

16.

SUR QUELQUES FORMULES GÉNÉRALES  
DE QUADRATURE DU TYPE GAUSS-CHRISTOFFEL

par

D. D. STANCU

à Cluj

Introduction

On sait qu'une première généralisation de la formule de quadrature de F. C. GAUSS [1] est due à E. B. CHRISTOFFEL [2], lequel considérait  $s$  noeuds fixes — qui ne se trouvent pas à l'intérieur de l'intervalle d'intégration — et déterminait d'autres  $m$  noeuds, de manière que la formule de quadrature respective ait le degré d'exactitude maximum. Entre temps, certains mathématiciens: F. G. MEJLER [3], C. A. POSSÉ [4], E. HEINE [5], T. J. STIELTJES [6], A. MARKOFF [7], J. DERUYTS [8], etc., ont fait aussi des généralisations moins essentielles de la formule de quadrature de Gauss, en multipliant la fonction à intégrer par une certaine fonction de poids. Cependant, une généralisation importante et effective de la formule de quadrature de Gauss a été faite, dans le dernier temps, par P. TURÁN [9], L. TCHAKALOFF [10] et T. POPOVICIU [11]. Par les travaux de ces mathématiciens — et spécialement de T. Popoviciu — on est arrivé à une formule très générale du type Gauss, laquelle emploie  $m$  noeuds multiples, d'ordres de multiplicité impairs donnés, lesquels noeuds se déterminent de telle manière que la formule de quadrature respective ait le degré d'exactitude maximum. Nous généraliserons cette dernière formule dans le sens dans lequel Christoffel a généralisé la formule classique de Gauss; à savoir, nous considérerons  $s$  noeuds multiples, fixes — à une certaine restriction près — n'importe où sur l'axe réel, et nous essayerons de déterminer d'autres  $m$  noeuds, d'ordres de multiplicité impairs donnés, de façon que la formule de quadrature que l'on obtient ait le degré d'exactitude maximum. Dans les travaux [12,13], nous avons déjà obtenu quelques résultats partiels, mais dans ce travail nous construirons une formule de quadrature très générale et présentant une grande symétrie.

### § 1. Sur une formule générale d'intégration numérique

1. Considérons une fonctionnelle linéaire de la forme

$$(1) \quad U[f] = \int_a^b f(x) d\psi(x),$$

où  $\psi(x)$  est une fonction donnée bornée, non décroissante et avec une infinité de points de croissance dans l'intervalle  $(a, b)$ , fini ou infini, de façon qu'il existe tous les moments  $c_n = U[x^n]$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) et  $c_0 > 0$ . En ce qui concerne la fonction  $f(x)$ , nous supposons qu'elle admette des dérivées de tous les ordres dont nous avons besoin, au moins sur les points où elle interviendront.

Dans ce qui suit nous essayerons d'approximer la fonctionnelle  $U[f]$  par une combinaison linéaire, sur certains points, des valeurs de la fonction  $f(x)$  et de ses dérivées successives, de la forme suivante

$$(2) \quad \Phi[f] = \sum_{i=1}^m \sum_{j=0}^{r_i-1} A_{i,j} f^{(j)}(x_i) + \sum_{v=1}^s \sum_{\mu=0}^{\alpha_v-1} B_{v,\mu} f^{(\mu)}(a_v),$$

où nous supposons que les noeuds  $a_1, a_2, \dots, a_s$  multiples, respectivement d'ordres  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ , sont fixés, situés n'importe où sur l'axe réel, mais de manière que le polynôme

$$(3) \quad \omega(x) = A \prod_{v=1}^s (x - a_v)^{\alpha_v} \quad (A \neq 0)$$

soit positif dans l'intervalle  $(a, b)$ . Nous nous proposons de déterminer les autres noeuds  $x_1, x_2, \dots, x_m$ , dont les ordres de multiplicité  $r_1, r_2, \dots, r_m$  sont donnés, de telle manière que la formule de quadrature

$$(4) \quad U[f] = \Phi[f] + R[f],$$

où le reste, ou le terme complémentaire,  $R[f]$ , est défini par cette formule même, ait le degré d'exactitude maximum, c'est-à-dire pour que nous ayons

$$R[1] = R[x] = \dots = R[x^N] = 0, \quad R[x^{N+1}] \neq 0,$$

où  $N$  prend la plus grande valeur possible.

