi de exemplu [14, p. 29]) că $H_{n-s}(x)$ este polinomul (19). E evident că e și suficientă condiția din enunț.

Să notăm cu $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ rădăcinile lui $\varphi_s(x)$ și cu $x_1, x_2, \ldots, x_{n-s}$ rădăcinile polinomului (19).

În acest caz restul formulei de cuadratură (7) este

$$\rho(f) = \int_a^b p(x)\, \varphi_s(x)\, H_{n-s}(x)\, g(x)\, [\alpha_1, \ldots, \alpha_s, x_1, \ldots, x_{n-s}, \gamma_1, \ldots, \gamma_{n-s}, x; f]\, dx.$$

Considerînd cazul limită $\gamma_i \to x_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n - s)$, acesta devine

$$\rho(f) = \int_a^b p(x)\varphi_s(x)H^2{}_{n-s}(x)\,[\alpha_1, \ldots, \alpha_s, x_1, x_1, x_2, x_2, \ldots, x_{n-s}, x_{n-s}, x\,; f]\,dx =$$

$$= \frac{\overset{(2n-s)}{f}(\xi)}{(2n-s)\,!}\int_a^b p(x)\,\varphi_s(x)\,H^2{}_{n-s}(x)\,dx. \tag{20}$$

Se observă că dacă $s = 0$, adică $p = n$, se obţine formula (17) a lui Marcov.

9. În continuare ne vom ocupa de calculul coeficienţilor A_i ai formulei de cuadratură (13).

Să considerăm şirul de polinoame

$$\omega_0(x),\ \omega_1(x),\ \ldots,\ \omega_n(x),\ \ldots$$

ortogonale şi normate, relative la funcţia pondere $p(x)$ şi intervalul (a, b). Se ştie că

$$\omega\ (x) = \frac{1}{\sqrt{\Delta_n \Delta_{n-1}}}\,P_n(x),$$

unde $P_n(x)$ e dat la (11), iar Δ_n la (18).

Să introducem suma

$$K_n\,(t, x) = \sum_{i=o}^{n} \omega_i\,(t)\,\omega_i\,(x) \tag{21}$$

şi să considerăm formula lui Christoffel-Darboux

$$K_{n-1}\,(t, x) = \sqrt{\lambda_n}\,\frac{\omega_n\,(t)\,\omega_{n-1}\,(x) - \omega_n\,(x)\omega_{n-1}\,(t)}{t - x}, \tag{22}$$

unde

$$\lambda_n = \frac{\Delta_{n-2}\Delta_n}{\Delta^2{}_{n-1}} \tag{23}$$

Întrucît

$$\int_a^b p(t)\,K_{n-1}\,(t, x)dt = \sum_{i=o}^{n-1}\omega_i(x)\int_a^b p(t)\,\omega_i\,(t)\,dt = \omega_0{}^2\,c_0 =$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{\Delta_0}}\right)^2 c_0 = 1, \tag{24}$$

formula (22) a lui Christoffel-Darboux ne conduce la egalitatea

$$\int_a^b p\,(t)\,\frac{\omega_n(t)\,\omega_{n-1}(x) - \omega_n(x)\omega_{n-1}(t)}{t - x}\,dt = \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}. \tag{25}$$

Fie $x_1, x_2, \ldots, x_n$ rădăcinile polinomului $\omega_n(x)$, adică şi ale lui $P_n(x)$. Făcînd în (25) $x = x_\nu$ obţinem

$$\int_a^b \frac{p(t)\omega_n(t)}{t - x_\nu}\,dt = \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}\omega_{n-1}(x_\nu)} \tag{26}$$

Pe baza formulei. (15) avem

$$A_\nu = \frac{1}{\omega'_n(x_\nu)}\int_a^b \frac{p(t)\,\omega_n(t)dt}{t - x_\nu}. \tag{27}$$

În felul acesta am reuşit să obţinem următoarele expresii pentru coeficienţii formulei de cuadratură (13)

$$A_\nu = \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}\,\omega'_n(x_\nu)\,\omega_{n-1}(x_\nu)}. \tag{28}$$

Ţinînd seama de (20) şi (23), aceşti coeficienţi se mai pot exprima prin formulele

$$A_\nu = \frac{\Delta^2{}_{n-1}}{P'_n(x_\nu)\,P_{n-1}(x_\nu)}, \tag{29}$$

$P_n(x)$ fiind polinomul ortogonal de la (11).

