14.

Д. Д. СТАНКУ

О НЕКОТОРЫХ РАЗЛОЖЕНИЯХ ТЕЙЛОРА ДЛЯ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ *)

В настоящей работе приводятся некоторые замечания о распространении формулы Тейлора на функции нескольких переменных. Пользуясь известными интерполяционными формулами, рассмотренными нами в других работах [1], [2], мы покажем, каким образом можно новым путем получить некоторые формулы тейлорова типа М. Пиконе [3], [4] и Г. Бириндели [5]. Далее, при помощи интерполяционных формул с псевдополиномами, рассматриваемых нами в первой части настоящей работы, мы дадим новое доказательство для одной формулы, полученной членом Академии РНР проф. М. Николеску в интересной работе [6], в которой он развивает самостоятельную теорию для функций двух действительных переменных. Метод интерполяции совместно с идеей, подсказанной вышеупомянутой работой, позволил нам без труда распространить полученную акад. М. Николеску формулу на функции нескольких переменных.

§ 1. ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

1. Интерполяционная формула Лагранжа для функции $f(t^1, t^2, \dots, t^s)$ и узлов

$$M_{i_1, i_2, \dots, i_s}(t^1_{i_1}, t^2_{i_2}, \dots, t^s_{i_s}), \qquad (i_k = \overline{1, n_k + 1};\ k = \overline{1, s}) \tag{1}$$

имеет, как известно, следующий вид

$$f(M) = L_{n_1, n_2, \dots, n_s}(M) + R_s(M), \tag{2}$$

*) Доложено на IV Съезде румынских математиков в Бухаресте 27 мая — 4 июня 1956 г.

где

$$L_{n_1,n_2,\dots,n_s}(M)=\sum_{i_1=1}^{n_1+1}\cdots\sum_{i_s=1}^{n_s+1}\prod_{k=1}^{s} l^k_{i_k}(t^k)\, f(t^1_{i_1},t^2_{i_2},\dots,t^s_{i_s}) \tag{3}$$

с

$$l^k_{i_k}(t^k)=\frac{u^k(t^k)}{(t^k-t^k_{i_k})\,\dot u^k(t^k_{i_k})},\quad u^k(t^k)=\prod_{i_k=1}^{n_k+1}(t^k-t^k_{i_k}),\qquad (k=\overline{1,s}) \tag{4}$$

является интерполяционным полиномом степени $(n_1,n_2,\dots,n_s)$, удовлетворяющим условиям

$$L_{n_1,n_2,\dots,n_s}(M_{i_1,i_2,\dots,i_s})=f(M_{i_1,i_2,\dots,i_s}),\ (i_k=\overline{1,n_k+1};\ k=\overline{1,s}). \tag{5}$$

Остаточный член $R_s(M)$ в формуле (2) имеет [7] следующее выражение

$$\begin{aligned} R_s(M) &= \sum u^1(t^1)\,[t^1,t^1_1,\dots,t^1_{n_1+1};\,f(M)] - \\ &- \sum u^1(t^1)\,u^2(t^2)\left[\begin{matrix} t^1,t^1_1,\dots,t^1_{n_1+1} \\ t^2,t^2_1,\dots,t^2_{n_2+1}\end{matrix}\ ;\ f(M)\right] + \\ &+ \sum u^1(t^1)u^2(t^2)u^3(t^3)\left[\begin{matrix} t^1,t^1_1,\dots,t^1_{n_1+1} \\ t^2,t^2_1,\dots,t^2_{n_2+1} \\ t^3,t^3_1,\dots,t^3_{n_3+1}\end{matrix}\ ;\ f(M)\right] + \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &+ (-1)^s\prod_{i=1}^{s}u^i(t^i)\left[\begin{matrix} t^1,t^1_1,\dots,t^1_{n_1+1} \\ \dots\dots\dots\dots \\ t^s\ t^s_1,\dots,t^s_{n_s+1}\end{matrix}\ ;\ f(M)\right], \end{aligned} \tag{6}$$

где, например,

$$\left[\begin{matrix} x^1_1,x^1_2,\dots,x^1_{m_1+1} \\ x^3_1,x^3_2,\dots,x^3_{m_3+1};\ f(M) \\ x^s_1,x^s_2,\dots,x^s_{m_s+1}\end{matrix}\right] = \sum_{j_1=1}^{m_1+1}\sum_{j_3=1}^{m_3+1}\sum_{j_s=1}^{m_s+1}\frac{f(x^1_{j_1},t^2,x^3_{j_3},t^4,\dots,t^{s-1},x^s_{j_s})}{\dot\omega^1(x^1_{j_1})\,\dot\omega(x^3_{j_3})\,\dot\omega^s(x^s_{j_s})}, \tag{7}$$

$$\omega^k(t^k)=\prod_{j_k=1}^{m_k+1}(t^k-t^k_{j_k}), \tag{8}$$

является разделенной разностью порядка m_1 относительно t^1, порядка m относительно t^3, порядка m_s относительно t^s для функции $f(M)$ и выде- ных значений t^1, t^3 и t^s.

В работе [1] доказано, что если функция $f(M)$ допускает частные производные достаточно высокого порядка, то остаточный член (6) можно выразить формулой

$$\begin{aligned} R_s(M) &= \sum\frac{u^1(t^1)}{(n_1+1)!}\,\frac{\partial^{n_1+1}f(\xi_1,t^2,\dots,t^s)}{\partial\xi_1^{n_1+1}} - \\ &- \sum\frac{u^1(t^1)u^2(t^2)}{(n_1+1)!\,(n_2+1)!}\,\frac{\partial^{n_1+n_2+2}f(\xi_1,\xi_2,t^3,\dots,t^s)}{\partial\xi_1^{n_1+1}\,\partial\xi_2^{n_2+1}} + \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &+ (-1)^s\prod_{i=1}^{s}\frac{u^i(t^i)}{(n_i+1)!}\,\frac{\partial^{n_1+\dots+n_s+s}f(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_s)}{\partial\xi_1^{n_1+1}\,\partial\xi_2^{n_2+1}\dots\partial\xi_s^{n_s+1}}, \end{aligned}$$

где ξ_i принадлежит к наименьшему промежутку, содержащему числа $t^i,t^i_1,\dots,t^i_{n_i+1}$. В [1] мы доказали также, что числа $\xi_1,\dots,\xi_s$ одни и те же во всех частных производных, входящих в выражение остаточного члена.

