IP. Cluj 1980—1958.

ACADEMIA R. P. R. FILIALA IAŞI
STUDII ŞI CERCETĂRI ŞTIINŢIFICE
MATEMATICĂ
Anul IX (1958), Fasc. 1

(12.)

ASUPRA INTEGRĂRII NUMERICE A FUNCŢIILOR DE DOUĂ VARIABILE

DE

D. D. STANCU

Comunicare prezentată la 15 octombrie 1958 în şedinţa Filialei Iaşi a Academiei R. P. R.

§ 1. Asupra restului unei formule generale de cubatură

1. În această lucrare ne vom ocupa de construirea unei formule generale de cubatură de forma

$$\iint_D f(x, y)\, dx\, dy = \sum_{i=1}^{m} \sum_{\nu=0}^{r_i-1} \sum_{k=1}^{n} \sum_{\mu=0}^{s_k-1} C_{i\nu k\mu} \left(\frac{\partial^{\nu+\mu} f(x, y)}{\partial x^\nu\, \partial y^\mu} \right)_{\substack{x=x_i \\ y=y_k}} + R[f], \tag{1}$$

pentru domeniul dreptunghiular

$$D : a \leqq x \leqq b, \ c \leqq y \leqq d. \tag{2}$$

Vom presupune că punctele care intervin mai sus, $M_{i,k}(x_i, y_k)$, unde $i = \overline{1, m}$, $k = \overline{1, n}$, sînt distincte şi interioare dreptunghiului D, iar funcţia $f(x, y)$ are, bine înţeles în D, derivate parţiale continue de toate ordinele de care avem nevoie, cel puţin pe punctele unde ele vor interveni în mod efectiv. $R[f]$ este termenul complementar al formulei.

Dacă se presupune că nodurile $N_{i,k}^{\nu,\mu}(x_i, y_k)$ sînt date, împreună cu ordinele lor de multiplicitate (r_i, s_k), se pot determina în mai multe feluri coeficienţii $C_{i\nu k\mu}$, astfel încît formula de cubatură (1) să aibă gradul de exactitate $(M - 1\,;\, N - 1)$, unde

$$M = r_1 + r_2 + \cdots + r_m, \quad N = s_1 + s_2 + \cdots + s_n. \tag{3}$$

În această lucrare ne vom ocupa de două asemenea metode de calcul al coeficienţilor formulei (1); de asemenea vom arăta şi două evaluări distincte pentru termenul complementar $R[f]$.

2. La o formulă de cubatură de tipul (1) se poate ajunge folosind metoda interpolatorică. Într-adevăr, să considerăm formula de interpolare

$$f(x, y) = L(x, y\,; f) + r(x, y\,; f), \tag{4}$$

unde

$$L(x,y\,;\,f)=L\left(\begin{matrix}x_1, & x_2, & \ldots, & x_m\,; & y_1, & y_2, & \ldots, & y_n\,;\\ r_1 & r_2 & & r_m & s_1 & s_2 & & s_n\end{matrix}\; f \,\middle|\, \begin{matrix}x\\ y\end{matrix}\right)$$

este polinomul de interpolare de gradul $(M-1,\ N-1)$ relativ la funcţia $f(x,y)$ şi reţeaua multiplă de noduri pusă în evidenţă. Acest polinom are următoarea expresie [1])

(5) $$L(x,y\,;\,f)=\sum_{i=0}^{m}\sum_{\nu=0}^{r_i-1}\sum_{k=1}^{n}\sum_{\mu=0}^{s_k-1} l_{i,\nu}(x)\,h_{k,\mu}(y)\left(\frac{\partial^{\nu+\mu}f(x,y)}{\partial x^{\nu}\,\partial y^{\mu}}\right)_{\substack{x=x_i\\ y=y_k}},$$

unde polinoamele fundamentale de interpolare se pot pune, de exemplu, sub formele

(6)
$$l_{i,\nu}(x)=\frac{(x-x_i)^{\nu}}{\nu\,!}\sum_{j=0}^{r_i-\nu-1}\left[\frac{(x-x_i)^j}{j\,!}\left(\frac{1}{u_i(x)}\right)^{(j)}_{x_i}\right]u_i(x),$$
$$h_{k,\mu}(y)=\frac{(y-y_k)^{\mu}}{\mu\,!}\sum_{l=0}^{s_k-\mu-1}\left[\frac{(y-y_k)^l}{l\,!}\left(\frac{1}{v_k(y)}\right)^{(l)}_{y_k}\right]v_k(y)\,;$$

aici am folosit notaţiile

(7)
$$g(x)=\prod_{i=1}^{m}(x-x_i)^{r_i},\ h(y)=\prod_{k=1}^{n}(y-y_k)^{s_k}$$
$$g_i(x)=\frac{g(x)}{(x-x_i)^{r_i}},\quad h_k(y)=\frac{h(y)}{(y-y_k)^{s_k}}$$
$$\Big(\varphi(t)\Big)^{(p)}_{\alpha}=\frac{d^p\varphi(t)}{dt^p}\bigg|_{t=\alpha}=\varphi^{(p)}(\alpha).$$

Restul formulei de interpolare (4) se poate exprima cu ajutorul diferenţelor divizate parţiale astfel:

(8)
$$r(x,y\,;\,f)=g(x)\left[\begin{matrix}x_1, & \ldots, & x_m, & x\\ r_1 & & r_m & 1\end{matrix}\,;f\right]+h(y)\left[\begin{matrix}y_1, & \ldots, & y_n\,; & y\\ s_1 & & s_n & 1\end{matrix}\,;f\right]-$$
$$-\,g(x)\,h(y)\left[\begin{matrix}x_1, & \ldots, & x_m, & x\,; & y_1, & \ldots, & y_n, & y\\ r_1 & & r_m & 1 & s_1 & & s_n & 1\end{matrix}\,;f\right].$$

3. Dacă pentru calculul integralei duble care figurează la (1) se foloseşte formula de interpolare (4) se obţine o formulă de cubatură tocmai de forma (1), unde

(9) $$C_{i\nu k\mu}=A_{i,\nu}\cdot B_{k,\mu},$$

iar

(10) $$A_{i,\nu}=\int_a^b l_{i,\nu}(x)\,dx,\quad B_{k\mu}=\int_c^d h_{k,\mu}(y)\,dy.$$

[1]) Pentru documentare recomandăm a se vedea lucrările [1, 2].