În felul acesta formula generală de cuadratură de tip Gauss (13) devine

$$\int_a^b p(x)\,f(x)\,dx =$$

$$= \Delta^2{}_{n-1}\sum_{\nu=1}^{n}\frac{f(x_\nu)}{P'_n(x_\nu)P_{n-1}(x_\nu)} + \frac{\overset{(2n)}{f}(\xi)}{(2n)\,!\,\Delta^2{}_{n-1}}\int_a^b p(x)P_n^2(x)\,dx. \tag{30}$$

10. Relativ la această formulă să considerăm cîteva cazuri particulare importante.

Fie mai întîi

$$p(x) = 1,\ a = -1,\ b = +1. \tag{31}$$

Polinoamele ortogonale corespunzătoare sînt polinoamele lui Legendre

$$X_n(x) = \frac{1}{2^n\,.\,n\,!}\,\frac{d^n(x^2 - 1)^n}{dx^n} \tag{32}$$

În acest caz avem polinoamele ortonormate

$$\omega_n(x) = \hat{X}_n\,(x) = \sqrt{\frac{2n+1}{2}}\,X_n(x),$$

iar (vezi de ex. [11, p. 610])

$$\lambda_n = \frac{n^2}{(2n-1)\,(2n+1)}.$$

Formula (28) ne conduce la următoarea evaluare pentru coeficienții formulei de caudratură clasică a lui Gauss

$$A_\nu = \frac{2}{n\, X_n'(x_\nu)\, X_{n-1}(x_\nu)}. \tag{33}$$

Avînd în vedere identitatea cunoscută

$$(1 - x^2)X_n'(x) = n\, X_{n-1}(x) - n\, x\, X_n(x), \tag{34}$$

se obțin imediat formulele

$$A_\nu = \frac{2}{(1 - x_\nu^2)\,[X_n'(x_\nu)]^2}, \tag{35}$$

care se datoresc lui Christoffel [3].

Dar folosind aceiași identitate din (33) obținem

$$A_\nu = \frac{2}{n^2} \cdot \frac{1 - x_\nu^2}{X_{n-1}^2(x_\nu)} \tag{36}$$

Cu acestea, în cazul particular (31), formula de cuadratură (30) devine

$$\int_{-1}^{+1} f(x)\, dx = \frac{2}{n^2}\sum_{\nu=1}^{n} \frac{1 - x_\nu^2}{X_{n-1}^2(x_\nu)}\, f(x_\nu) + 2^{2n+1}\, \frac{(n\,!)^4}{[(2n)\,!]^3}\, \frac{f^{(2n)}(\xi)}{2n+1}. \tag{37}$$

Expresia explicită a restului acestei formule a lui Gauss se datorește lui Marcoff [8].

11. Să considerăm cazul

$$p(x) = e^{-x^2},\ a = -\infty,\ b = +\infty. \tag{38}$$

Polinoamele ortogonale corespunzătoare sînt polinoamele lui Hermite

$$H_n(x) = (-1)^n\, e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}\, e^{-x^2}. \tag{39}$$

În acest caz

$$\omega_n(x) = \hat{H}_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2^n . n\,!\sqrt{\pi}}}\, H_n(x),$$

iar $\lambda_n = n/2$.

Formula (28) devine

$$A_\nu = \frac{2^n \,.\, (n-1)\,!\, \sqrt{\pi}}{H_n'(x_\nu)\, H_{n-1}(x_\nu)}. \tag{40}$$