2. Интерполяционный полином (3) можно привести и к ньютонову виду

$$N_{n_1,n_2,\dots,n_s}(M)= =\sum_{i_1=0}^{n_1}\sum_{i_2=0}^{n_2}\cdots\sum_{i_s=0}^{n_s}\varphi^1_{i_1}(t^1)\,\varphi^2_{i_2}(t^2)\dots\varphi^s_{i_s}(t^s)\,G^s_{i_1,i_2,\dots,i_s}, \tag{9}$$

где

$$\varphi^p_{i_p}(t^p)=\prod_{l=1}^{i_p}(t^p-t^p_l),\ (p=\overline{1,s}), \tag{10}$$

и

$$G^s_{i_1,i_2,\dots,i_s}=\left[\begin{matrix} t^1_1,t^1_2,\dots,t^1_{i_1+1} \\ t^2_1,t^2_2,\dots,t^2_{i_2+1} \\ \dots\dots \\ t^s_1,t^s_2,\dots,t^s_{i_s+1}\end{matrix}\ ;\ f(M)\right]. \tag{11}$$

Таким образом, интерполяционную формулу (2) можно представить и в следующем виде

$$f(M)=N_{n_1,n_2,\dots,n_s}(M)+R_s(M). \tag{12}$$

3. В работе [2] нами дана интерполяционная формула

$$f(M)=\sum_{i_1=0}^{n}\sum_{i_2=0}^{n+1-i_1}\cdots\sum_{i_{s-1}=0}^{n+s-1-i_1-\dots-i_{s-1}}\varphi^1_{i_1}(t^1)\,\varphi^2_{i_2}(t^2)\dots\varphi^s_{i_s}(t^s)\,G^s_{i_1,i_2,\dots,i_s}+ +\rho_n(M). \tag{13}$$

Допуская, что в области (T), содержащей интерполяционные узлы, функция $f(M)$ непрерывна вместе со своими частными производными до порядка $n+1$ включительно, мы доказали в [2], что остаточный член можно привести к виду

$$\rho_n(M) = \sum_{i_1=0}^{n+1} \sum_{i_2=0}^{n+1-i_1} \cdots \sum_{i_{s-1}=0}^{n+1-i_1-\cdots-i_{s-2}} \frac{\varphi^1_{i_1}(t^1) \ldots \varphi^{s-1}_{i_{s-1}}(t^{s-1})\, \varphi^{s}_{n+1-i_1-\cdots-i_{s-1}}(t^s)}{i_1! \ldots i_{s-1}!\,(n+1-i_1-\ldots-i_{s-1})!} \times \tag{14}$$
$$\times \frac{\partial^{n+1} f(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_s)}{\partial \xi_1^{i_1}\, \partial \xi_2^{i_2} \ldots \partial \xi_{s-1}^{i_{s-1}}\, \partial \xi_s^{n+1-i_1-\cdots-i_{s-1}}},$$

где ξ_k находится в пределах наименьшего промежутка, содержащего число $t_1^k, t_2^k, \ldots, t_{n+1}^k, t^k$.

Все вышеуказанные частные производные берутся в одной и той же точке $\Omega(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_s)$, которая принадлежит области, содержащей узлы гипертетраэдрической сетки, определяемой точками

$$P_{j_1, j_2, \ldots, j_s}(t^1_{j_1}, t^2_{j_2}, \ldots, t^s_{j_s}), \tag{15}$$
$$(j_1 = \overline{1, n+1};\ j_2 = \overline{1, n+2-j_1};\ \ldots;\ j_s = \overline{1, n+s-j_1-\ldots-j_{s-1}}).$$

Для случая $s = 2$ формула (13) была получена О. Бирманном [8].

4. Рассмотрим теперь вкратце так называемое интерполирование псевдополиномами.

Если развернуть следующую разделенную разность порядка $(n_1+1,\ n_2+1,\ \ldots,\ n_s+1)$

$$\begin{bmatrix} t^1, t^1_1, \ldots, t^1_{n_1+1} & \\ t^2, t^2_1, \ldots, t^2_{n_2+1} & ;\ f(M) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \\ t^s, t^s_1, \ldots, t^s_{n_s+1} & \end{bmatrix} \tag{16}$$

и вывести затем значение $f(M) = f(t^1, t^2, \ldots, t^s)$, то получится следующая интерполяционная формула

$$f(M) = \sum L_1 f - \sum L_1 L_2 f + \sum L_1 L_2 L_3 f - \ldots$$
$$+ (-1)^{s-1} L_1 L_2 \ldots L_s f + r_s(M), \tag{17}$$

где

$$r_s(M) = u^1(t^1) \ldots u^s(t^s) \begin{bmatrix} t^1, t^1_1, \ldots, t^1_{n_1+1} & \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & ;\ f(M) \\ t^s, t^s_1, \ldots, t^s_{n_s+1} & \end{bmatrix}, \tag{18}$$

и

$$L_k f = L_{t^k} f = L(t^k_1, t^k_2, \ldots, t^k_{n_k+1};\ f \mid t^k) =$$
$$= \sum_{i_k=1}^{n_k+1} l^k_{i_k}(t^k)\, f(t^1, \ldots, t^{k-1}, t^k_{i_k}, t^{k+1}, \ldots, t^s). \tag{19}$$

Определенный выше символ L является линейным (аддитивным и однородным) оператором. Заметим еще, что

$$L_i L_k f = L_k L_i f = L\begin{pmatrix} t^i_1, t^i_2, \ldots, t^i_{n_i+1} & & t^i \\ & ;\ f & \\ t^k_1, t^k_2, \ldots, t^k_{n_k+1} & & t^k \end{pmatrix} \text{ и т.д.}$$

Интересно также, что если обозначить через L_0 единичный оператор, обладающий свойствами

$$L_0 L_p f = L_p L_0 f = L_p f,$$

$$L_0^k f = L_0 f = f,$$

то интерполяционная формула (17) символически записывается в следующем виде

$$\prod_{i=1}^{s} (L_0 - L_i) f = r_s(M). \tag{20}$$

Пример. Если взять $s = 2$ и рассматривать узлы

$$M_{i,k}(x_i, y_k), \quad (i = \overline{1, n+1};\ \ k = \overline{1, m+1}), \tag{21}$$

то на основании формулы (17) имеем

$$f(x, y) = L_x f + L_y f - L_x L_y f + r_2(x, y) \tag{22}$$

или, в более развернутом виде,

$$f(x, y) = L(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1};\ f \mid x) + L(y_1, y_2, \ldots, y_{m+1};\ f \mid y) -$$
$$- L\begin{pmatrix} x_1, & x_2, \ldots, x_{n+1} & & x \\ & & ;\ f & \\ y_1, & y_2, \ldots, y_{m+1} & & y \end{pmatrix} + r_2(x, y), \tag{23}$$