$R[f]$  est, bien entendu, aussi une fonctionnelle linéaire; nous nous occuperons plus loin de l'évaluation de celle-ci.

2. On peut obtenir immédiatement une délimitation pour le nombre  $N$ . A cet effet, introduisons aussi les notations

$$(5) \quad l(x) = \prod_{i=1}^m (x - x_i)^{r_i}, \quad g(x) = \prod_{k=1}^p (x - x_{v_k}),$$

où  $x_{v_1}, x_{v_2}, \dots, x_{v_p}$  sont les racines du polynôme  $l(x)$ , qui sont des ordres de multiplicité impairs. Si  $p=0$ , alors tous les nombres  $r_1, r_2, \dots, r_m$  sont pairs, mais, en général,  $0 \leq p \leq m$ .

Formons maintenant le polynôme

$$w(x) = \omega(x) l(x) g(x),$$

qui est du degré  $\mu = n_1 + n_2 + p$ , où

$$(6) \quad n_1 = r_1 + r_2 + \dots + r_m, \quad n_2 = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_s.$$

On observe que  $\Phi[w] = 0$ , et que  $U[w] \neq 0$ , car  $w(x)$  garde un signe constant (positif) dans l'intervalle d'intégration. Il résulte que le degré maximum d'exactitude de la formule (4) est  $N \leq \mu - 1$ . Nous allons démontrer immédiatement que l'on peut choisir les noeuds  $x_1, x_2, \dots, x_m$  de manière qu'on ait  $N = \mu - 1 = n_1 + n_2 + p - 1$ .

3. Afin de construire une formule générale de quadrature de la forme (4), qui constitue l'objet du présent mémoire, nous procéderons de la manière suivante.

Choisissons  $p$  nombres réels quelconques  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_p$  et formons le polynôme

$$(7) \quad v(x) = \prod_{h=1}^p (x - \gamma_h).$$

Considérons ensuite le polynôme d'interpolation de Lagrange-Hermite concernant la fonction  $f(x)$  et les noeuds introduits jusqu'ici

$$(8) \quad L_N(x; f) = L \left( \begin{matrix} a_1, a_2, \dots, a_s, x_1, x_2, \dots, x_m \\ \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, r_1, r_2, \dots, r_m \end{matrix} ; \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_p ; f | x \right).$$

Si on a en vue la formule

$$(9) \quad L_N(x; f) = v(x) L \left( \begin{matrix} a_1, a_2, \dots, a_s, x_1, x_2, \dots, x_m \\ \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, r_1, r_2, \dots, r_m \end{matrix} ; F_1 | x \right) + l(x) \omega(x) L(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_p; F_2 | x),$$

où

$$F_1(x) = \frac{f(x)}{v(x)}, \quad F_2(x) = \frac{f(x)}{l(x)\omega(x)},$$

et si on utilise la formule d'interpolation

$$(10) \quad f(x) = L_N(x; f) + r_N(x; f),$$

où

$$(11) \quad r_N(x; f) = l(x) \tilde{\omega}(x) v(x) \left[ \begin{matrix} a_1, a_2, \dots, a_s, x_1, x_2, \dots, x_m \\ \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, r_1, r_2, \dots, r_m \end{matrix} ; \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_p, x; f \right]^{(1)},$$

<sup>1)</sup> Par ce crochet nous avons indiqué la différence divisée de l'ordre  $n_1 + n_2 + p$  relative à la fonction  $f(x)$  et les noeuds multiples mis en évidence avec leurs ordres de multiplicité; au cas des noeuds simples  $\{\gamma_i\}$ , au lieu de  $\frac{\gamma_i}{1}$ , nous avons écrit, plus simplement, seulement  $\gamma_i$ . Nous avons utilisé aussi la notation  $\tilde{\omega}(x) = \frac{1}{A} \omega(x)$ .