Avînd în vedere identitatea cunoscută

$$H_n'(x) = 2n\, H_{n-1}(x), \tag{41}$$

se deduce că avem de asemenea

$$A_\nu = 2^{n+1}\, \frac{n\,!\, \sqrt{\pi}}{[H_n'(x_\nu)]^2}. \tag{42}$$

Această expresie a fost prima oară obținută de Deruyts [12]. Aceeași identitate ne conduce la formula

$$A_\nu = \frac{2^{n-1} . (n-1)!\, \sqrt{\pi}}{n\, H_{n-1}^2(x_\nu)}. \tag{43}$$

Formula de cuadratură (30) în acest caz devine

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} f(x)\, dx = 2^{n-1}\, \frac{(n-1)!}{n}\, \sqrt{\pi} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{f(x_\nu)}{H_{n-1}^2(x_\nu)} + \rho(f), \tag{44}$$

unde

$$\rho(f) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^n \,.\, (n+1)(n+2)\ldots 2n}\, f^{(2n)}(\xi).$$

12. În cazul

$$p(x) = x^\alpha e^{-x}\ (\alpha > -1),\ a = 0,\ b = +\infty, \tag{45}$$

polinoamele ortogonale corespunzătoare sînt polinoamele lui Laguerre

$$L_n^{(\alpha)}(x) = e^x\, x^{-\alpha} \frac{d^n}{dx^n}\, (x^{n+\alpha} e^{-x}). \tag{46}$$

Acum avem

$$\lambda_n = n\,(n + \alpha),\ \hat{L}_n^{(\alpha)}(x) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{\Gamma(n+1)\,\Gamma(n+\alpha+1)}}\, L_n^{(\alpha)}(x),$$

unde $\Gamma(\lambda)$ este funcția lui Euler de specia a doua.

Formula (28) în acest caz devine

$$A_\nu = \frac{-\Gamma(n)\,\Gamma(n+\alpha)}{L_{n-1}^{(\alpha)}(x_\nu)\left[\dfrac{d}{dx}\, L_n^{(\alpha)}(x)\right]_{x=x_\nu}}. \tag{47}$$

Să considerăm acum următoarea identitate (vezi de ex. [14, p. 98]).

$$x\, \frac{d}{dx} L_n^{(\alpha)}(x) = n\, L_n^{(\alpha)}(x) - n\,(n+\alpha)\, L_{n-1}^{(\alpha)}(x). \tag{48}$$

Ținînd seama că acum x este o rădăcină a polinomului (46) și folosind această identitate, expresiile (47) devin

$$A_\nu = \frac{\Gamma(n+1)\,\Gamma(n+\alpha+1)}{x_\nu \left[\dfrac{d}{dx} L_n^{(\alpha)}(x)\right]^2_{x=x_\nu}}. \tag{49}$$

Această formulă a fost obţinută, pe o cale cu totul diferită, de asemenea de Deruyts [12].

Folosind aceeaşi identitate (48) se obţin şi evaluările

$$A_\nu = \frac{\Gamma(n)\,\Gamma(n+\alpha)}{n(n+\alpha)} \cdot \frac{x_\nu}{[L_{n-1}^{(\alpha)}(x_\nu)]^2}. \tag{50}$$

Astfel, în cazul (45), formula de cuadratură (30) se poate scrie

$$\int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} f(x)\,dx = \frac{\Gamma(n)\Gamma(n+\alpha)}{n(n+\alpha)} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{x_\nu f(x_\nu)}{[L_{n-1}^{(\alpha)}(x_\nu)]^2} +$$

$$+ \frac{\Gamma(n+1)\,\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(2n+1)} f^{(2n)}(\xi). \tag{51}$$

13. Să ne mai ocupăm, în sfîrşit, de cazul

$$p(x) = (1-x)^\alpha (1+x)^\beta\ (\alpha, \beta > -1),\ a = -1,\ b = +1. \tag{52}$$

Polinoamele ortogonale corespunzătoare acestui caz sînt polinoamele lui Jacobi

$$J_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{1}{2^n . n!} (x-1)^{-\alpha} (x+1)^{-\beta} \frac{d^n}{dx^n} [(x-1)^{n+\alpha}(x+1)^{n+\beta}]. \tag{53}$$

Normînd aceste polinoame se află

$$\omega_n(x) = \hat{J}_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \sqrt{\frac{2n+\alpha+\beta+1}{2^{\alpha+\beta+1}}} \sqrt{\frac{\Gamma(n+1)\,\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}{\Gamma(n+\alpha+1)\,\Gamma(n+\beta+1)}}\, J_n^{(\alpha,\beta)}(x). \tag{54}$$