где

$$r_2(x, y) = u(x)\, v(y) \begin{bmatrix} x, x_1, \ldots, x_{n+1} & \\ & ;\ f \\ y, y_1, \ldots, y_{m+1} & \end{bmatrix}, \tag{24}$$

причем

$$u(x) = \prod_{i=1}^{n+1} (x - x_i),\quad v(y) = \prod_{k=1}^{m+1} (y - y_k).$$

Ясно, что эту формулу можно записать также и в ньютоновом виде

$$f(x,y) = N(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}; f \mid x) + N(y_1, y_2, \dots, y_{m+1}; f \mid y) - \quad (25)$$

$$- N\left(\begin{matrix} x_1, x_2, \dots, x_{n+1} \\ y_1, y_2, \dots, y_{m+1} \end{matrix}; f \left| \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \right.\right) + r_2(x,y),$$

где, например, имеем

$$N(x_1\ x_2, \dots, x_{n+1}; f \mid x) = \sum_{i=1}^{n} (x - x_1) \dots (x - x_i)\,[x_1, x_2, \dots, x_{i+1}; f]$$

и

$$N\left(\begin{matrix} x_1, x_2, \dots, x_{n+1} \\ y_1, y_2, \dots, y_{m+1} \end{matrix}; f \left| \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \right.\right) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{k=0}^{m} (x - x_1) \dots (x - x_i)(y - y_1) \dots$$

$$\dots (y - y_k) \left[\begin{matrix} x_1, x_2, \dots, x_{i+1} \\ y_1, y_2, \dots, y_{k+1} \end{matrix}; f\right].$$

Формула (23) была впервые дана Л. Недером [9].

Выражение

$$L_x f + L_y f - L_{xy} f, \quad (26)$$

входящее в (22), является функцией вида

$$\sum_{i=0}^{n} x^i A_i(y) + \sum_{j=0}^{n} y^j B_j(x), \quad (27)$$

где $A_r(y)$, $B_s(x)$ — функции от y, соответственно x. Согласно введенному А. Маршо [10] термину, назовем такие функции псевдополиномами. В (26) речь идет о псевдополиноме, полностью определяемом своими значениями на сетке порядка (n, m): $x = x_i$, $y = y_k$ $(i = \overline{1, n+1};\ k = \overline{1, m+1})$.

Псевдополиномы изучались и применялись также проф. Т. Поповичем [11], [12] и акад. М. Николеску [6].

5. Если обозначить через

$$P(M) = P\left(\begin{matrix} t_1^1, t_2^1, \dots, t_{n_1+1}^1 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ t_1^s, t_2^s, \dots, t_{n_s+1}^s \end{matrix}; f \mid M\right) \quad (28$$

псевдополином порядка $(n_1, n_2, \dots, n_s)$, принимающий на сетке $t^k =$ $(i = \overline{1, n_\nu + 1};\ \nu = \overline{1, s})$ те же самые значения, что и функция $f(M$ определенная в промежутке (2

$$a_p \leqq t^p \leqq b_p,\ (p = \overline{1, s}), \quad (3$$

то формула (17) записывается в виде

$$f(M) = P(M) + r_s(M),$$

в котором она и была предложена проф. Т. Поповичем [13] для $s = 2$

§ 2. О НЕКОТОРЫХ РАЗЛОЖЕНИЯХ ТЕЙЛОРА ДЛЯ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

6. Известно, что если в случае одной переменной положить $x_1 = x_2 = \dots = x_{n+1} = a$ в интерполяционной формуле Ньютона

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} (x - x_1) \dots (x - x_i)\,[x_1, \dots, x_{i+1}; f] + u(x)\,[x, x_1, \dots, x_{n+1}; f], \quad (31)$$

то она превращается в формулу Тейлора

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(x-a)^i}{i!} f^{(i)}(a) + \rho, \quad (32)$$

где

$$\rho = (x - a)^{n+1}\,[x, a, \dots, a; f] = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi). \quad (33)$$

Формулу (31) можно, очевидно, выразить и в виде

$$f(x) = f(a) + \sum_{i=1}^{n} \int_a^x \frac{(x-t)^{i-1}}{(i-1)!} f^{(i)}(a)\,dt + \rho, \quad (34)$$

а остаточный член (33) можно выразить, как хорошо известно, в интегральном виде

$$\rho = \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt. \quad (35)$$

7. Следует отметить, что формула Тейлора для s-переменных, записываемая при помощи общеизвестных символических обозначений

$$f(M) = f(A) + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i!} \left[\frac{\partial}{\partial t^1} h_1 + \frac{\partial}{\partial t^2} h_2 + \dots + \frac{\partial}{\partial t^s} h_s\right]^n f(A) + \quad (36)$$

$$+ \frac{1}{(n+1)!} \left[\frac{\partial}{\partial t^1} h_1 + \frac{\partial}{\partial t^2} h_2 + \dots + \frac{\partial}{\partial t^s} h_s\right]^{n+1} f(Q),$$

где

$$A = A(a_1, \dots, a_s),\ Q = Q(a_1 + \theta h_1, \dots, a_s + \theta h_s), \quad (37)$$

$$0 < \theta < 1,\ h_i = t^i - a_i\ (i = \overline{1, s}),$$

получается из интерполяционной формулы (9) в предельном случае

$$t_{i_1}^1 = a_1, t_{i_2}^2 = a_2, \dots, t_{i_s}^s = a_s, \quad (38)$$

$$(i_1 = \overline{1, n+1};\ i_2 = \overline{1, n+2 - i_1};\ \dots;\ i_s = \overline{1, n+s - i_1 - \dots - i_{s-1}}).$$

8. Можно, однако, получить естественное распространение формулы Тейлора на функции s-переменных, если перейти к следующему предельному случаю

$$t_i^k = a_k \quad (i, k = \overline{1, s}) \tag{39}$$

интерполяционной формулы (12) Ньютона, когда получается

$$f(M) = \sum_{i_1=0}^{n_1} \cdots \sum_{i_s=0}^{n_s} \frac{(t^1 - a_1)^{i_1} \ldots (t^s - a_s)^{i_s}}{i_1! \ldots ! i_s!} \frac{\partial^{i_1 + \ldots + i_s} f(a_1, \ldots, a_s)}{\partial a_1^{i_1} \ldots \partial a_s^{i_s}} + R_s'(M), \tag{40}$$