on obtient une formule de quadrature de la forme

$$(12) \quad U[f] = \Phi[f] + \Omega[f] + \rho[f],$$

$$(13) \quad \text{où} \quad \rho[f] = U[r_N(x; f)]$$

et  $\Omega[f]$  a la forme

$$(14) \quad \Omega[f] = \sum_{h=1}^p C_h f(\gamma_h).$$

Il est clair que tous les coefficients  $A_{i,j}$ ,  $B_{v,\mu}$ ,  $C_h$  qui interviennent ci-dessus sont indépendants de la fonction  $f(x)$ .

4. La formule de quadrature (12) a le degré d'exactitude égal justement à  $N = n_1 + n_2 + p - 1$ . Afin de la réduire à la forme (4), il faudrait déterminer les racines du polynôme  $l(x)$ , de (5), de façon que la fonctionnelle  $\Omega[f]$  soit identiquement nulle, ce qui se réalise si

$$(15) \quad C_1 = C_2 = \dots = C_p = 0.$$

En tenant compte des formules (9) et (12), on constate immédiatement qu'il est nécessaire et suffisant que

$$(16) \quad U[\omega l v_h] = 0 \quad (h = 1, 2, \dots, p),$$

ou

$$v_h = v_h(x) = \frac{v(x)}{x - \gamma_h}.$$

Vu que  $\gamma_h$  sont arbitraires, les conditions (16) sont équivalentes à la suivante

$$(17) \quad U[\omega l Q_{p-1}] = 0,$$

où  $Q_{p-1}$  est un polynôme quelconque du degré  $p-1$ .

Il résulte que pour que les égalités (15) aient lieu, il est nécessaire et suffisant que le polynôme  $l(x)$  soit orthogonal dans l'intervalle  $(a, b)$  avec n'importe quel polynôme du degré  $p-1$ , relativement à

$$(18) \quad d\varphi(x) = \omega(x) d\psi(x).$$

Mais, comme on le sait, l'orthogonalité d'un polynôme  $l(x)$  avec n'importe quel polynôme  $Q_{p-1}(x)$ , du degré  $p-1$ , est équivalente à l'orthogonalité avec  $p$  polynômes, du degré  $p-1$ , linéairement indépendants. Pour cette raison, les conditions précédentes d'orthogonalité sont équivalentes, par exemple, aux suivantes

$$(19) \quad U[\omega l x^i] = 0, \quad i = 0, 1, 2, \dots, p-1.$$

5. Si le polynôme  $l(x)$  a été déterminé de cette manière, la formule de quadrature (12) se réduira à la forme (4).

Les coefficients de cette formule ont, en vertu de l'expression explicite du polynôme d'interpolation (8)<sup>2)</sup>, les expressions suivantes

$$(20) \quad A_{i,j} = U[L_{i,j}], \quad B_{v,\mu} = U[\Lambda_{v,\mu}],$$

<sup>2)</sup> Voir à cet effet les travaux [14], [15].

où

$$L_{i,j} = \sum_{k=0}^{r_i-j-1} \frac{(x-x_i)^j}{j!} \left[ \frac{(x-x_i)^k}{k!} \left( \frac{1}{h_i(x)} \right)_{x_i}^{(k)} \right] h_i(x),$$

$$\Lambda_{v,\mu} = \sum_{\lambda=0}^{\alpha_v-\mu-1} \frac{(x-a_v)^\mu}{\mu!} \left[ \frac{(x-a_v)^\lambda}{\lambda!} \left( \frac{1}{w_v(x)} \right)_{a_v}^{(\lambda)} \right] w_v(x),$$

et

$$h_i(x) = \omega(x) v(x) l_i(x), \quad l_i(x) = \frac{l(x)}{(x-x_i)^{r_i}},$$

$$w_v(x) = v(x) l(x) \omega_v(x), \quad \omega_v(x) = \frac{\omega(x)}{(x-a_v)^{\alpha_v}},$$

$$(\varphi(x))_b^{(r)} = \frac{d^r \varphi(x)}{dx^r} \Big|_{x=b} = \varphi^{(r)}(b).$$