O primă expresie a restului formulei (1) este dată de

(11) $$R[f]=\iint_D r(x,y\,;\,f)\,dx\,dy.$$

4. Pentru calculul coeficienţilor $A_{i,\nu}$, $B_{k,\mu}$ se poate folosi o metodă a acad. bulgar L. Ciacalov [3, 4] completată de noi în lucrarea [5]. În acest scop să considerăm funcţiile auxiliare

(12) $$\varphi_i(x)=\frac{1}{g_i(x)}\int_a^b\frac{g(x)-g(t)}{x-t}\,dt,\quad \psi_k(y)=\frac{1}{h_k(y)}\int_c^d\frac{h(y)-h(z)}{y-z}\,dz.$$

Dacă avem în vedere formulele (6) şi (10), precum şi calculele pe care le-am făcut în lucrarea [5], se obţin următoarele formule

(13)
$$A_{i,\nu}=\frac{1}{\nu\,!\,(r_i-\nu-1)\,!}\,\varphi_i^{(r_i-\nu-1)}(x_i)\ \ (\nu=\overline{0,r_i-1}\,;\,i=\overline{1,m})$$
$$B_{k,\mu}=\frac{1}{\mu\,!\,(s_k-\mu-1)\,!}\,\psi_k^{(s_k-\mu-1)}(y_k)\ \ (\mu=\overline{0,s_k-1}\,;\,k=\overline{1,n}).$$

5. Vom arăta acum cum se poate obţine o expresie integrală a restului formulei de cubatură (1). Cu acest prilej vom generaliza o metodă interesantă folosită în cazul unidimensional de L. Ciacalov [3, 4].

În acest scop să introducem următoarea funcţie auxiliară:

(14)
$$g(x,y)=\int_a^x\frac{(x-t)^{M-1}}{(M-1)\,!}\,\frac{\partial^M f(t,y)}{\partial t^M}\,dt+\int_c^y\frac{(y-z)^{N-1}}{(N-1)\,!}\,\frac{\partial^N f(x,z)}{\partial z^N}\,dz-$$
$$-\int_a^x\int_c^y\frac{(x-t)^{M-1}(y-z)^{N-1}}{(M-1)\,!\,(N-1)\,!}\,\frac{\partial^{M+N}f(t,z)}{\partial t^M\,\partial z^N}\,dt\,dz.$$

Avînd în vedere că

$$\frac{\partial^M g(x,y)}{\partial x^M}=\frac{\partial^M f(x,y)}{\partial x^M},\ \frac{\partial^N g(x,y)}{\partial y^N}=\frac{\partial^N f(x,y)}{\partial y^N},\ \frac{\partial^{M+N}g(x,y)}{\partial x^M\partial y^N}=\frac{\partial^{M+N}f(x,y)}{\partial x^M\partial y^N},$$

rezultă că funcţia

$$\delta(x,y)=f(x,y)-g(x,y)$$

reprezintă un polinom de gradul $(M-1,\ N-1)$.

Dacă introducem notaţiile

(15) $$I[f]=\iint_D f(x,y)\,dx\,dy,\quad \Phi[f]=I[f]-R[f]$$

și avem în vedere că formula de cubatură (1) are gradul de exactitate $(M-1,\ N-1)$, avem

$$I[\delta]-\Phi[\delta]=I[f-g]-\Phi[f-g]=0;$$

rezultă că

$$R[f]=I[f]-\Phi[f]=I[g]-\Phi[g]. \tag{16}$$

Vom evalua acum cei doi termeni ai ultimei diferențe. Ținînd seama de expresia lui $g(x,y)$ și aplicînd formula lui Dirichlet, obținem

$$\begin{aligned}
I[g]&=\int_a^b dx\int_c^d dy\int_a^x\frac{(x-t)^{M-1}}{(M-1)!}\,\frac{\partial^M f(t,y)}{\partial t^M}\,dt+\int_a^b dx\int_c^d dy\int_c^y\frac{(y-z)^{N-1}}{(N-1)!}\,\frac{\partial^N f(x,z)}{\partial z^N}\,dz-\\
&-\int_a^b dx\int_c^d dy\int_a^x dt\int_c^y\frac{(x-t)^{M-1}(y-z)^{N-1}}{(M-1)!\,(N-1)!}\,\frac{\partial^{M+N} f(t,z)}{\partial t^M\,\partial z^N}\,dz=\\
&=\int_c^d dy\int_a^b\frac{(b-t)^M}{M!}\,\frac{\partial^M f(t,y)}{\partial t^M}\,dt+\int_a^b dx\int_c^d\frac{(d-z)^N}{N!}\,\frac{\partial^N f(x,z)}{\partial z^N}\,dz-\\
&-\int_a^b dt\int_c^d\frac{(b-t)^M(d-z)^N}{M!\,N!}\,\frac{\partial^{M+N} f(t,z)}{\partial t^M\,\partial z^N}\,dz.
\end{aligned}\tag{17}$$

Dacă alături de notațiile de la (15) mai introducem și următoarele

$$\begin{aligned}
&g_1(x,y)=\int_a^x\frac{(x-t)^{M-1}}{(M-1)!}\,\frac{\partial^M f(t,y)}{\partial t^M}\,dt,\quad g_2(x,y)=\int_c^y\frac{(y-z)^{N-1}}{(N-1)!}\,\frac{\partial^N f(x,z)}{\partial z^N}\,dz,\\
&g_3(x,y)=\int_a^x\int_c^y\frac{(x-t)^{M-1}(y-z)^{N-1}}{(M-1)!\,(N-1)!}\,\frac{\partial^{M+N} f(t,z)}{\partial t^M\,\partial z^N}\,dt\,dz,
\end{aligned}\tag{18}$$

putem scrie succesiv

$$\begin{aligned}
\Phi[g_1]&=\sum_{k=1}^{n}\sum_{\mu=0}^{s_k-1}B_{k,\mu}\sum_{i=1}^{m}\sum_{\nu=0}^{r_i-1}A_{i,\nu}\int_a^{x_i}\frac{(x_i-t)^{M-\nu-1}}{(M-\nu-1)!}\,\frac{\partial^{M+\mu} f(t,y_k)}{\partial t^M\,\partial y_k^{\mu}}\,dt\\
&=\sum_{k=1}^{n}\sum_{\mu=0}^{s_k-1}B_{k,\mu}\int_a^b u(t)\,\frac{\partial^{M+\mu} f(t,y_k)}{\partial t^M\,\partial y_k^{\mu}}\,dt=\\
&=\int_a^b u(t)\sum_{k=1}^{n}\sum_{\mu=0}^{s_k-1}B_{k,\mu}\,\frac{\partial^{M+\mu} f(t,y_k)}{\partial t^M\,\partial y_k^{\mu}}\,dt,
\end{aligned}$$

unde

$$u(t)=\sum_{i=p}^{m}\sum_{\nu=0}^{r_i-1}A_{i,\nu}\frac{(x_i-t)^{M-\nu-1}}{(M-\nu-1)!}=\sum_{i=p}^{m}\sum_{\nu=0}^{r_i-1}\frac{\varphi_i^{(r_i-\nu-1)}(x_i)}{\nu!\,(r_i-\nu-1)!}\,\frac{(x_i-t)^{M-\nu-1}}{(M-\nu-1)!}\tag{19}$$

dacă $t\in[x_{p-1},x_p]$ ($p=\overline{1,m}$; $x_0=a$) și $u(t)\equiv 0$ dacă $t\,\overline{\in}\,[a,x_m]$.