где имеем на основании формулы (6)

$$\begin{aligned} R_s'(M) = \sum \frac{(t^1 - a_1)^{n_1+1}}{(n_1+1)!} \frac{\partial^{n_1+1} f(\xi_1, t^2, \ldots, t^s)}{\partial \xi_1^{n_1+1}} - \\ - \sum \frac{(t^1 - a_1)^{n_1+1} (t^2 - a_2)^{n_2+1}}{(n_1+1)!\,(n_2+1)!} \frac{\partial^{n_1+n_2+2} f(\xi_1, \xi_2, t^2, \ldots, t^s)}{\partial \xi_1^{n_1+1} \partial \xi_2^{n_2+1}} + \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ + (-1)^s \prod_{i=1}^{s} \frac{(t^i - a_i)^{n_i+1}}{(n_i+1)!} \cdot \frac{\partial^{n_1 + \ldots + n_s + s} f(\xi_1, \ldots, \xi_s)}{\partial \xi_1^{n_1+1} \ldots \partial \xi_s^{n_s+1}}. \end{aligned} \tag{41}$$

Например, в случае двух переменных мы имеем формулу Тейлора

$$f(x, y) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{k=0}^{m} \frac{(x-a)^i (y-b)^k}{i!\,k!} \frac{\partial^{i+k} f(a, b)}{\partial a^i \partial b^k} + R_2'(x, y), \tag{42}$$

где

$$\begin{aligned} R_2'(x, y) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \frac{\partial^{n+1} f(\xi, y)}{\partial \xi^{n+1}} + \frac{(y-b)^{m+1}}{(m+1)!} \frac{\partial^{m+1} f(x, \eta)}{\partial \eta^{m+1}} - \\ - \frac{(x-a)^{n+1} (y-b)^{m+1}}{(n+1)!\,(m+1)!} \frac{\partial^{n+m+2} f(\xi, \eta)}{\partial \xi^{n+1} \partial \eta^{m+1}}. \end{aligned} \tag{43}$$

9. Недавно М. Пиконе [4] и К. Бириндели [5], с одной стороны, и акад. М. Николеску [6], с другой, были разработаны некоторые формулы тейлорова типа, также вытекающие, как мы покажем ниже, из определенных интерполяционных формул для функций нескольких переменных.

10. Рассмотрим функцию $f(x, y)$, предполагая, что в точке $A(a, b)$ и в некоторой ее окрестности она допускает частные производные

$$\frac{\partial^{s+p} f(x, y)}{\partial x^s \, \partial y^p}, \quad (s, p = 0, 1, \ldots, n).$$

Если рассмотреть предельный случай

$$x_i = a, y_k = b \quad (i, k = \overline{1, n+1}), \tag{44}$$

то формула (25) при $m = n$ принимает вид

$$\begin{aligned} f(x, y) = N(a, a, \ldots, a; f \mid x) + N(b, b, \ldots, b; f \mid y) - \\ - N\begin{pmatrix} a, a, \ldots, a \\ b, b, \ldots, b \end{pmatrix}; f \left| \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \right) + (x-a)^{n+1} (y-b)^{n+1} \begin{bmatrix} a, a, \ldots a, x \\ b, b, \ldots b, y \end{bmatrix}; f \Bigg]. \end{aligned} \tag{45}$$

Учитывая явный вид интерполяционных полиномов Ньютона, получим

$$\begin{aligned} N(a, a, \ldots, a; f \mid x) + N(b, b, \ldots, b; f \mid y) - \\ - N\left(\begin{matrix} a, a, \ldots, a \\ b, b, \ldots, b \end{matrix}; f \left| \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \right.\right) = \sum_{i=1}^{n} B_{i,i}(x, y), \end{aligned} \tag{46}$$

где

$$\begin{aligned} B_{s,s}(x, y) = (x-a)^s \left\{ \left[\begin{matrix} a, a, \ldots, a \\ y \end{matrix}; f\right] - \sum_{j=0}^{s-1} (y-b)^k \left[\begin{matrix} a, a, \ldots, a \\ b, b, \ldots, b \end{matrix}; f\right] \right\} + \\ + (y-b)^s \left\{ \left[\begin{matrix} x \\ b, b, \ldots, b \end{matrix}; f\right] - \sum_{k=0}^{s-1} (x-a)^k \left[\begin{matrix} a, a, \ldots a, \\ b, b, \ldots b, \end{matrix}; f\right] \right\} - \\ - (x-a)^s (y-b)^s \left[\begin{matrix} a, a, \ldots a, \\ b, b, \ldots b, \end{matrix}; f\right]. \end{aligned} \tag{47}$$

Порядки входящих сюда разделенных разностей равны степеням их множителей $(x - a)$ и $(y - b)$.

Выражения (47) можно представить и в другом виде. Так, мы имеем

$$B_{0,0}(x, y) = f(a, y) + f(x, b) - f(a, b) = \left[\begin{matrix} a \\ y \end{matrix}; f\right] + \left[\begin{matrix} x \\ b \end{matrix}; f\right] - \left[\begin{matrix} a \\ b \end{matrix}; f\right].$$

$$\begin{aligned} B_{1,1}(x, y) = (x-a)\left(\left[\begin{matrix} a, a \\ y \end{matrix}; f\right] - \left[\begin{matrix} a, a \\ b \end{matrix}; f\right]\right) + (y-b)\left(\left[\begin{matrix} x \\ b, b \end{matrix}; f\right] - \left[\begin{matrix} a \\ b, b \end{matrix}; f\right]\right) - \\ - (x-a)(y-b)\left[\begin{matrix} a, a \\ b, b \end{matrix}; f\right] = \int_a^x \left(\left[\begin{matrix} a, a \\ y \end{matrix}; f\right] - \left[\begin{matrix} a, a \\ b \end{matrix}; f\right]\right) dt + \\ + \int_b^y \left(\left[\begin{matrix} x \\ b, b \end{matrix}; f\right] - \left[\begin{matrix} a \\ b, b \end{matrix}; f\right]\right) d\tau - (x-a)(y-b)\left[\begin{matrix} a, a \\ b, b \end{matrix}; f\right] = \\ = \int_a^x dt \int_b^y \left[\begin{matrix} a, a \\ \tau, \tau \end{matrix}; f\right] d\tau + \int_b^y d\tau \int_a^x \left[\begin{matrix} t, t \\ b, b \end{matrix}; f\right] dt - \int_a^x dt \int_b^y \left[\begin{matrix} a, a \\ b, b \end{matrix}; f\right] d\tau = \\ = \int_a^x \int_b^y \left\{ \left[\begin{matrix} a, a \\ \tau, \tau \end{matrix}; f\right] + \left[\begin{matrix} t, t \\ b, b \end{matrix}; f\right] - \left[\begin{matrix} a, a \\ b, b \end{matrix}; f\right] \right\} dt\, d\tau \quad \text{и т. д.} \end{aligned}$$