6. Faisons maintenant l'observation suivante. Étant donné que nous avons supposé que  $\omega(x)$  garde un signe constant dans l'intervalle d'interpolation  $(a, b)$ , il s'ensuit que les ordres de multiplicité des noeuds intérieurs (s'ils existent) à cet intervalle sont tous pairs. Pour cette raison, il suffit que nous nous occupions du cas où les ordres de multiplicité des racines du polynôme  $l(x)$  sont tous impairs, c'est-à-dire du cas  $p=m$ , car si  $p=0$ , alors, quels que soient les noeuds  $x_1, x_2, \dots, x_m$ , la formule de quadrature correspondante a le degré d'exactitude  $n_1 + n_2 - 1$ , et si  $0 < p < m$ , alors  $m-p$  noeuds  $x_i$  de l'ordre de multiplicité pair restent arbitraires; ceux-ci peuvent être inclus dans l'ensemble des noeuds fixes  $a_1, a_2, \dots, a_s$ .

En conséquence, nous supposons que  $p=m$ .

7. Les relations (19) peuvent être interprétées aussi autrement. A cet effet, introduisons les notations

$$(21) \quad u(x) = \prod_{i=1}^m (x - x_i), \quad \delta(x) = \prod_{i=1}^m (x - x_i)^{r_i-1}, \quad p(x) = \omega(x) \delta(x).$$

Les conditions

$$(22) \quad U[pu x^i] = 0, \quad i = 0, 1, 2, \dots, m-1,$$

qui expriment le fait que  $u(x)$  est orthogonal dans l'intervalle  $(a, b)$  avec tout polynôme du degré  $m-1$  relativement à

$$(23) \quad d\sigma(x) = p(x) d\psi(x),$$

nous assurent que le polynôme  $u(x)$  aura  $m$  racines réelles, distinctes et situées dans l'intervalle d'intégration, car  $p(x)$  est non négative dans  $(a, b)$ .

8. Le polynôme  $u(x)$  étant déterminé de cette manière, on peut montrer que tous les coefficients  $A_{i,j}$ ,  $B_{v,\mu}$  de la formule de quadrature (4) sont indépendants des paramètres  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m$ . En effet, vu que ces coefficients sont indépendants de la fonction  $f(x)$ , opérons le remplacement

$$f(x) = l_{i,j}(x),$$

$$(24) \quad l_{i,j}(x) = \sum_{k=0}^{r_i-j-1} \frac{(x-x_i)^j}{j!} \left[ \frac{(x-x_i)^k}{k!} \left( \frac{1}{\lambda_i(x)} \right)_{x_i}^{(k)} \right] \lambda_i(x),$$

$$\text{et} \quad \lambda_i(x) = \omega(x) l_i(x);$$

on obtiendra que

$$(25) \quad A_{i,j} = U[l_{i,j}].$$

Pour les autres coefficients on trouve les expressions

$$(26) \quad B_{v,\mu} = U[k_{v,\mu}],$$

$$\text{où} \quad k_{v,\mu} = \sum_{\lambda=0}^{\alpha_v-\mu-1} \frac{(x-a_v)^\mu}{\mu!} \left[ \frac{(x-a_v)^\lambda}{\lambda!} \left( \frac{1}{\delta_v(x)} \right)_{a_v}^{(\lambda)} \right] \delta_v(x),$$

$$\text{et} \quad \delta_v(x) = l(x) \omega_v(x).$$

9. Revenons sur la détermination des noeuds fondamentaux  $x_1, x_2, \dots, x_m$ . on peut les obtenir, comme nous l'avons vu, en résolvant le système de degré supérieur de  $m$  équations à  $m$  inconnues

$$(27) \quad U[\omega l x^i] = 0, \quad i = 0, 1, 2, \dots, m-1.$$

De ce qui précède il a résulté que ce système a toujours au moins une solution réelle (car les ordres de multiplicité  $r_i$  ont été supposés impairs).