Să considerăm acum formula de cuadratură

$$\int_c^d G(y)\,dy=\sum_{k=1}^{n}\sum_{\mu=0}^{s_k-1}B_{k,\mu}G^{(\mu)}(y_k)+\int_c^d\left\{\frac{(d-z)^N}{N!}-v(z)\right\}G^{(N)}(z)\,dz,\tag{20}$$

unde

$$v(z)=\sum_{k=q}^{n}\sum_{\mu=0}^{s_k-1}B_{k,\mu}\frac{(y_k-z)^{N-\mu-1}}{(N-\mu-1)!}=\sum_{k=q}^{n}\sum_{\mu=0}^{s_k-1}\frac{\psi_k^{(s_k-\mu-1)}(y_k)}{\mu!\,(s_k-\mu-1)!}\,\frac{(y_k-z)^{N-\mu-1}}{(N-\mu-1)!}\tag{21}$$

dacă $z\in[y_{q-1},y_q]$ ($q=\overline{1,n}$; $y_0=c$) și $v(z)\equiv 0$ dacă $z\,\overline{\in}\,[c,y_n]$.

Avînd în vedere că toți coeficienții $B_{k,\mu}$ ai formulei de cuadratură (20) sînt independenți de funcția $G(y)$, să punem

$$G(y)=\frac{\partial^M f(t,y)}{\partial t^M},$$

unde t este un parametru; rezultă că

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}\sum_{\mu=0}^{s_k-1}B_{k,\mu}\frac{\partial^{M+\mu} f(t,y_k)}{\partial t^M\,\partial y_k^{\mu}}&=\int_c^d\frac{\partial^M f(t,y)}{\partial t^M}\,dy-\\
&-\int_c^d\left\{\frac{(d-z)^N}{N!}-v(z)\right\}\frac{\partial^{M+N} f(t,z)}{\partial t^M\,\partial z^N}\,dz.
\end{aligned}$$

Cu acestea formula (18) va deveni

$$\begin{aligned}
\Phi[g_1]&=\iint_D u(t)\,\frac{\partial^M f(t,y)}{\partial t^M}\,dt\,dy-\iint_D u(t)\,\frac{(d-z)^N}{N!}\,\frac{\partial^{M+N} f(t,z)}{\partial t^M\,\partial z^N}\,dt\,dz+\\
&+\iint_D u(t)\,v(z)\,\frac{\partial^{M+N} f(t,z)}{\partial t^M\,\partial z^N}\,dt\,dz.
\end{aligned}\tag{22}$$

În mod absolut analog se găsește că

$$\begin{aligned}
\Phi[g_2]&=\iint_D v(t)\,\frac{\partial^N f(x,z)}{\partial z^N}\,dt\,dz-\iint_D v(z)\,\frac{(b-t)^M}{M!}\,\frac{\partial^{M+N} f(t,z)}{\partial t^M\,\partial z^N}\,dt\,dz+\\
&+\iint_D u(t)\,v(z)\,\frac{\partial^{M+N} f(t,z)}{\partial t^M\,\partial z^N}\,dt\,dz.
\end{aligned}\tag{23}$$

Dacă avem în vedere expresia $g_3(xy)$ şi aplicăm de două ori formula lui Dirichlet, vom obţine

$$\Phi[g_3] = \iint_D u(t)\, v(z) \frac{\partial^{M+N} f(t, z)}{\partial t^M \partial z^N} dt\, dz. \tag{24}$$

Ţinînd seama de formulele (16) — (24), avem

$$R[f] = I[g] - \Phi[g] = I[g] - \Phi[g_1] - \Phi[g_2] + \Phi[g_3]$$

şi apoi

$$R[f] = \iint_D U(t) \frac{\partial^M f(t, y)}{\partial t^M} dt\, dy + \iint_D V(z) \frac{\partial^N f(x, z)}{\partial z^N} dx\, dz -$$

$$- \iint_D U(t)\, V(z) \frac{\partial^{M+N} f(t, z)}{\partial t^M \partial z^N} dt\, dz,$$

unde

$$U(t) = \frac{(b-t)^M}{M!} - u(t),\quad V(z) = \frac{(d-z)^N}{N!} - v(z) \tag{25}$$

sînt funcţii continue pe intervalele lor de definiţie.

În felul acesta am obţinut pentru restul formulei de cubatură (1) evaluarea

$$R[f] = \iint_D \left[U(t) \frac{\partial^M f(t, z)}{\partial t^M} + V(z) \frac{\partial^N f(t, z)}{\partial z^N} - \right.$$

$$\left. - U(t)\, V(z) \frac{\partial^{M+N} f(t, z)}{\partial t^M \partial z^N} \right] dt\, dz \tag{26}$$

care ni se pare destul de interesantă.

6. Să dăm acum două exemple simple.

1°. Dacă $m = n = 2, r_1 = r_2 = s_1 = s_2 = 1, x_1 = a, x_2 = b, y_1 = c, y_2 = d$, formula (1) se reduce la

$$\iint_D f(x, y)\, dx\, dy = A_1 B_1 f(a, c) + A_2 B_1 f(b, c) + A_1 B_2 f(a, d) +$$
$$+ A_2 B_2 f(b, d) + R[f].$$

În acest caz avem

$$g(x) = (x-a)(x-b),\ h(y) = (y-c)(y-d)$$

$$\varphi_1(x) = \frac{b-a}{2} \frac{2(x-a-b}{x-b},\ \varphi_2(x) = \frac{b-a}{2} \frac{2x-a-b}{x-a},$$

$$\Psi_1(y) = \frac{d-c}{2} \frac{2y-c-d}{y-d},\ \Phi_2(y) = \frac{d-c}{2} \frac{2y-c-d}{y-c}, \tag{27}$$

$$A_1 = \varphi_1(a) = A_2 = \varphi_2(b) = \frac{b-a}{2},\ B_1 = \psi_1(c) = B_2 = \psi_2(d) = \frac{d-c}{2};$$

$$U(t = \frac{(b-t)^2}{2} - \frac{b-a}{2}(b-t) = \frac{(t-a)(t-b)}{2},\ V(z) = \frac{(z-c)(z-d)}{2}.$$

Formula de cubatură care se obţine în acest caz este

$$\iint_D f(x, y)\, dx\, dy = \frac{(b-a)(d-c)}{4} \Big[f(a, c) + f(b, c) + \tag{28}$$
$$+ f(a, d) + f(b, d) \Big] + R[f],$$

unde

$$R[f] = \frac{1}{2} \iint_D \left[g(t) \frac{\partial^2 f(t, z)}{\partial t^2} + h(z) \frac{\partial^2 f(t, z)}{\partial z^2} - \frac{1}{2} g(t)\, h(z) \frac{\partial^4 f(t, z)}{\partial t^2 \partial z^2} \right] dt\, dz, \tag{29}$$

polinoamele $g(t)$ şi $h(z)$ avînd expresiile de la (27).