В общем случае доказывается, что

$$\begin{aligned} B_{s,s}(x, y) = \int_a^x \int_b^y dt\, d\tau \int_a^x \int_b^y dt\, d\tau \ldots \int_a^x \int_b^y \left\{ \left[\begin{matrix} a, a \ldots, a \\ \tau, \tau, \ldots, \tau \end{matrix}; f\right] + \right. \\ \left. + \left[\begin{matrix} t, t, \ldots, t \\ b, b, \ldots, b \end{matrix}; f\right] - \left[\begin{matrix} a, a, \ldots, a \\ b, b, \ldots, b \end{matrix}; f\right] \right\} dt\, d\tau. \end{aligned} \tag{48}$$

Все входящие в эти выражения разделенные разности имеют порядок (s, s).

Если ввести функции

$$M_2^p(x,y)=\begin{bmatrix} a, a, \ldots, a \\ y, y, \ldots, y \end{bmatrix}; f \Big] + \begin{bmatrix} x, x, \ldots, x \\ b, b, \ldots, b \end{bmatrix}; f\Big] - \begin{bmatrix} a, a, \ldots, a \\ b, b, \ldots, b \end{bmatrix}; f \Big] = \tag{49}$$

$$= \frac{\partial^{2p} f(a,y)}{\partial a^p\, \partial y^p} + \frac{\partial^{2p} f(x,b)}{\partial x^p\, \partial b^p} - \frac{\partial^{2p} f(a,b)}{\partial a^p\, \partial b^p},$$

то интерполяционная формула (45), в которую входит узел $A(a, b)$ кратности $n+1$, принимает вид

$$f(x,y) = M_2^0(x,y) + \int_a^x\!\!\int_b^y M_2^1(t,\tau)\,dt\,d\tau + \int_a^x\!\!\int_b^y dt\,d\tau \int_a^x\!\!\int_b^y M_2^2(t,\tau)\,dt\,d\tau + \ldots \tag{50}$$

$$+ \underbrace{\int_a^x\!\!\int_b^y dt\,d\tau \ldots \int_a^x\!\!\int_b^y}_{n\ \text{раз}} M_2^n(t,\tau)\,dt\,d\tau + R_2(x,y),$$

где

$$R_2(x,y) = (x-a)^{n+1}(y-b)^{n+1}\left[\begin{matrix} a, \ldots, a, x \\ b, \ldots, b, y \end{matrix}; f\right] = \tag{51}$$

$$= \frac{(x-a)^{n+1}(y-b)^{n+1}}{[(n+1)!]^2}\,\frac{\partial^{2n+2} f(\xi,\eta)}{\partial \xi^{n+1}\,\partial \eta^{n+1}},$$

причем ξ и η принадлежат наименьшим промежуткам, содержащим a и x, и соответственно b и y.

Первый член правой части формулы (50) имеет выражение

$$M_2^0(x,y) = B_{0,0}(x,y) = f(a,y) + f(x,b) - f(a,b).$$

Формула (50) приведена без всякого доказательства М. Пиконе в его известной книге *Appunti di analisi superiore* [3]*). Остаточный член дан в следующем интегральном виде

$$R_2(x,y) = \int_a^x\!\!\int_b^y \frac{(x-t)^n (y-\tau)^n}{(n!)^2}\,\frac{\partial^{2n+2} f(t,\tau)}{\partial t^{n+1}\,\partial \tau^{n+1}}\,dt\,d\tau. \tag{52}$$

11. Если воспользуемся формулой Коши, преобразующей повторный интеграл в однократный интеграл, примененный в определенной функции, то получим

$$\int_a^x\!\!\int_b^y dt\,d\tau \int_a^x\!\!\int_b^y dt\,d\tau \ldots \int_a^x\!\!\int_b^y M_2^p(t,\tau)\,dt\,d\tau = \tag{53}$$

$$= \frac{1}{[(p-1)!]^2}\int_a^x\!\!\int_b^y (x-t)^{p-1}(y-\tau)^{p-1} M^p(t,\tau)\,dt\,d\tau.$$

*) Стр. 598.

После этих преобразований формула (50) принимает вид

$$f(x,y) = M_2^0(x,y) + \int_a^x\!\!\int_b^y M_2^1(t,\tau)\,dt\,d\tau + \int_a^x\!\!\int_b^y (x-t)(y-\tau) M_2^2(t,\tau)\,dt\,d\tau + \ldots$$

$$+ \int_a^x\!\!\int_b^y (x-t)^{n-1}(y-\tau)^{n-1} M_2^n(t,\tau)\,dt\,d\tau + R_2(x,y), \tag{54}$$

причем остаточный член имеет выражение (52).

Эта формула была также получена М. Пиконе [4] и рассматривалась им как обобщение формулы (34) на случай двух переменных.

Согласно вышеуказанному, это сводится к тому, что формула (42) представляет собой обобщение формулы (32) на функции двух переменных.

12. Предыдущие результаты можно немедленно распространить на функции s-переменных путем использования интерполяционной формулы (17), в которой выражения полиномов Лагранжа заменяются выражениями полиномов Ньютона.

Положим

$$n_1 = n_2 = \ldots = n_s = n,\ t_i^k = a_k,\ (i = \overline{1, n_k+1};\ k = \overline{1, s}) \tag{55}$$

и введем функции

$$M_s^p(P) = \begin{bmatrix} a_1 \\ t^2 \\ t^3;\ f \\ \vdots \\ t^s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t^1 \\ a_2 \\ t^3;\ f \\ \vdots \\ t^s \end{bmatrix} + \ldots + \begin{bmatrix} t^1 \\ t^2 \\ \vdots\ \ ;f \\ t^{s-1} \\ a_s \end{bmatrix} -$$

$$- \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ t^3;\ f \\ \vdots \\ t^s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_1 \\ t^2 \\ a_3;\ f \\ t^4 \\ \vdots \\ t^s \end{bmatrix} - \ldots - \begin{bmatrix} t^1 \\ \vdots \\ t^{s-2};f \\ a_{s-1} \\ a_s \end{bmatrix} + \ldots \tag{56}$$

$$+ (-1)^s \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots\ ;\ f \\ a_s \end{bmatrix},$$

где, например,

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ t^3;\ f \\ \vdots \\ t^s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1, a_1, \ldots, a_1 \\ a_2, a_2, \ldots, a_2 \\ t^3, t^3, \ldots, t^3;\ f \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ t^s, t^s, \ldots, t^s \end{bmatrix}$$

представляет собой разделенную разность порядка $(p, p, \ldots, p)$ функции $f(P)$ в точках выявленных координат.