Il est intéressant que dans le cas de P. TURÁN [9] :  $r_1 = r_2 = \dots = r_n = r$ , où  $r$  est un nombre impair, ce système ait une solution réelle unique.

10. On peut démontrer de manière rigoureuse et détaillée que le système (27) a au moins une solution réelle, en considérant la fonction

$$(28) \quad F(t_1, t_2, \dots, t_m) = U[\omega \beta],$$

où

$$\beta = \beta(x) = \prod_{i=1}^m (x - t_i)^{r_i+1},$$

définie dans l'espace ordinaire  $m$ -dimensionnel  $R_m$ .

Cette fonction, qui est continue et toujours positive, a une borne inférieure  $\mu_0$  dans le domaine illimité

$$-\infty < t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_m < +\infty$$

de l'espace  $R_m$ .

En utilisant les résultats de L. TCHAKALOFF [10] et T. POPOVICIU [11] on démontre que, dans les hypothèses où nous nous sommes placés, la valeur  $\mu_0$  est prise par la fonction  $F(t_1, t_2, \dots, t_m)$  au moins en un point  $(x_1, x_2, \dots, x_m)$  de coordonnées distinctes et intérieures à l'intervalle  $(a, b)$ .

Il résulte immédiatement que les noeuds  $x_1, x_2, \dots, x_m$ , déterminés de cette manière, satisfont à notre problème.

Puisque dans ce point il y a un minimum relatif, nous aurons

$$-\frac{1}{r_i+1} \frac{\partial F}{\partial x_i} = U[P_i] = 0,$$

où

$$P_i = \omega(x) \prod_{v=1}^m (x - x_v)^{r_v+1} \cdot \frac{1}{x-x_i}.$$

Il en résulte qu'il faut que nous ayons

$$U[\omega l L_i] = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m),$$

où  $L_i(x)$  sont les polynômes fondamentaux d'interpolation relatifs aux noeuds simples  $x_1, x_2, \dots, x_m$ . Les polynômes du degré  $m-1$  :  $L_1(x), L_2(x), \dots, L_m(x)$  étant linéairement indépendants, il résulte que  $l(x)$  satisfait aux conditions (27).

Si, contrairement aux hypothèses faites jusqu'ici — quand nous avons considéré comme donné le système de nombres impairs  $r_1, r_2, \dots, r_m$  — nous supposons que sont donnés les nombres réels  $x_1, x_2, \dots, x_m$ , de manière que soient vérifiées les conditions (27), alors, réciproquement, il résulte immédiatement que les puissances correspondantes sont impaires. En effet, si les relations (27) ont lieu, il résulte, conformément à ce que nous avons dit au début du mémoire, que la formule de quadrature (4) a le degré d'exactitude  $N = n_1 + n_2 + m - 1$ . Supposons maintenant que parmi les nombres  $r_i$  il y a aussi des nombres pairs, par exemple soit  $r_1$  un nombre pair. Si dans la formule (4) on remplace

$$f(x) = \omega(x) (x - x_1)^{r_1} \prod_{i=2}^m (x - x_i)^{r_i+1},$$

$\Phi[f]$  sera nul, tandis que  $U[f] > 0$ , car  $f(x)$  est une fonction non négative dans l'intervalle d'intégration. Il résulte alors que  $N < n_1 + n_2 + m - 1$ , contrairement à l'hypothèse.

On démontre ensuite, sans difficulté, que les nombres réels  $x_1, x_2, \dots, x_m$ , choisis de manière que soient satisfaites les conditions (27), sont des points distincts de  $(a, b)$  et que la fonction (28) a un minimum relatif dans le point  $(x_1, x_2, \dots, x_m)$ . Cette dernière affirmation peut être démontrée immédiatement si on a en vue que

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_k} = 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x_i^2} > 0$$

$$(i, k = 1, 2, \dots, m; i \neq k).$$

Donc, pour la détermination des noeuds fondamentaux  $x_i$  de la formule générale de quadrature (4), on peut procéder par cette nouvelle voie indiquée ici, qui consiste à trouver les extrêmes de la fonction  $F(t_1, t_2, \dots, t_m)$  de (28).