Dacă se grupează în mod convenabil termenii de mai sus şi se aplică formula întîi a mediei calculului integral, se obţine şi următoarea evaluare

$$-R[f] = \frac{(b-a)^3(d-c)}{12} \frac{\partial^2 f(\xi, \eta_1)}{\partial \xi^2} + \frac{(b-a)(d-c)^3}{12} \frac{\partial\ f(\xi_1, \eta)}{\partial \eta^2} -$$

$$- \frac{(b-a)^3(d-c)^3}{144} \frac{\partial^4 f(\xi, \eta)}{\partial \xi^2 \partial \eta^2},$$

$$\xi, \xi_1 \in (a, b) \text{ şi } \eta, \eta_1 \in (c, d).$$

unde

2°. În cazul $m = n = 4, x_1 = a, x_2 = \frac{a+b}{2}, x_3 = b, x_4 = \alpha, y_1 = c, y_2 = \frac{c+d}{2}, y_3 = d, y_4 = \beta$, unde α şi β sînt doi parametri, se obţine o formulă de cubatură de forma

$$\iint_D f(x, y)\, dx\, dy = A_1 B_1 f(x_1, y_1) + A_1 B_2 f(x_1, y_2) + A_1 B_3 f(x_1, y_3) +$$
$$+ A_2 B_1 f(x_2 y_1) + A_2 B_2 f(x_2 y_2) + A_2 B_3 f(x_2, y_3) + A_3 B_1 f(x_3, y_1) +$$
$$+ A_3 B_2 f(x_3, y_2) + A_3 B_3 f(x_3, y_3) + R[f]. \tag{30}$$

Termenii în care intervin

$$f(\alpha,y_1),\ f(\alpha,y_2),\ f(\alpha,y_3),\ f(x_1,\beta),\ f(x_2,\beta),\ f(x_3,\beta),\ f(\alpha,\beta)$$

dispar, ori care sînt α şi β, din cauza condiţiilor de ortogonalitate

$$\int_a^b g(x)\,dx=0,\quad \int_c^d h(y)\,dy=0,$$

unde

$$g(x)=(x-a)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)(x-b),\quad h(y)=(y-c)\left(y-\frac{c+d}{2}\right)(y-d).$$

Pentru justificare recomandăm a se vedea lucrările [2,6]. Din rezultatele generale obţinute în lucrările amintite rezultă că nici unul din coeficienţii A_i, B_k ai formulei de cubatură (30) nu depind de parametrii α şi β; din cauza aceasta nu îi vom lua în considerare la calculul acestor coeficienţi.

În cazul de faţă avem

$$\varphi_1(x)=\frac{b-a}{12}\,\frac{12x^2-12(a+b)x+a^2+10ab+b^2}{\left(x-\frac{a+b}{2}\right)(x-b)},$$

$$\varphi_2(x)=\frac{b-a}{2}\,\frac{12x^2-12(a+b)x+a^2+10ab+b^2}{(x-a)(x-b)},$$

$$\varphi_3(x)=\frac{b-a}{2}\,\frac{12x^2-10(a+b)x+a^2+10ab+b^2}{(x-a)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)},$$

precum şi expresii analoge cu acestea pentru $\psi_1(y)$, $\psi_2(y)$, $\psi_3(y)$.

Coeficienţii formulei (30) vor fi daţi de formulele

$$A_1=\varphi_1(a)=\frac{b-a}{6},\ A_2=\varphi_2\left(\frac{a+b}{2}\right)=\frac{2}{3}(b-a),\ A_3=\varphi_3(b)=\frac{b-a}{6}.$$

$$B_1=\psi_1(c)=\frac{d-c}{2},\ B_2=\psi_2\left(\frac{c-d}{2}\right)=\frac{2}{3}(d-c),\ B_3=\psi_3(d)=\frac{d-c}{6}.$$

Cu acestea formula (30) va deveni

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy=\frac{(b-a)(d-c)}{36}\Big\{f(a,c)+f(a,d)+f(b,c)+f(b,d)+$$

$$(30')\qquad +4\left[f\left(a,\frac{c+d}{2}\right)+f\left(b,\frac{c+d}{2}\right)+f\left(\frac{a+b}{2},c\right)+f\left(\frac{a+b}{2},d\right)\right]+$$

$$+16\,f\left(\frac{a+b}{2},\frac{c+d}{2}\right)\Big\}+R[f],$$

care este tocmai formula de integrare numerică a lui Cavalieri — Simpson extinsă la două variabile.

Să ne ocupăm acum de evaluarea restului $R[f]$ al acestei formule. Avînd în vedere că α şi β pot lua orice valori, pentru simplicitate să presupunem că $\alpha=a$ şi $\beta=b$. În acest caz funcţiile (25) sînt

$$(31)\qquad U(t)=\frac{(b-t)^4}{4!}-u(t),\quad V(z)=\frac{(d-z)^4}{4!}-v(z),$$

unde

$$u(t)=\begin{cases}\dfrac{b-a}{9}\left(\dfrac{a-b}{2}-t\right)^3+\dfrac{b-a}{36}\left(b-t\right)^3, & \text{dacă } t\in\left[a,\dfrac{a+b}{2}\right]\\[2mm] \dfrac{b-a}{36}\left(b-t\right)^3, & \text{dacă } t\in\left[\dfrac{a+b}{2},b\right]\end{cases}$$

$$v(z)=\begin{cases}\dfrac{d-c}{9}\left(\dfrac{c+d}{2}-z\right)^3+\dfrac{d-c}{36}\left(d-z\right)^3, & \text{dacă } z\in\left[c,\dfrac{c+d}{2}\right]\\[2mm] \dfrac{d-c}{36}\left(d-z\right)^3, & \text{dacă } z\in\left[\dfrac{c+d}{2},d\right].\end{cases}$$

Restul formulei (30') va fi dat de formula

$$(32)\qquad R[f]=\iint_D\left[U(t)\frac{\partial^4 f(t,z)}{\partial t^4}+V(z)\frac{\partial^4 f(t,z)}{\partial z^4}-U(t)\,V(z)\frac{\partial^8 f(t,z)}{\partial t^4\,\partial z^4}\right]dt\,dz.$$