Учитывая определение разделенной разности в кратных точках, имеем

$$M_s^p(x,y) = \frac{\partial^{sp} f(a_1, t^2, \ldots, t^s)}{\partial a_1^p\, \partial (t^2)^p \ldots \partial (t^s)^p} + \ldots + \frac{\partial^{sp} f(t^1, \ldots, t^{s-1}, a_s)}{\partial (t^1)^p \ldots \partial (t^s)^p\, \partial a_s^p} -$$

$$- \frac{\partial^{sp} f(a_1, a_2, t^3, \ldots, t^s)}{\partial a_1^p\, \partial a_2^p\, \partial (t^3)^p \ldots \partial a_s^p} - \ldots - \frac{\partial^{sp} f(t^1, \ldots, t^{s-2}, a_{s-1}, a_s)}{\partial (t^1)^p \ldots \partial (t^{s-2})^p\, \partial a_{s-1}^p\, \partial a_s^p} + \tag{57}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+ (-1)^{s-1} \frac{\partial^{sp} f(a_1, \ldots, a_s)}{\partial a_1^p \ldots \partial a_s^p}.$$

Применяя интерполяционную формулу (17), получим формулу Тейлора

$$f(P) = M_s^0(P) + \sum_{r=1}^{n} I^{-r} M_s^r(Q) + R_s(P), \tag{58}$$

где

$$P = P(t^1, t^2, \ldots, t^s),\ Q = Q(u_1, u_2, \ldots, u_s)$$

и

$$R_s(P) = \prod_{i=1}^{s} (t^i - a_i)^{n+1} \begin{bmatrix} t^1, a_1, \ldots, a_1 \\ t^2, a_2, \ldots, a_2 \\ \cdots\cdots \\ t^s, a_s, \ldots, a_s \end{bmatrix}; f \Bigg].$$

Мы выше пользовались обозначением

$$I^{-1} f(Q) = \int_{a_1}^{t^1}\int_{a_2}^{t^2} \ldots \int_{a_s}^{t^s} f(Q)\, dQ = \int_{a_1}^{t^1}\int_{a_2}^{t^2} \ldots \int_{a_s}^{t^s} f(u_1, u_2, \ldots, u_s)\, du_1 du_2 \ldots du_s; \tag{59}$$

$$I^{-k} = I^{-1}(I^{-k+1}).$$

Если применить последовательно формулу Дирихле относительно каждой переменной, то можно сократить повторное s-кратные интегралы в правой части формулы (58) и в результате получить

$$f(P) = M_s^0(P) + \sum_{k=1}^{n} \int_{a_1}^{t^1}\int_{a_2}^{t^2} \ldots$$

$$\ldots \int_{a_s}^{t^s} \frac{[(t^1 - u_1) \ldots (t^s - u_s)]^{k-1}}{[(k-1)!]^s} M_s^k(Q)\, dQ + R_s(P). \tag{60}$$

Остаточный член может быть представлен и в интегральном виде

$$R_s(P) = \int_{a_1}^{t^1} \ldots \int_{a_s}^{t^s} \frac{[(t^1 - u_1) \ldots (t^s - u_s)]^n}{[n!]^s} \frac{\partial^{s(n+1)} f(u_1, \ldots, u_s)}{\partial u_1^{n+1} \ldots \partial u_s^{n+1}}\, dQ.$$

Формула (60), обобщающая формулу (54) М. Пиконе, была недавно получена К. Бираинделли [5].

13. Заметим, что в формулу (50) входят лишь частные производные вида

$$\frac{\partial^{2r} f(x,y)}{\partial x^r\, \partial y^r}.$$

Однако примененный при выводе этой формулы метод заставил нас предположить, что $f(x,y)$ допускает на прямых $x = a$, $y = b$ все производные

$$\frac{\partial^{i+k} f(x,y)}{\partial x^i\, \partial y^k},\ (i, k = 0, 1, \ldots, n+1).$$

Впрочем, полезно иметь такие формулы.

В недавно опубликованной работе [6] акад. М. Николеску предложил формулу, имеющую вид (50), в которой, однако, оператор $\frac{\partial^2}{\partial x\, \partial y}$ заменен оператором D, непосредственно определяемым соотношением

$$Df = \lim_{\substack{h \to 0 \\ k \to 0}} \frac{\Delta_2 f(x,y)}{hk}, \tag{61}$$

где

$$\Delta_2 f(x,y) = f(x+h, y+k) - f(x+h, y) - f(x, y+k) + f(x,y).$$

Этот предел, если он существует, назван автором гиперболической производной $f(x,y)$.

Еще в 1932 г. Д. Помпею в краткой заметке [14] обратил внимание на то, что на основании непосредственного определения оператора $D = \frac{\partial^2}{\partial x\, \partial y}$ можно разработать теорию для функции двух переменных, исходя из теории для функций одной переменной. Систематические исследования в этом направлении были предприняты в 1934 и 1935 гг. К. Бегелем [15], [16]. Их результаты были продолжены и уточнены акад. М. Николеску [17], [18]. В работе [6] содержится важное теоретическое исследование в этом направлении.

14. Рассмотрим функцию $\varphi(x,y)$, определенную в двумерном промежутке

$$a_1 \leqq x \leqq a_2,\quad b_1 \leqq y \leqq b_2 \qquad (T_2)$$

и допускающую в этом промежутке гиперболические производные до $n+1$-порядка включительно.