11. Revenant à ce que nous avons dit au no. 7, si on a en vue les relations (22), on peut montrer que le polynôme  $u(x)$  de (21) peut être déterminé aussi d'une autre manière.

En effet, ce polynôme peut être exprimé par la formule de Christoffel

$$(29) \quad u(x) = \frac{D_{m+q}(x)}{\delta(x)},$$

où  $\delta(x)$  est donné à (21),  $q = n_1 + n_2 - m$ , et  $D_{m+q}(x)$  a l'expression

$$(30) \quad D_{m+q}(x) = \begin{vmatrix} \Phi_m(x) & \Phi_{m+1}(x) & \dots & \Phi_{m+q}(x) \\ \Phi_m(a_1) & \Phi_{m+1}(a_1) & \dots & \Phi_{m+q}(a_1) \\ \Phi'_m(a_1) & \Phi'_{m+1}(a_1) & \dots & \Phi'_{m+q}(a_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Phi_m^{(a_1-1)}(a_1) & \Phi_{m+1}^{(a_1-1)}(a_1) & \dots & \Phi_{m+q}^{(a_1-1)}(a_1) \\ \Phi_m(a_2) & \Phi_{m+1}(a_2) & \dots & \Phi_{m+q}(a_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Phi_m(x_1) & \Phi_{m+1}(x_1) & \dots & \Phi_{m+q}(x_1) \\ \Phi'_m(x_1) & \Phi'_{m+1}(x_1) & \dots & \Phi'_{m+q}(x_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Phi_m^{(r_m-2)}(x_m) & \Phi_{m+1}^{(r_m-2)}(x_m) & \dots & \Phi_{m+q}^{(r_m-2)}(x_m) \end{vmatrix}$$

Ici nous avons noté par  $\{\Phi_p(x)\}$  la suite de polynômes orthogonaux en  $(a, b)$  relative à la distribution de (23).

Il est évident que  $D_{m+q}(x)$  est divisible par  $\delta(x)$ , c'est-à-dire que nous avons

$$D_{m+q}^{(v_i)}(x; a_1, a_2, \dots, a_s, x_1, x_2, \dots, x_m) \Big|_{x=x_i} = 0,$$

où

$$v_i = 0, 1, 2, \dots, r_i - 2; \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Les noeuds fondamentaux  $x_1, x_2, \dots, x_m$  pourront être déterminés par les conditions

$$(31) \quad D_{m+q}^{(r_i-1)}(x_i; a_1, a_2, \dots, a_s, x_1, x_2, \dots, x_m) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m).$$

Ici nous avons un système de  $m$  équations à  $m$  inconnues, dont nous savons qu'il admet au moins une solutions réelle.

En général, cette méthode est trop compliquée pour la détermination des noeuds fondamentaux. Dans des cas particuliers plus simples elle peut toutefois être appliquée.

*Exemple.* Admettons que  $\psi(x) = x$ ,  $a = -b = -1$ ,  $m = 2$ ,  $n_1 = 4$ ,  $n_2 = 0$ ,  $r_1 = 1$ ,  $r_2 = 3$ . Nous avons  $l(x) = (x - x_1)(x - x_2)^3$  et

$$u(x) = \frac{1}{(x - x_2)^2} \begin{vmatrix} P_2(x) & P_3(x) & P_4(x) \\ P_2(x_2) & P_3(x_2) & P_4(x_2) \\ P'_2(x_2) & P'_3(x_2) & P'_4(x_2) \end{vmatrix},$$

où  $P_k(x)$  est le polynôme de Legendre du degré  $k$ .