Efectuînd unele calcule se găseşte că

$$(33)\qquad U(t)=\begin{cases}\dfrac{(a-t)^3(a+2b-3t)}{72}, & \text{dacă } t\in\left[a,\dfrac{a+b}{2}\right]\\[2mm] \dfrac{(b-t)^3(2a+b-3t)}{72}, & \text{dacă } t\in\left[\dfrac{a+b}{2},b\right]\end{cases},$$

de unde rezultă că $U(t)$ e o funcţie negativă în intervalul (a,b); la fel se arată că $V(z)$ e negativă în (c,d). Din aceste motive se poate aplica integralelor care intervin la (32) teorema întîi a mediei calculului integral şi se obţine evaluarea

$$(32')\qquad -R[f]=\frac{(b-a)^5(d-c)}{2880}\frac{\partial^4 f(\xi,\eta_1)}{\partial\xi^4}+\frac{(b-a)(d-c)^5}{2880}\frac{\partial^4 f(\xi_1,\eta)}{\partial\eta^4}+$$

$$+\frac{(b-a)^5(d-c)^5}{2880^2}\frac{\partial^8 f(\xi,\eta)}{\partial\xi^4\,\partial\eta^4},$$

unde

$$\xi,\xi_1\in(a,b)\ \text{şi}\ \eta,\eta_1\in(c,d).$$

Observaţii. 1°. Formula de cubatură (30'), cu expresia de la

(32′) a restului am mai obținut-o cu alte metode și în lucrările [2,7]. În lucrarea [7] am dat, sub o formulă explicită, formula de integrare numerică a lui Cavalieri — Simpson în cazul unui spațiu ordinar cu un număr oarecare de dimensiuni.

2°. La (33) am definit funcția $U(t)$ prin

$$U_1(t) = \frac{(a-t)^3(a+2b-3t)}{72} \text{ sau } U_2(t) = \frac{(b-t)^3(2a+b-3t)}{72}$$

după cum t aparținea primei jumătăți a intervalului (a, b) sau celei de a doua jumătăți a acestui interval. Se constată ușor că $U(t)$ verifică ecuația diferențială $U^{(IV)}(t) = 1$ și condițiile la limite

$$U(a) = U'(a) = U''(a) = U(b) = U'(b) = U''(b) = 0;$$

avem de asemenea

$$U_1\left(\frac{a+b}{2}\right) = U_2\left(\frac{a+b}{2}\right), U_1'\left(\frac{a+b}{2}\right) = U_2'\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0,$$

$$U_1''\left(\frac{a+b}{2}\right) = U_2''\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

De fapt se poate arăta că înseși funcțiunile $U(t)$ și $V(z)$ de la (25) se bucură de proprietăți analoge cu acestea.

§ 2. Extinderea unor rezultate ale lui L. Ciacalov și T. Popoviciu

7. Am văzut că în general formula de cubatură (1) are gradul de exactitate $(M-1, N-1)$, adică $M-1$ în raport cu x și $N-1$ în raport cu y. Printr-o alegere specială a punctelor $M_{i,k}$ (x_i, y_k) s-ar putea ca acest grad de exactitate să se mărească. Pentru aceasta va trebui să presupunem că unele rădăcini ale polinoamelor de la (7) au ordinele de multiplicitate impare. E interesant cazul cînd toate numerele r_i, s_k sînt impare. Atunci se pot determina valorile x_i, y_k, astfel încît formula de cubatură (1) să aibă gradul maxim de exactitate, care este $(M+m-1, N+n-1.)$

8. Fie $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ și $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ numere reale oarecare. Să considerăm apoi polinomul de interpolare al lui Lagrange — Hermite

$$L_1(x, y; f) = L\left(\begin{matrix} x_1 \\ r_1 \end{matrix}, \dots, \begin{matrix} x_m \\ r_m \end{matrix}, \begin{matrix} \alpha_1 \\ 1 \end{matrix}, \dots, \begin{matrix} \alpha_m \\ 1 \end{matrix}; \begin{matrix} y_1 \\ s_1 \end{matrix}, \dots, \begin{matrix} y_n \\ s_n \end{matrix}, \begin{matrix} \beta_1 \\ 1 \end{matrix}, \dots, \begin{matrix} \beta_n \\ 1 \end{matrix}; f \middle| \begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right) \tag{34}$$

și formula de interpolare

$$f(x, y) = L_1(x, y; f) + r_1(x, y; f), \tag{35}$$

unde

$$\begin{aligned} r_1(x, y; f) = {} & g(x) g_0(x) \left[\begin{matrix} x_1 \\ r_1 \end{matrix}, \dots, \begin{matrix} x_m \\ r_m \end{matrix}, \begin{matrix} \alpha_1 \\ 1 \end{matrix}, \dots, \begin{matrix} \alpha_m \\ 1 \end{matrix}, \begin{matrix} x \\ 1 \end{matrix}; f\right] + \\ & + h(y) h_0(y) \left[\begin{matrix} y_1 \\ s_1 \end{matrix}, \dots, \begin{matrix} y_n \\ s_n \end{matrix}, \begin{matrix} \beta_1 \\ 1 \end{matrix}, \dots, \begin{matrix} \beta_m \\ 1 \end{matrix}, \begin{matrix} y \\ 1 \end{matrix}; f\right] - \\ & - g(x) g_0(x) h(y) h_0(y) \left[\begin{matrix} x_1 \\ r_1 \end{matrix}, \dots, \begin{matrix} x_m \\ r_m \end{matrix}, \begin{matrix} \alpha_1 \\ 1 \end{matrix}, \dots, \begin{matrix} \alpha_m \\ 1 \end{matrix}, \begin{matrix} x \\ 1 \end{matrix}; \begin{matrix} y_1 \\ s_1 \end{matrix}, \dots, \begin{matrix} y^n \\ s_n \end{matrix}, \begin{matrix} \beta_1 \\ 1 \end{matrix}, \dots, \begin{matrix} \beta_n \\ 1 \end{matrix}, \begin{matrix} y \\ 1 \end{matrix}; f\right]. \end{aligned} \tag{36}$$

Aici pe lîngă notațiile de la (7) am mai folosit și următoarele

$$g_0(x) = \prod_{i=1}^{m} (x - \alpha_i), \quad h_0(y) = \prod_{k=1}^{n} (y - \beta_k). \tag{37}$$

Dacă pentru calculul integralei duble de la (1) se folosește formula de interpolare (35) se obține o formulă de cubatură de forma

$$\begin{aligned} \iint_D f(x, y)\, dx\, dy = {} & \sum_{i=1}^{m} \sum_{\nu=0}^{r_i-1} \sum_{k=1}^{n} \sum_{\mu=0}^{s_k-1} A_{i,\nu} B_{k,\mu} \left[\frac{\partial^{\nu+\mu} f(x, y)}{\partial x^\nu \partial y^\mu}\right]_{y_k}^{x_i} + \\ & + \sum_{i=1}^{m} \sum_{\nu=0}^{r_i-1} \sum_{l=1}^{n} A_{i,\nu} D_l \left[\frac{\partial^\nu f(x, y)}{\partial x^\nu}\right]_{\beta_l}^{x_i} + \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} \sum_{n=0}^{s_k-1} C_j B_{k,\mu} \left[\frac{\partial^\mu f(x, y)}{\partial y^\mu}\right]_{y_k}^{\alpha_j} + \\ & + \sum_{j=1}^{m} \sum_{l=1}^{n} C_j D_l f(\alpha_j, \beta_l) + R_1[f], \end{aligned} \tag{38}$$

unde

$$R_1[f] = \iint_D r_1(x, y; f)\, dx\, dy,$$

iar coeficienții $A_{i,\nu}, C_j, D_l$ se pot calcula cu ajutorul polinoamelor fundamentale de interpolare pe care le introduce polinomul (34).