Avînd în vedere că în acest caz avem (vezi de ex. [11, p. 411]),

$$\lambda_n = \frac{4n\,(n+\alpha)\,(n+\beta)\,(n+\alpha+\beta)}{(2n+\alpha+\beta-1)\,(2n+\alpha+\beta)^2\,(2n+\alpha+\beta+1)},$$

coeficienţii (28) devin

$$A_\nu = 2^{\alpha+\beta} \frac{(2n+\alpha+\beta)\,\Gamma(n+\alpha)\,\Gamma(n+\beta)}{\Gamma(n+1)\,\Gamma(n+\alpha+\beta+1)\left[\frac{d}{dx} J_n^{(\alpha,\beta)}(x)\right]_{x_\nu} J_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x_\nu)}. \tag{55}$$

Pentru a obţine alte evaluări ne vom folosi de o importantă identitate pe care o verifică polinoamele lui Jacobi (vezi de ex [14, p. 71])

$$(2n+\alpha+\beta)(1-x^2)\frac{d}{dx} J_n^{(\alpha,\beta)}(x) + n\,[\beta-\alpha+(2n+\alpha+\beta)x]\,J_n^{(\alpha,\beta)}(x) -$$

$$-2\,(n+\alpha)\,(n+\beta)\,J_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x) = 0. \tag{56}$$

Făcînd în (56) $x = x_\nu$, unde x_ν, e o rădăcină a polinomului (53), obţinem

$$\frac{2(n+\alpha)(n+\beta)}{2n+\alpha+\beta} J_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x) = (1-x_\nu^2)\left[\frac{d}{dx} J_n^{(\alpha,\beta)}(x)\right]_{x=x_\nu} \tag{57}$$

Cu acestea expresiile (55) ale coeficienţilor A_ν se mai pot pune sub forma

$$A_\nu = 2^{\alpha+\beta+1} \frac{\Gamma(n+\alpha+1)\,\Gamma(n+\beta+1)}{\Gamma(n+1)\,\Gamma(n+\alpha+\beta+1)} \cdot \frac{1}{(1-x_\nu^2)\left[\frac{d}{dx} J_n^{(\alpha,\beta)}(x)\right]^2_{x=x_\nu}}. \tag{58}$$

Această formulă se datoreşte lui Mehler [4].

Deducerea pe care am dat-o noi pentru aceste expresii ale coeficienţilor este foarte mult simplificată graţie utilizării identităţii (56).

Ţinînd seama de (57), coeficienţii (55) se pot exprima şi prin formulele

$$A_\nu = 2^{\alpha+\beta-1} \frac{(2n+\alpha+\beta)^2\,\Gamma(n+\alpha)\,\Gamma(n+\beta)}{(n+\alpha)\,(n+\beta)\,\Gamma(n+1)\Gamma(n+\alpha+\beta+1)} \cdot$$

$$\cdot \frac{1-x_\nu^2}{[J_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x_\nu)]^2}. \tag{59}$$

Restul formulei de cuadratură de tip Gauss, care corespunde acestui caz, se poate pune sub forma

$$\rho(f) = 2^{2n+\alpha+\beta+1} \frac{\Gamma(n+1)\,\Gamma(n+\alpha+1)\,\Gamma(n+\beta+1)\,\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}{\Gamma(2n+1)\,\Gamma(2n+\alpha+\beta+1)\,\Gamma(2n+\alpha+\beta+2)} f^{(2n)}(\xi). \tag{60}$$

În cazul polinoamelor ultrasferice ($\alpha = \beta$) formula de cuadratură (30) devine

$$\int_{-1}^{+1} (1-x^2)^\alpha f(x)\,dx =$$

$$= 2^{2\alpha+1} \frac{[\Gamma(n+\alpha)]^2}{\Gamma(n+1)\,\Gamma(n+2\alpha+1)} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1-x_\nu^2}{J_{n-1}^2(x_\nu)} f(x_\nu) + \rho(f),$$

unde restul are, pe baza formulei (60), următoarea expresie

$$\rho(f) = 2^{2n+2\alpha+1} \frac{\Gamma(n+1)\,[\Gamma(n+\alpha+1)]^2\,\Gamma(n+2\alpha+1)}{\Gamma(2n+1)\,\Gamma(2n+2\alpha+1)\,\Gamma(2n+2\alpha+2)} f^{(2n)}(\xi),$$

14. Într-o lucrarea viitoare ne vom ocupa de probleme analoage în cazul formulelor de cuadratură de tip Gauss generalizate de felul celor studiate recent de P. Turan [15], L. Ciacalov [16], T. Popoviciu [17] şi de noi [18].

