(15.)

ASUPRA APROXIMĂRII PRIN POLINOAME DE TIP BERNSTEIN A FUNCȚIILOR DE DOUĂ VARIABILE

DE

D. D. STANCU

Comunicare prezentată de T. POPOVICIU, *membru corespondent al Academiei R.P.R., în ședința din 7 februarie 1959*

1. În această notă vom prezenta succint unele rezultate referitoare la aproximarea unei funcții de două variabile prin polinomul de tip Bernstein

$$B_n(x,\ y) = B_n(x,\ y\ ;\ f) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-i} p_n^{i,j}(x,y)\ f\left(\frac{i}{n},\ \frac{j}{n}\right), \tag{1}$$

unde

$$p_n^{i,j}(x,\ y) = \binom{n}{i}\binom{n-i}{j}\, x^i\, y^j\, (1-x-y)^{n-i-j}. \tag{2}$$

Acest polinom este de gradul n în raport cu ambele variabile și folosește nodurile distincte

$$M_{i,j}\left(\frac{i}{n},\ \frac{j}{n}\right)\ (j = 0,1,\ldots,\ n-i\ ;\ i = 0,1,\ldots,n),$$

situate pe triunghiul dreptunghic Δ definit de

$$x + y - 1 \leqq 0,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0. \tag{3}$$

2. Avînd în vedere că oricare sînt x și y reali avem

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-i} p_n^{i,j}(x,y) = 1,\quad \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-i} \mid i - nt^{(\nu)} \mid p_n^{i,j}(t^{(1)},\ t^{(2)}) \leqq \frac{\sqrt{n}}{2}, \tag{4}$$

unde $\nu = 1$ sau $\nu = 2$ şi $(t^{(1)}, t^{(2)}) \in \Delta$, se demonstrează — aşa cum a făcut S. N. Bernstein [1] în cazul unei singure variabile — că are loc

Teorema 1. *Dacă $f(x, y)$ este o funcţie continuă pe Δ, atunci şirul de polinoame $\{B_n(x, y; f)\}$ converge uniform pe Δ către $f(x, y)$.*

Prin transformările liniare

$$t = a + (b-a)\,x, \quad \tau = c + (d-c)y$$

triunghiul Δ se transformă în triunghiul T de vîrfuri

$$A\ (a, c),\ B\ (b, c),\ C\ (a, d).$$

Rezultă imediat că are loc

Consecinţa 1. *Dacă $f(x, y)$ e o funcţie continuă pe T, atunci ea admite pe acest domeniu o aproximaţie uniformă printr-un şir de polinoame $\{Q_n(x,y)\}$, unde*

$$Q_n(x, y) = B_n\left(\frac{x-a}{b-a}, \frac{y-c}{d-c}\right).$$

Folosind rezultatele de mai sus se poate enunţa

Teorema 2. *Oricare ar fi funcţia $f(x, y)$, definită şi continuă pe un domeniu mărginit şi închis D din planul xOy, ea admite o aproximare uniformă printr-un şir de polinoame $\{P_n(x, y)\}$.*

3. E bine cunoscut rezultatul lui T. Popoviciu [2] referitor la evaluarea ordinului cu care polinomul lui Bernstein $B_n(x; f)$ aproximează o funcţie $f(x)$. Un rezultat analog se obţine şi în cazul polinoamelor (1), deoarece are loc

Teorema 3. *Dacă $f(x, y)$ e o funcţie continuă pe domeniul Δ, avem*

$$|f(x, y) - B_n(x, y; f)| \leqq 2\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right), \tag{5}$$

*unde $\omega(\delta)$ e modulul de continuitate al lui $f(x, y)$**.

În cazul particular cînd $f(x, y)$ se bucură de proprietatea că oricare ar fi $(x_i, y_i) \in \Delta (i = 1, 2)$ există un număr pozitiv N astfel ca să avem

$$|f(x_2, y_2) - f(x_1, y_1)| \leqq N\,[\,|x_2 - x_1|^\alpha + |y_2 - y_1|^\alpha\,] \quad (\alpha > 0),$$

inegalitatea (5) ne conduce la

$$|f(x, y) - B_n(x, y; f)| \leqq \frac{2N}{\sqrt{n^\alpha}}.$$

4. În cazul polinoamelor (1) se poate stabili şi un rezultat analog cu un rezultat clasic al lui E. V. Voronovskaia [3], după cum rezultă din

*) El e definit astfel: $\omega(\delta) = \max|f(x_2, y_2) - f(x_1, y_1)|$, unde (x_1, y_1) şi (x_2, y_2) sînt două puncte din Δ astfel ca $|x_2 - x_1| + |y_2 - y_1| \leqq \delta$.

Teorema 4. *Dacă funcţia $f(x, y)$ are pe Δ derivatele parţiale de ordinul 2 continue, atunci are loc egalitatea*

$$\lim_{n\to\infty} n[B_n(x, y; f) - f(x, y)] = \frac{1}{2}\,x\,(1-x) f''_{x^2}(x, y) - xy f''_{xy}(x,y) + \frac{1}{2}\,y(1-y) f''_{y^2}(x, y). \tag{6}$$

În demonstraţie se ţine seama de identitatea

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-i}\left(\frac{i}{n} - x\right)\left(\frac{j}{n} - y\right) p_n^{i,j}(x, y) = -\frac{xy}{n}.$$

5. Făcînd ipoteza că $f(x, y)$ admite pe Δ derivate parţiale continue pînă la un anumit ordin m, ne punem întrebarea (aşa cum a făcut S. Wigert [4] în cazul unei singure variabile) dacă este valabil că

$$\frac{\partial^{r+s} B_n(x, y; f)}{\partial x^r\, \partial y^s} \longrightarrow \frac{\partial^{r+s} f(x, y)}{\partial x^r\, \partial y^s}, \quad (x, y) \in \Delta,\ (0 \leqq r+s \leqq m < n).$$