9. Voim acum să determinăm valorile x_i și y_k astfel încît să avem, oricare ar fi parametrii α_j, β_l,

$$C_j = D_l = 0 \quad (j = \overline{1, m}; l = \overline{1, n}). \tag{39}$$

Avînd în vedere că polinomul de interpolare de la (34) se poate scrie și sub forma

$$\begin{aligned} L_1(x, y; f) = {} & g_0(x) h_0(y) L\left(\begin{matrix} x_1 \\ r_1 \end{matrix}, \dots, \begin{matrix} x_m \\ r_m \end{matrix}; \begin{matrix} y_1 \\ s_1 \end{matrix}, \dots, \begin{matrix} y_n \\ s_n \end{matrix}; F_1 \middle| \begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right) + \\ & + g_0(x) h(y) L\left(\begin{matrix} x_1 \\ r_1 \end{matrix}, \dots, \begin{matrix} x_m \\ r_m \end{matrix}; \begin{matrix} \beta_1 \\ 1 \end{matrix}, \dots, \begin{matrix} \beta_n \\ 1 \end{matrix}; F_2 \middle| \begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right) + \\ & + g(x) h_0(y) L\left(\begin{matrix} \alpha_1 \\ 1 \end{matrix}, \dots, \begin{matrix} \alpha_m \\ 1 \end{matrix}; \begin{matrix} y_1 \\ s_1 \end{matrix}, \dots, \begin{matrix} y_n \\ s_n \end{matrix}; F_3 \middle| \begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right) + \\ & + g(x) h(y) L\left(\begin{matrix} \alpha_1 \\ 1 \end{matrix}, \dots, \begin{matrix} \alpha_m \\ 1 \end{matrix}; \begin{matrix} \beta_1 \\ 1 \end{matrix}, \dots, \begin{matrix} \beta_n \\ 1 \end{matrix}; F_4 \middle| \begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right), \end{aligned}$$

unde

$$F_1(x,y)=\frac{f(x,y)}{g_0(x)\,h_0(y)},\ F_2(x,y)=\frac{f(x,y)}{g_0(x)\,h(y)},\ F_3(x,y)=\frac{f(x,y)}{g(x)\,h_0(y)},$$

$$F_4(x,y)=\frac{f(x,y)}{g(x)\,h(y)},$$

se constată că pentru a dispare coeficienții C, D, e necesar și suficient ca să avem

$$\iint_D g(x)\,h(y)\,g_{0,i}(x)\,h_{0,k}(y)\,dx\,dy=0\ \ (i=\overline{1,n};\,k=\overline{1,n}),$$

unde

$$g_{0,i}(x)=\frac{g_0(x)}{x-a_i},\ h_{0,k}(y)=\frac{h_0(y)}{y-\beta_k}.$$

Avînd în vedere că numerele a_i,β_k sînt oarecari, rezultă că pentru a avea loc egalitățile (39) e necesar și suficient ca

$$\int_a^b g(x)\,x^i\,dx=0,\ \int_c^d h(y)\,y^k\,dy=0\ \ (i=\overline{1,m-1};\ k=\overline{1,n-1}). \tag{40}$$

Ei bine, L. Ciacalov [4] și T. Popoviciu [8] au demonstrat că un sistem de una din formele de la (40) are cel puțin o soluție formată din numere reale, distincte și interioare intervalului de ortogonalitate corespunzător.

Dacă se determină valorile y_i, y_k în acest mod formula de cubatură (38) se va reduce la

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy=\sum_{i=1}^{m}\sum_{\nu=0}^{r_i-1}\sum_{k=1}^{n}\sum_{\mu=0}^{s_k-1}A_{i,\nu}\,B_{k,\mu}\left[\frac{\partial^{\nu+\mu}f(x,y)}{\partial x^{\nu}\,\partial y^{\mu}}\right]_{y_k}^{x_i}+R_1[f], \tag{41}$$

care are gradul de exactitate $(M+m-1,\,N+n-1)$.

Se poate arăta, așa cum am făcut în lucrările [9, 6], că toți coeficienții $A_{i,\nu}$ $B_{k,\mu}$ sînt independenți de parametrii a_i, β_k. Ei se pot obține dacă se integrează polinomul

$$L\left(\begin{matrix}x_1\\ r_1\end{matrix},\begin{matrix}x_2\\ r_2\end{matrix},\ldots,\begin{matrix}x_m\\ r_m\end{matrix};\begin{matrix}y_1\\ s_1\end{matrix},\begin{matrix}y_2\\ s_2\end{matrix},\ldots,\begin{matrix}y_n\\ s_n\end{matrix};f\,\middle|\,\begin{matrix}x\\ y\end{matrix}\right) \tag{42}$$

sau dacă se folosesc formulele de la (13).

10. Să ne ocupăm acum de evaluarea restului formulei de cubatură de tip Gauss de la (41).

Dacă presupunem că $a_i=x_i\,(i=1,2,\ldots,m)$, $\beta_k=y_k$ $(k=1,2,\ldots,n)$, formula (36) devine

$$r_1(x,y;f)=G_1(x)\left[\begin{matrix}x_1\\ r_1+1\end{matrix},\begin{matrix}x_2\\ r_2+1\end{matrix},\ldots,\begin{matrix}x_m\\ r_m+1\end{matrix},\begin{matrix}x\\ 1\end{matrix};f\right]+$$

$$+H_1(y)\left[\begin{matrix}y\\ s_1+1\end{matrix},\begin{matrix}y\\ s_2+1\end{matrix},\ldots,\begin{matrix}y_n\\ s_n+1\end{matrix},\begin{matrix}y\\ 1\end{matrix};f\right]-$$

$$-G_1(x)H_1(y)\left[\begin{matrix}x_1\\ r_1+1\end{matrix},\begin{matrix}x_2\\ r_2+1\end{matrix},\ldots,\begin{matrix}x_m\\ r_m+1\end{matrix},\begin{matrix}x\\ 1\end{matrix};\begin{matrix}y_1\\ s_1+1\end{matrix},\begin{matrix}y_2\\ s_2+1\end{matrix},\ldots,\begin{matrix}y^n\\ s^n+1\end{matrix}\ \begin{matrix}y\\ 1\end{matrix};f\right],$$

unde

$$G_1(x)=\prod_{i=1}^{m}(x-x_i)^{r_i+1},\ H_1(y)=\prod_{k=1}^{n}(y-y_k)^{s_k+1}.$$