Catedra de analiză
Universitatea ,,V. Babeş''

BIBLIOGRAFIE

1. C. F. Gauss, Methodus nova integralium valores per approximationem inveniendi. Werke Vol. 3, pp. 163–196.
2. C. G. Jacobi, Uber Gauss'neue Methode, die Werthe der Integrale näherungsweise zu finden. Journ. f. d. reine u. angew. Math. vol. 1, 1826, pp. 301–308.
3. E. B. Christoffel, Uber die Gaussische Quadratur und eine Verallgemeinerung derselben Ibid., vol. 55, 1858, pp. 61–82.
4. F. G. Mehler, Bemerkungen zur Theorie der mechanischen Quadraturen. Ibid., vol. 63, 1864, pp. 152–157.
5. E. Heine, Handbuch der Kugelfunctionen. Vol. 1, 1878.
6. K. A. Possé, Sur les quadratures, Nouv. Ann. de Math. vol. 14, 1875, pp. 49–62.
7. T. J. Stieltjes, Quelques recherches sur la théorie des quadratures dites mécaniques. Ann. de l'Ec. Norm. vol. 1, 1884, pp. 409–426.
8. A. Markoff, Sur la méthode de Gauss pour le calcul approché des intégrales, Math. Ann. vol. 25, 1885, pp. 427–432.
9. A. Markoff, Differenzenrechnung. Leipzig, 1896.
10. D. D. Stancu, Generalizarea unor formule de interpolare pentru funcțiile de mai multe variabile și unele considerații asupra formulei de integrare numerică a lui Gauss. Buletin Științific, Acad. R.P.R., vol. 9, nr. 2, 1957.
11. I. P. Natanson, Constructivnaia teoria funcții. Moskva, 1949.
12. J. Deruyts, Sur le calcul approché de certaines integrales définies. Bull, de l'Acad. de Belgique, vol. 2, 1886, pp. 301–311.
13. V. L. Gonciarov, Teoria interpolirovania i priblijenia funcții. Moskva, 1954.
14. G. Szegö, Orthogonal polynomials. Amer. Math. Soc. Colloq., Public., vol 23, 1939.
15. P. Turan, On the theory of the mechanical quadrature. Acta Scient. Math. vol. 12, 1950, pp. 30–37.
16. L. Ciacalov, Obșci cvadraturni formuli ot Gausov tip. Izvestia Mat. Inst. Bîlgarsca Acad., vol. 1, 1954, pp. 67–81.
17. T. Popoviciu, Asupra unei generalizări a formulei de integrare numerică a lui Gauss. Studii și Cercetări Științifice Iași, vol. 6, 1955, pp. 29–57.
18. D. D. Stancu, O metodă pentru construirea de formule de cuadratură de grad înalt de exactitate. Comunicările Acad. R.P.R. t. 8, nr. 4, 1958, pp. 349 – 358.

О ФОРМУЛАХ КВАДРАТУРЫ ТИПА ГАУССА

(Краткое содержание)

Используя для численного вычисления интеграла (1) формулу интерполяции (4), с $n+p$ различных узлов, автор получил формулу квадратуры (7), потом он доказал, в случае $p=n$ что для того, чтобы в формуле (7) было выполнено условие (10), при любых $\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_n$ необходимо и достаточно, чтобы $x_1, x_2, \ldots, x_n$ были n действительными и различными корнями многочлена (11). Выбирая таким образом узлы x_i. автор доходит до формулы квадратуры типа Гаусса (13) со степенью точности $2n-1$. Коэффициенты этой формулы даны формулами (15) или (17) — последние принадлежат Стилтьесу (7). Если берём $p=n$ и рассматривается предельный случай $\gamma_i \to x_i$ $(i=\overline{1, n})$ формула (6) ведёт к выражению (17) для остаточного члена квадратурной формулы (13), выражение, которое было впервые получено Марковым (8).