Пусть $P(a,b)$ — произвольная точка из (T_2). Полагая в формуле (23) $n = m = 0$ и $x = a$, $y = b$, получим формулу

$$f(x,y) = f(a,y) + f(x,b) - f(a,b) + (x-a)(y-b)\left[\begin{smallmatrix} a, x \\ b, y \end{smallmatrix}; f\right]. \tag{62}$$

Если положить в этой формуле

$$f(x,y) = D^n \varphi(x,y) = D[D^{n-1} \varphi(x,y)], \tag{63}$$

то получим

$$D^n\varphi(x,y) = D^n\varphi(a,y) + D^n\varphi(x,b) - D^n\varphi(a,b) + (x-a)(y-b)\left[\begin{matrix}a, x\\ b, y\end{matrix};\ D^n\varphi(x,y)\right]. \tag{64}$$

Введем обозначения

$$D^{-1}\psi(x,y) = \int_a^x\int_b^y \psi(u,v)\,du\,dv. \tag{65}$$

Имеем

$$D^{-s} = D^{-1}(D^{-s+1}),\quad D^0 f(x,y) = f(x,y).$$

Применяя определенный в (65) оператор к обеим частям равенства (64), получим

$$D^{n-1}\varphi(x,y) = D^{-1}[D^n\varphi(a,y) + D^n\varphi(x,b) - D^n\varphi(a,b)] + f_{n-1}(x) + g_{n-1}(y) + \int_a^x\int_b^y (x-a)(y-b)\left[\begin{matrix}a, x\\ b, y\end{matrix};\ D^n\varphi\right]dx\,dy. \tag{66}$$

Гиперболическая постоянная $f_{n-1}(x) + g_{n-1}(y)$ немедленно определяется. Действительно, положив в (66) $x = a$ и $y = b$, получим

$$D^{n-1}\varphi(a,y) = f_{n-1}(a) + g_{n-1}(y),\ D^{n-1}\varphi(x,b) = f_{n-1}(x) + g_{n-1}(b),$$
$$D^{n-1}\varphi(a,b) = f_{n-1}(a) + g_{n-1}(b).$$

Отсюда вытекает, что

$$f_{n-1}(x) + g_{n-1}(y) = D^{n-1}\varphi(a,y) + D^{n-1}\varphi(x,b) - D^{n-1}\varphi(a,b).$$

Учитывая это, (66) принимает вид

$$D^{n-1}\varphi(x,y) = D^{-1}[D^n\varphi(a,y) + D^n\varphi(x,b) - D^n\varphi(a,b)] + D^{n-1}\varphi(a,y) + D^{n-1}\varphi(x,b) - D^{n-1}\varphi(a,b) + \int_a^x\int_b^y (x-a)(y-b)\left[\begin{matrix}a, x\\ b, y\end{matrix};\ D^n\varphi\right]dx\,dy. \tag{67}$$

Последовательно применяя определенный в (65) оператор D^{-1} и определяя вводимые гиперболические постоянные, получим после k этапов формулу

$$D^{n-k}\varphi(x,y) = \sum_{i=0}^{k} D^{i-k}[D^{n-i}\varphi(a,y) + D^{n-i}\varphi(x,b) - D^{n-i}\varphi(a,b)] + R_{n-k}(x,y), \tag{68}$$

где

$$R_{n-k}(x,y) = \int_a^x\int_b^y dx\,dy \dots \int_a^x\int_b^y (x-a)(y-b)\left[\begin{matrix}a, x\\ b, y\end{matrix};\ f\right]dx\,dy =$$

$$= \frac{1}{[(k-1)!]^2}\int_a^x\int_b^y (x-t)^{k-1}(y-\tau)^{k-1}(t-a)(\tau-b)\left[\begin{matrix}a, t\\ b, \tau\end{matrix};\ D^n\varphi(t,\tau)\right]dt\,d\tau =$$

$$= \frac{1}{[(k-1)!]^2}\left[\begin{matrix}a, \xi_k'\\ b, \eta_k'\end{matrix};\ D^n\varphi(\xi_k', \eta_k')\right]\int_a^x\int_b^y (x-t)^{k-1}(y-\tau)^{k-1}(t-a)(\tau-b)\,dt\,d\tau =$$

$$= \frac{[(x-a)(y-b)]^{k+1}}{[(k+1)!]^2}D^{n+1}\varphi(\xi_k, \eta_k). \tag{69}$$

При $n = k$ получим найденную акад. М. Николеску формулу

$$\varphi(x,y) = \sum_{i=0}^{n} D^{i-n}[D^{n-i}\varphi(a,y) + D^{n-i}\varphi(x,b) - D^{n-i}\varphi(a,b)] + \frac{(x-a)^{n+1}(y-b)^{n+1}}{[(n+1)!]^2}D^{n+1}\varphi(\xi,\eta), \tag{70}$$

где $\xi = \xi_n$, $\eta = \eta_n$ содержатся соответственно в промежутках (a, x), (b, y).

15. Учитывая выражение дополнительного члена (69) формулы (68) и способ последовательного определения функций $f_{n-j}(x)$, $g_{n-j}(y)$ $(j = \overline{1, k})$, находим, что псевдополином

$$P_{n-k}(x,y) = \sum_{i=0}^{k} D^{i-k}[D^{n-i}\varphi(a,y) + D^{n-i}\varphi(x,b) - D^{n-i}\varphi(a,b)] \tag{71}$$

удовлетворяет условиям

$$\left.\begin{aligned} D^{n-s}P_{n-k}(a,y) &= D^{n-s}\varphi(a,y)\\ D^{n-s}P_{n-k}(x,b) &= D^{n-s}\varphi(x,b)\quad (s = 0, 1, \dots, k)\\ D^{n-s}P_{n-k}(a,b) &= D^{n-s}\varphi(a,b)\end{aligned}\right\} \tag{72}$$

Эти замечания справедливы при $k = 0, 1, \dots, n$.

16. Применяя вышеуказанный метод, можно немедленно распространить полученную акад. М. Николеску формулу (70) на функции нескольких переменных.

Рассмотрим функцию $f(M) = f(t^1, t^2, \dots, t^s)$, определенную в гиперпараллелепипеде

$$b_i \leqq t^i \leqq c_i \quad (i = \overline{1, s}). \tag{T_s}$$

Под s-мерной производной или под гиперболической производной порядка s функции $f(M)$ мы будем подразумевать следующий предел, если он существует,

$$D_s f \doteq D_s f(M) = \lim_{\substack{h_1\to 0\\ \dots\\ h_s\to 0}} \frac{\left[\begin{matrix}t^1, t^1+h_1\\ t^2, t^2+h_2\\ \dots\dots\\ t^s, t^s+h_s\end{matrix};\ f\right]}{h_1 h_2 \dots h_s} \tag{73}$$

Оператор D_s^ν обозначает $D_s(D_s^{\nu-1})$.

Мы будем пользоваться и обратным оператором, определенным соотношением

$$D_s^{-1} f(M) = \int_{a_1}^{t^1} \cdots \int_{a_s}^{t^s} f(Q)\, dQ, \tag{74}$$

$$D_s^{-r} = D_s^{-1}(D_s^{-r+1}),\quad r = 2, 3, \ldots$$

Пусть $A(a_1, a_2, \ldots, a_s)$ — произвольная точка в (T_s).