En effectuant les calculs, on trouve

$$u(x) = (525 x^4 - 210 x^2 + 105) x^2 + 280 x^3 x - 175 x^4 + 210 x^2 - 63.$$

En imposant la condition  $u(x_2) = 0$ , on trouve la paire de solutions

$$x_1 = -\frac{\sqrt{5}}{3}, \quad x_2 = \frac{\sqrt{5}}{5}; \quad x'_1 = \frac{\sqrt{5}}{3}, \quad x'_2 = -\frac{\sqrt{5}}{5}.$$

Il résulte, dans le premier cas, la formule de quadrature

$$\int_{-1}^{+1} f(x) dx = \frac{1}{128} \left[ 81 f\left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right) + 175 f\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right) - \frac{40}{\sqrt{5}} f'\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right) + \frac{32}{3} f''\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right) \right] + \frac{8}{70875} f^{(6)}(\xi), \quad -1 < \xi < 1$$

et, dans le second cas, une formule qu'on obtient de celle-ci en changeant  $\sqrt{5}$  en  $-\sqrt{5}$ . Ces formules ont été obtenues par une autre voie aussi par T. POPOVICIU [11] et L. TCHAKALOFF [10].

**12.** Occupons-nous maintenant de l'évaluation du reste de la formule générale de quadrature (4).

Si nous faisons  $p = m$  et considérons le cas limite  $\gamma_i = x_i$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ), les formules (11) et (13) nous conduisent à l'expression suivante pour le reste  $R[f]$  de la formule (4)

$$(32) \quad R[f] = U[\tilde{\omega}(x) \bar{l}(x) D_{N+1}(f; x)],$$

où

$$(33) \quad \tilde{\omega}(x) = \frac{1}{A} \omega(x), \quad \bar{l}(x) = \prod_{i=1}^m (x - x_i)^{r_i+1} = l(x)u(x),$$

$$(34) \quad D_{N+1}(f; x) = \left[ \begin{matrix} a_1, a_2, \dots, a_s, x_1, x_2, \dots, x_m \\ a_1, a_2, \dots, a_s, r_1+1, r_2+1, \dots, r_m+1, x; f \end{matrix} \right].$$

Etant donné que le produit  $\tilde{\omega}(x) \bar{l}(x)$  garde un signe constant dans l'intervalle d'intégration, nous pouvons appliquer le premier théorème de la moyenne du calcul intégral, et obtenons

$$(35) \quad R[f] = D_{N+1}(f; \eta) U[\tilde{\omega} \bar{l}], \quad a < \eta < b.$$

En employant maintenant une formule connue de moyenne, relative aux différences divisées, nous obtenons enfin la formule

$$(36) \quad R[f] = \frac{f^{(N+1)}(\xi)}{(N+1)!} U[\tilde{\omega} \bar{l}],$$

où  $N = n_1 + n_2 + m$ , et  $\xi \in (a, b)$ .

<sup>8)</sup> Le reste de cette formule a été obtenu au moyen de la formule donnée à (36).

Si la dérivée de l'ordre  $N + 1$  de la fonction  $f(x)$  vérifie une condition Lipschitz ordinaire à constante  $M$ , on obtient la délimitation suivante

$$(37) \quad |R[f]| \leq \frac{M}{N!} U[\bar{\omega} l].$$

13. Nous mentionnons que la formule générale de quadrature (4) se réduit dans le cas  $s = 0$  aux formules du type Gauss, étudiées récemment par L. TCHAKALOFF [10] et T. PCPOVICIU [11]. Dans le cas  $s = 0, r_1 = r_2 = \dots = r_m = r$ , où  $r$  est impair, on obtient, sous une forme générale, les formules du type Gauss de P. TURÁN [9].

§ 2. Les cas particuliers  $r_1 = r_2 = \dots = r_m = 1$ .