В случае $n \leqq p$ получается необходимое и достаточное условие, чтобы иметь (10′) (указанное выше условие являясь лишь достаточным), если $n-p=s$ узлов x_i подчиняются единственному условию, чтобы $\varphi_s(x) = (x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_s)$ сохранила постоянный знак в (a, b), а остальные узлы являются $n-s$ действительных и различных корней многочлена (19), в котором $\Phi^k(x)$ является ортогональным многочленом, относительно интервала (a, b) и $p(x)$ с любым многочленом со степенью не более к-1. Остаточный член формулы квадратуры (13) дан в этом случае формулой (20), обобщающей формулу (7) Маркова.

Используя формулу (22) Кристоффеля-Дарбу были выведены, в случае $n=p$, выражения (29) для коэффициентов формулы (13), $\triangle_n$ данный в (18). Таким образом, классическая общая формула квадратуры типа Гаусса может быть записана кратко и точно в форме (30).

Дальше показывается что происходит с формулами (29) в случаях классических ортогональных многочленов, получив при этом очень легко формулы (35) Кристоффеля [3], (42) и (49) Дерюйта [12] и (58) Мелера [4]. Вместе с тем даются и некоторые данные, отличающиеся от формул этих авторов.

SUR LES FORMULES DE QUADRATURE DU TYPE GAUSS

(Résumé)

C'est en utilisant pour le calcul numérique de l'intégrale (1) la formule d'interpolation (4) avec $n+p$ noeuds distincts qu'on a obtenu la formule de quadrature (7). Puis on a démontré, dans le cas $p=n$, que, pour que soit remplie dans la formule (7) la condition (10), quels que soient $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$, il est nécessaire et suffisant que $x_1, x_2, \ldots, x_n$ soient les n racines réelles et distinctes du polynome (11). En choisissant de cette manière les noeuds x_i, on arrive à la formule de quadrature du type Gauss (13), de degré d'exactitude $2n-1$. Les coefficients de cette formule sont donnés par les formules (15) ou (17) — ces dernières étant dues à Stieltjes [7]. Si l'on prend $p=n$ et que l'on considère le cas limite $\gamma_i \to x_i$ $(i=\overline{1, n})$, la formule (6) nous conduit à l'expression (17) pour le reste de la formule de quadrature (13), expression qui a été obtenue pour la première fois par Marcov [8].

Dans le cas $p \leqq n$ on obtient une condition nécessaire et suffisante pour avoir (10′) (la condition donnée plus haut n'étant que suffisante) si $n-p=s$ noeuds x_i se soumettent à la seule condition que $\varphi_s(x) = (x-x_1) \cdot (x-x_2) \ldots (x-x_s)$ conserve un signe constant dans (a, b); en outre les autres noeuds sont les $n-s$ racines réelles et distinctes du polynôme (19), où $\Phi_k(x)$ est le polynome orthogonal, relatif à l'intervalle (a, b) et à la fonction poids $p(x)$, avec n'importe quel polynome de degré égal au plus à $k-1$. Le reste de la formule de quadrature (13) est donné en ce cas par la formule (20), qui généralise la formule (17) de Marcov.

En utilisant la formule (22) de Christoffel-Darboux, on a déduit dans le cas où $p=n$, les expressions explicites (29), pour les coefficients de la

formule (13), Δ_n étant donné par (18). Ainsi, la formule générale classique de quadrature du type Gauss peut être écrite avec concision et très explicitement sous la forme (30).

On a montré ensuite ce que deviennent les formules (2[illegible]), dans les cas de polynomes orthogonaux classiques, en obtenant très facilement à cette occasion les formules (35) de Christoffel [3], (42) (49) de Deruyts [12] et (58) de Mehler [4]. En même temps on a donné aussi quelques évaluations distinctes de celles que représentent les formules de ces auteurs.