Если в интерполяционной формуле (17) положить

$$n_1 = n_2 = \ldots = n_s = 0,\quad t_1^k = a_k,\ (k = \overline{1, s}), \tag{75}$$

то получим

$$\begin{aligned} f(M) = {} & f(a_1, t^1, \ldots, t^s) + \ldots + f(t^1, \ldots, t^{s-1}, a_s) - \\ & - f(a_1, a_2, t^3, \ldots, t^s) - \ldots - f(t^1, \ldots, t^{s-2}, a_{s-1}, a_s) + \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + (-1)^{s-1} f(a_1, a_2, \ldots, a_s) + r_s(M), \end{aligned} \tag{76}$$

где

$$r_s(M) = (t^1 - a_1) \ldots (t^s - a_s) \begin{bmatrix} t^1, t_1^1 & \\ t^2, t_1^2 & ; f \\ \cdots & \\ t^s, t_1^s & \end{bmatrix}. \tag{77}$$

Положив в формулу (76) $f(M) = D_s^n \varphi(M)$, где $\varphi(M)$ — определенная в (T_s) и $n+1$ раз s-мерно-дифференцируемая функция, получим

$$\begin{aligned} D_s^n \varphi(M) = {} & D_s^n \varphi(a_1, t^1, \ldots, t^s) + \ldots + D_s^n \varphi(t^1, \ldots, t^{s-1}, a_s) - \\ & - D_s^n \varphi(a_1, a_2, t^3, \ldots, t^s) - \ldots - D_s^n \varphi(t^1, \ldots, t^{s-2}, a_{s-1}, a_s) + \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + (-1)^{s-1} D_s^n \varphi(a_1, a_2, \ldots, a_s) + \\ & + (t^1 - a_1) \ldots (t^s - a_s) \begin{bmatrix} t^1, t_1^1 & \\ t^2, t_1^2 & ; D_s^n \varphi \\ \cdots & \\ t^s, t_1^s & \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Применяя последовательно $n+1$ раз оператор, определенный (74), и, вычисляя каждый раз гиперболические постоянные, получим общую формулу

$$\begin{aligned} \varphi(M) = \sum_{i=0}^{n} D_s^{i-n} \big[& D_s^{n-i} \varphi(a_1, t^2, \ldots, t^s) + \ldots + D_s^{n-i} \varphi(t^1, \ldots, t^{s-1}, a_s) - \\ & - D_s^{n-1} \varphi(a_1, a_2, t^3, \ldots, t^s) - D_s^{n-i} \varphi(a_1, t^2, a_3, t^4, \ldots, t^s) - \\ & - \ldots - D_s^{n-i} \varphi(t^1, \ldots, t^{s-2}, a_{s-1}, a_s) + \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + (-1)^{s-1} D_s^{n-i} \varphi(a_1, \ldots, a_s) \big] + R_s(M), \end{aligned} \tag{78}$$

где

$$R_s(M) = \frac{[(t^1 - a_1) \ldots (t^s - a_s)]^{n+1}}{[(n+1)!]^s} D_s^{n+1} \varphi(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_s),$$

и

$$\xi_i \in [t^i, a_i] \quad (i = 1, 2, \ldots, s).$$

Входящий в правую часть формулы (78) гиперболический псевдополином и его последовательные гиперболические производные до n — 1-го порядка соответственно совпадают со значениями, применяемыми функцией $\varphi(M)$ и ее последовательными производными до n — 1-го порядка на гиперплоскостях

$$t^1 = a_1,\ t^2 = a_2, \ldots, t^s = a_s.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. D. D. STANCU, *Considerații asupra interpolării polinomiale a funcțiilor de mai multe variabile.* Bul. Univ. „V. Babeș și Bolyai", Cluj, Seria Șt. Nat., 1957, **1**, *1—2*, 43—82.
2. — *Generalizarea unor polinoame de interpolare pentru funcțiile de mai multe variabile.* Bul. Inst. Politehnic Iași, 1957, **3** (**7**), *1—2*, 31—38.
3. M. PICONE, *Appunti di analisi superiore.* Rondinella, Napoli, 1940, стр. 595 — 599.
4. — *Vedute generali sull'interpolazione e qualche loro consequenza.* Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, 1951, Ser. 3, **5**, *3—4*.
5. C. BIRINDELLI, *Sul calcolo numerico degli integrali multipli.* Consiglio Naz. Ricerche Publ. Ist. App. Calcolo, 1951, *318*, 40—44.
6. M. NICOLESCU, *Contribuțiuni la o analiză de tip hiperbolic a planului.* Studii și cercetări matematice, Acad. R.P.R., 1952, **3**, *1—2*, 181.
7. J. F. STEFFENSEN *Interpolation.* Baltimore, 1950.
8. O. BIERMANN, *Über näherungsweise Kubaturen.* Monatsh. f. Math. u. Physik, 1903, **14**, 211.
9. L. NEDER, *Interpolationsformeln für Funktionen mehrerer Argumente.* Scandinavisk Aktuarietdskrift, 1926, **9**, 59.
10. A. MARCHAUD, *Sur les dérivées et sur la différence des fonctions de variables réelles.* Journ. de Math. pures et appl., 1927, **6**, 337.
11. T. POPOVICIU, *Sur quelques propriétés des fonctions d'une ou de deux variables réelles.* Mathematica, 1934, **8**, 1—85.
12. — *Sur les solutions bornées et les solutions mesurables de certaines équations fonctionnelles.* Mathematica, 1938, **14**, 47.
13. — *Les fonctions convexes.* Actualités Sci. et Ind., 1944, N° 992.
14. D. POMPEIU, *Sur les fonctions de deux variables réelles.* C. R. Acad. Sci. Paris, 1932, **194**, 346.
15. K. BÖGEL, *Mehrdimensionale Differentiation von Funktionen mehrerer Veränderlichen.* Crelles Journ., 1934, **170**, 197.
16. — *Über mehrdimensionale Differentiation, Integration und beschränkte Variation.* Crelles Journ., 1935, **173**, 5.
17. M. NICOLESCU, *Sur quelques propositions d'Analyse infinitésimale pluridimensionnelle.* C. R. Acad. Sci. Roumaine, 1938, **2**, 228.
18. — *Continuité et dérivation polydimensionnelle et laplacienne des suites.* Revue Mathém. de l'Union Interbalkanique, 1940, **3**, 1.