Folosind o metodă expusă de noi la pag. 305 a lucrării [9] se obține de aici următoarea evaluare pentru restul formulei de cubatură (41)

$$R_1[f]=A_P\frac{\partial^P f(\xi,\eta_1)}{\partial\xi^P}+B_Q\frac{\partial^Q f(\xi_1,\eta)}{\partial\eta^Q}-A_P\,B_Q\frac{\partial^{P+Q}f(\xi,\eta)}{\partial\xi^P\,\partial\eta^Q} \tag{43}$$

unde

$$A_P=\iint_D G_1(x)\,dx)\,dy,\ B_Q=\iint_D H_1(y)\,dx\,dy,$$

$$P=\sum_{i=1}^{m}(r_i+1),\ Q=\sum_{k=1}^{n}(s_k+1),$$

iar

$$\xi,\xi_1\in(a,b)\ \text{și}\ \eta,\eta_1\in(c,d).$$

11. Dacă avem în vedere rezultatele de la nr. 5, precum și rezultatele lui L. Ciacalov [4], se poate de asemenea da și o expresie integrală pentru restul formulei de cubatură (41), care are gradul de exactitate $(P-1,\,Q-1)$,

$$R_1[f]=\iint_D\left[U_0(t)\frac{\partial^P f(t,z)}{\partial t^P}+V_0(z)\frac{\partial^Q f(t,z)}{\partial z^Q}-U_0(t)\,V_0(z)\frac{\partial^{P+Q}f(t,z)}{\partial t^P\,\partial z^Q}\right]dt\,dz, \tag{44}$$

unde

$$U_0(t)=\frac{(b-t)^P}{P!}-u_0(t),\ V_0(z)=\frac{(d-z)^Q}{Q}-v_0(z),$$

iar

$$u_0(t)=\sum_{i=p}^{m}\sum_{\nu=0}^{r_i-1}A_{i,\nu}\,\frac{(x_i-t)^{P-\nu-1}}{(P-\nu-1)!}=\sum_{i=p}^{m}\sum_{\nu=0}^{r_i-1}\frac{\varphi_i^{(r_i-\nu-1)}(x_i)}{\nu!\,(r_i-\nu-1)!}\,\frac{(x_i-t)^{P-\nu-1}}{(P-\nu-1)!}$$

dacă $t\in[x_{p-1},\,x_p]$ $(p=\overline{1,m}$; $x_0=a)$ și $u_0(t)\equiv 0$ dacă $t\,\overline{\in}\,[a,x_m]$; în mod analog se definește și $v_0(z)$.

12. Într-o lucrare recentă [10] am generalizat, în sensul în care

Christoffel a generalizat formula de cuadratură clasică a lui Gauss, o formulă generală de tip Gauss studiată recent de P. Turan [11], L. Ciacalov [4] şi T. Popoviciu [8]. În acelaşi sens poate fi generalizată şi formula de tip Gauss (41).

Să arătăm foarte succint în ce ar consta această generalizare. În acest scop să considerăm polinoamele

$$(45)\qquad \omega(x) = A\prod_{\nu=1}^{s}(x-a_\nu)^{\alpha_\nu}\ (A\neq 0),\quad w(y)=B\prod_{\mu=1}^{r}(y-b_\mu)^{\beta_\mu}\ (B\neq 0)$$

care au rădăcinile reale, plasate oriunde pe axa reală, însă astfel încît aceste polinoame să fie pozitive respectiv în intervalele (a, b), (c, d). Se pune apoi problema de a determina valorile $x_1,\dots,x_m$ şi $y_1,\dots,y_n$ — ale căror ordine de multiplicitate sînt numerele impare $r_1,\dots,r_m$, respectiv $s_1,\dots,s_n$ date dinainte — astfel încît formula de cubatură care foloseşte ca noduri punctele de intersecţie ale curbelor

$$\omega(x)=0,\ g(x)=0,\ w(y)=0,\ h(y)=0,$$

unde

$$g(x)=\prod_{i=1}^{m}(x-x_i)^{r_i},\quad h(y)=\prod_{k=1}^{n}(y-y_k)^{s_k},$$

să aibă gradul maxim de exactitate (adică maxim în raport cu x şi maxim în raport cu y).

Se găseşte uşor că pentru aceasta este necesar şi suficient ca să avem

$$(46)\qquad \int_a^b \omega(x)\,g(x)\,x^i\,dx = 0,\ \int_c^d w(y)\,h(y)\,y^k\,dy = 0\ (i=\overline{0,m-1}\,;\ k=\overline{0,n-1}),$$

adică $g(x)$ trebuie să fie ortogonal în (a,b), faţă de funcţia $\omega(x)$, cu orice polinom de grad mai mic ca m, iar $h(y)$ să fie ortogonal în (c,d), faţă de ponderea $w(y)$ cu orice polinom de grad mai mic ca n. Sistemele de ecuaţii de mai sus au, în ipotezele în care ne-am plasat, cel puţin cîte o soluţie reală—aşa după cum am arătat în lucrarea noastră citată mai sus.

Exemplu. Dacă $\omega(x)=x^2, w(y)=y^2, m=n=3$ şi $r_1=r_2=r_3=s_1=s_2=s_3=1$, sau dacă $\omega(x)\equiv w(y)\equiv 1, m=n=3$ şi $r_1=3, r_2=r_3=1, s_1=3, s_2=s_3=1$, iar $a=-b=c=-d=-1$,

se obţine formula de cubatură de grad de exactitate (7, 7)

$$\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} f(x,y)\,dx\,dy = \frac{1}{140625}\Big\{207936 f(0,0) + 67032\Big[f\Big(0,-\sqrt{\tfrac{5}{7}}\Big) + f\Big(-\sqrt{\tfrac{5}{7}},0\Big) + f\Big(0,\sqrt{\tfrac{5}{7}}\Big) + f\Big(\sqrt{\tfrac{5}{7}},0\Big)\Big] + 21609\Big[f\Big(-\sqrt{\tfrac{5}{7}},-\sqrt{\tfrac{5}{7}}\Big) +$$

$$+ f\Big(-\sqrt{\tfrac{5}{7}},\sqrt{\tfrac{5}{7}}\Big) + f\Big(\sqrt{\tfrac{5}{7}},-\sqrt{\tfrac{5}{7}}\Big) + f\Big(\sqrt{\tfrac{5}{7}},\sqrt{\tfrac{5}{7}}\Big)\Big] +$$

$$+ 9120\Big[f_{x^2}(0,0) + f_{y^2}(0,0)\Big] + 2940\Big[f_{x^2}\Big(0,-\sqrt{\tfrac{5}{7}}\Big) + f_{x^2}\Big(0,\sqrt{\tfrac{5}{7}}\Big) +$$

$$+ f_{y^2}\Big(-\sqrt{\tfrac{5}{7}},0\Big) + f_{y^2}\Big(\sqrt{\tfrac{5}{7}},0\Big)\Big] + 400 f_{x^2y^2}(0,0)\Big\} + R[f],$$

unde

$$R[f] = \frac{1}{1111320}\Big[\frac{\partial^8 f(\xi,\eta_1)}{\partial\xi^8} + \frac{\partial^8 f(\xi_1,\eta)}{\partial\eta^8} - \frac{1}{4445280}\,\frac{\partial^{16} f(\xi,\eta)}{\partial\xi^8\,\partial\eta^8}\Big].$$

Aceasta constituie extinderea la două variabile a unei formule obţinute de prof. T. Popoviciu la pag. 53 a memoriului [8].