Răspunsul la această întrebare e afirmativ. Se poate da chiar şi o evaluare a ordinului de aproximaţie, cum rezultă din

Teorema 5. *Dacă $f(x,y)$ are derivata $\dfrac{\partial^{r+s} f(x,y)}{\partial x^r\, \partial y^s}$ $(0 \leqq r + s < n)$ continuă pe Δ, atunci avem*

$$\left|\frac{\partial^{r+s} f(x, y)}{\partial x^r\, \partial y^s} - \frac{\partial^{r+s} B_n(x, y; f)}{\partial x^r\, \partial y^s}\right| \leqq$$

$$\leqq \left(1 + \sqrt{1 + 2\,(r + s)}\right)\omega_{r,s}\left(\frac{1}{\sqrt{n - r - s}}\right) + \frac{(r+s)(r+s-1)}{2n}\, M_{r,s}, \tag{7}$$

unde

$$M_{r,s} = \max_{\Delta}\left|\frac{\partial^{r+s} f(x,y)}{\partial x^r\, \partial y^s}\right|,$$

iar $\omega_{r,s}(\delta)$ este modulul de continuitate al derivatei care figurează mai sus.

Pentru demonstraţia acestei teoreme am stabilit mai întîi formula

$$\frac{1}{r!\,s!}\;\frac{\partial^{r+s} B_n(x,y)}{\partial x^r\, \partial y^s} =$$

$$= \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{r+s-1}{n}\right)\sum_{i=0}^{n-r-s}\;\sum_{j=0}^{n-r-s-i} p_n^{i,j}(x,y)\, D_{i,j}^{r,s}(f), \tag{8}$$

unde

$$D_{i,j}^{r,s}(f) = \begin{bmatrix} \frac{i}{n}, & \frac{i+1}{n}, \ldots, & \frac{i+r-1}{n}, & \frac{i+r}{n} \\ & & & & ; f \\ \frac{j}{n}, & \frac{j+1}{n}, \ldots, & \frac{j+s-1}{n}, & \frac{j+s}{n} \end{bmatrix}$$

este diferența divizată parțială a funcției $f(x, y)$ pe punctele puse în evidență.

Această formulă se poate exprima și cu ajutorul diferențelor simple, deoarece

$$D_{i,j}^{r,s}(f) = \frac{n^{r+s}}{r!\,s!} \Delta^{r,s}_{\frac{1}{n},\frac{1}{n}} f\left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}\right) =$$

$$= \frac{n^{r+s}}{r!\,s!} \sum_{\nu=0}^{r} \sum_{\mu=0}^{s} (-1)^{\nu+\mu} \binom{r}{\nu} \binom{s}{\mu} f\left[\frac{i}{n} + \frac{r-\nu}{n}, \frac{j}{n} + \frac{s-\mu}{n}\right].$$

Cu acestea avem

$$\frac{1}{n(n-1)\ldots(n-r-s-1)} \frac{\partial^{r+s} B_n(x,y)}{\partial x^r \, \partial y^s} = \sum_{i=0}^{n-r-s} \sum_{j=0}^{n-r-s-i} p^{i,j}_{n-r-s}(x, y) \Delta^{r,s}_{\frac{1}{n},\frac{1}{n}} f\left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}\right). \quad (9)$$

6. Dacă se ține seama de formulele (8) sau (9) se constată — așa cum a făcut T. P o p o v i c i u [2], [5] în cazul unei singure variabile — că polinoamele (1) conservă proprietățile de convexitate pe care eventual le are funcția $f(x,y)$ considerată.

О ПРИБЛИЖЕНИИ МНОГОЧЛЕНАМИ БЕРНШТЕЙНОВСКОГО ТИПА ФУНКЦИЙ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

В заметке приведены некоторые теоремы, касающиеся приближения функции $f(x, y)$ и ее частных производных, многочленами бернштейновского типа вида (1). При этом обобщаются на случай двух переменных несколько важных результатов С. Н. Бернштейна, Т. Поповичиу, Е. В. Вороновской и С. Вигерта.

DE L'APPROXIMATION, PAR DES POLYNÔMES DU TYPE BERNSTEIN, DES FONCTIONS DE DEUX VARIABLES

RÉSUMÉ

On trouvera dans cette Note plusieurs théorèmes relatifs à l'approximation d'une fonction $f(x, y)$ et de ses dérivées partielles par des polynômes du type Bernstein (cf. [1]). A cette occasion, on a étendu à deux variables quelques résultats importants obtenus par S. N. Bernstein, T. Popoviciu, E. V. Voronovskaïa et S. Wigert.

BIBLIOGRAFIE

1. S. N. BERNSTEIN, *Démonstration du théorème de Weierstrass fondée sur le calcul des probabilités*. Сообщ. Харьк. Матем. об-ва, **13** (2) 1–2, (1912).
2. T. POPOVICIU, *Sur l'approximation des fonctions convexes d'ordre supérieur.* Mathematica, **10**, 49–54 (1935).
3. Е. В. ВОРОНОВСКАЯ, *Определение асимптотического вида приближения функций полиномами С. Н. Бернштейна.* ДАН СССР, 79—85 (1932).
4. S. WIGERT, *Sur l'approximation par polynômes des fonctions continues.* Arkiv. för Mat. Astr., Fys., **22**, *9*, 1–4 (1932).
5. T. POPOVICIU, *Despre cea mai bună aproximație a funcțiilor continue prin polinoame.* Cluj, 1937.