О ЧИСЛЕННОМ ИНТЕГРИРОВАНИИ ФУНКЦИЙ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

Краткое содержание

В этой работе изучаются формулы кубатуры вида (1) для области (2). Для определения коэффициентов $C_{i_\nu k_\mu}$ при которых формула (1) имеет степень точности $(M\text{-}1, N\text{-}1)$, где M и N даны в (3), используется либо формула интерполяции (4), либо формулы (13), которые установлены автором в работе (5). Главная цель работы—дать интегральное выражение для дополнительного члена $R[f]$ формулы (1). Используя дополнительную функцию введённую в (14), получилось для остатка $R\,[f]$ выражение (26). Используемые обозначения можно узнать в предыдущем тексте.

В § 2, предполагая что корни многочленов (7) имеют данные нечётные кратности, пробуется определить эти корни так, чтобы формула кубатуры (1) имела максимальную степень точности (максимальную по отношению к X и по отношению к y); для этого необходимо и достаточно выполнение равенств (40). Имея ввиду результаты Л. Чакалова (4) и Т. Поповича (8), можно утверждать, что системы (40) имеют по крайней мере по одному действительному решению. Если, таким образом определяются значение x_i и yk формула кубатуры (37), сводится, для любых параметров $\alpha_1 \alpha_2,\dots,\alpha_n$ и $\beta_1, \beta_2,\dots,\beta_n$, к формуле (41), которая имеет степень точности $(M+m-1, N+n-1)$. Для остатка этой формулы даны оценки (43) и (44). Указывается затем обобшение формулы кубатуры (41) в смысле в котором автор обобщил в работе (10) формулу квадратуры Тюрана-Чакалова-Поповича, прилагая значениями x_i и Y_k соответственно корни полиномов $w(x)$ и $W(y)$ из (45), которые заранее даны. Для того чтобы получаемая формула кубатруры имела максимльную степень точности, необходимо и достаточно выполнение условий (46). Эти две системы высшей степени в X_i и Y_k из (46) имеют по меньшей мере по одному действительному решению, которое построено из различных чисел как указано в работе (10).

SUR L'INTÉGRATION NUMÉRIQUE DES FONCTIONS DE DEUX VARIABLES

Résumé

Dans ce travail on étudie les formules de cubature de la forme (1) pour le domaine (2). Pour déterminer les coefficients $C_{i\nu k\mu}$ de façon que la formule (1) ait le degré d'exactitude $(M-1,\ N-1)$, où M et N sont donnés par (3), on utilise la formule d'intégration (4), ou bien les formules (13), établies par l'auteur dans [5].

Le but principal de ce travail est de donner une expression intégrale pour le terme complémentaire $R\,[f]$ de la formule (1). Utilisant la fonction auxiliaire introduite par (14), on a obtenu pour le reste $R\,[f]$ l'expression (26). Quant aux notations dont on s'est servi, on peut les trouver dans le texte antérieur.

Dans le § 2, supposant que les racines des polynomes ont des ordres de multiplicité impairs donnés, on cherche à déterminer ces racines, de manière que la formule de cubature (1) ait le degré maximum d'exactitude (maximum par rapport à x et maximum par rapport à y); pour cela il est nécessaire et suffisant que les égalités (40) soient valables. En tenant compte des résultats de L. Tchakaloff [4] et de T. Popoviciu [8], on peut affirmer que les systèmes (40) ont au moins une solution réelle. Si on détermine de cette façon les valeurs x_i et y_k, la formule de cubature (37) se réduira, quels que soient les paramètres $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ et $\beta_1, \ldots, \beta_n$ à la formule (41), qui a le degré d'exactitude $(M+m-1,\ N+n-1)$. On donne les évaluations (43) et (44) pour le reste de cette formule. On indique ensuite une généralisation de la formule de cubature (41) dans le même sens que la généralisation de la formule de quadrature de Turán, Tchakaloff-Popoviciu, donnée par l'auteur dans [10], en attachant aux valeurs x_i et y_k respectivement les racines des polynomes $\omega(x)$ et $w(y)$ de (45), racines données a priori. Pour que la formule de cubature que l'on obtient ait le degré maximum d'exactitude, il est nécessaire et suffisant que les conditions (46) soient remplies. Les deux systèmes de degré supérieur en x_i et x_k de (46) ont au moins une solution réelle, formée de nombres distincts [10].

BIBLIOGRAFIE

1. Stancu D. D., *Asupra formulei de interpolare a lui Hermite şi a unor aplicaţii ale acesteia.* Studii şi cercetări matem., Cluj, 1957, nr. 2.
2. Stancu D. D., O *metodă pentru construirea de formule de cubatură pentru funcţiile de două variabile. Ibid.*, 1958, nr. 1 (sub tipar).
3. Ciacalov L., *Über eine allgemeine Quadraturformel* C. R. de l'Acad. Bulgare des Sci., 1948, t. 1, nr. 2—3, p. 9—12.
4. Чакалов Л., Общи квадратурни формули от гаусов тип. Известия мат. инст. Българска Акад., 1954, t. 1, k. 2, p. 67—82.
5. Stancu D. D., *Asupra unor formule generale de integrare numerică.* Studii şi cercetări matem. Acad. R. P. R., t. 9, nr. 1, 1958, p. 209—216.
6. Stancu D. D., *Generalizarea formulei de cuadratură a lui Gauss-Christoffel.* Studii şi cercetări matem. Iaşi, 1957, t. 8, fasc. 1, p. 1—18.

7. Stancu D. D., *Contribuţii la integrarea numerică a funcţiilor de mai multe variabile.* Studii şi cercetări matemat., Cluj, 1957, nr. 1.
8. Popoviciu T., *Asupra unei generalizări a formulei de cuadratură a lui Gauss.* Studii şi cercetări şt. Iaşi, 1955, t. 6, p. 29—57.
9. Stancu D. D., *Generalizarea unor formule de interpolare pentru funcţiile de mai multe variabile şi unele consideraţii asupra formulei de integrare numerică a lui Gauss.* Bul. Şt. Acad. R. P. R., 1957, t. 9, nr. 2, p. 287-313.
10. Stancu D. D., *Sur quelques formules générales de quadrature du type Gauss-Christoffel.* Mathematica, Cluj, 1958, f. 1 (sub tipar).
11. Turan P., *On the theory of the mechanical quadrature.* Acta Scient., Mathem., 1950, t. 12, p. 30—37.