14. Nous estimons que ce cas particulier est très intéressant, quand la formule de quadrature (4) devient

$$(38) \quad U[f] = V[f] + \rho[f],$$

où

$$(39) \quad V[f] = \sum_{i=1}^m A_i f(x_i) + \sum_{j=1}^s \sum_{k=0}^{u_j-1} B_{j,k} f^{(k)}(a_j),$$

et  $\rho[f]$ , en vertu des formules précédentes, peut être mis sous les formes

$$(40) \quad \rho[f] = U[\bar{\omega}(x)u^2(x)d_{n+1}(f; x)] = d_{n+1}(f; \eta)U[\bar{\omega}u^2] = \frac{f(\xi)}{(n+1)!} U[\bar{\omega}u^2].$$

Ici, en dehors des notations introduites jusqu'à présent, nous avons utilisé les suivantes

$$d_{n+1}(f; z) = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_s & x_1 & \dots & x_m & x & f \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_s & 2 & \dots & 2 & & \end{bmatrix},$$

$$n = r + 2m - 1, \quad r = \sum_{i=1}^s \alpha_i.$$

Les noeuds fondamentaux  $x_1, x_2, \dots, x_m$  sont déterminés par les conditions

$$U[\omega x^i] = 0, \quad i = 0, 1, 2, \dots, m - 1.$$

Par conséquent, le polynôme  $u(x)$  doit être orthogonal en  $(a, b)$  à tout polynôme du degré  $m - 1$  relativement à

$$(41) \quad d\alpha(x) = \omega(x)d\psi(x).$$

Il en résulte que le polynôme  $u(x)$  a toutes les racines  $x_1, x_2, \dots, x_m$  réelles, distinctes et intérieures à l'intervalle  $(a, b)$ .

Ce polynôme peut être trouvé à l'aide de la formule de Christoffel

$$(42) \quad u(x) = u_m(x) = \frac{1}{\omega(x)} \begin{vmatrix} Q_m(x) & Q_{m+1}(x) & \dots & Q_{m+r}(x) \\ Q_m(a_1) & Q_{m+1}(a_1) & \dots & Q_{m+r}(a_1) \\ Q'_m(a_1) & Q'_{m+1}(a_1) & \dots & Q'_{m+r}(a_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Q_m^{(\alpha_1-1)}(a_1) & Q_{m+1}^{(\alpha_1-1)}(a_1) & \dots & Q_{m+r}^{(\alpha_1-1)}(a_1) \\ Q_m(a_2) & Q_{m+1}(a_2) & \dots & Q_{m+r}(a_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Q_m(a_s) & Q_{m+1}(a_s) & \dots & Q_{m+r}(a_s) \\ Q'_m(a_s) & Q'_{m+1}(a_s) & \dots & Q'_{m+r}(a_s) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Q_m^{(\alpha_s-1)}(a_s) & Q_{m+1}^{(\alpha_s-1)}(a_s) & \dots & Q_{m+r}^{(\alpha_s-1)}(a_s) \end{vmatrix}$$

où  $\{Q_n(x)\}$  est le système de polynômes orthogonaux relatif à l'intervalle  $(a, b)$  et le poids intégral  $\psi(x)$ .

Observation. Dans certains cas particuliers, la formule (42) peut être simplifiée. Ainsi, si  $a = -b, d\psi(x) = p(x)dx$  et les fonctions  $p(x)$  et  $\omega(x)$  sont des fonctions paires en  $(-b, b)$  et les racines de  $\omega(x)$  sont  $\pm a_1, \pm a_2, \dots, \pm a_q (2q = r)$ , respectivement des ordres de multiplicité pairs,  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_q$ , la formule (42) se réduit à la suivante

$$(43) \quad u(x) = u_m(x) = \frac{1}{\omega(x)} \begin{vmatrix} Q_m(x) & Q_{m+2}(x) & Q_{m+4}(x) & \dots & Q_{m+r}(x) \\ Q_m(a_1) & Q_{m+2}(a_1) & Q_{m+4}(a_1) & \dots & Q_{m+r}(a_1) \\ Q'_m(a_1) & Q'_{m+2}(a_1) & Q'_{m+4}(a_1) & \dots & Q'_{m+r}(a_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ Q_m^{(\alpha_1-1)}(a_1) & Q_{m+2}^{(\alpha_1-1)}(a_1) & Q_{m+4}^{(\alpha_1-1)}(a_1) & \dots & Q_{m+r}^{(\alpha_1-1)}(a_1) \\ Q_m(a_2) & Q_{m+2}(a_2) & Q_{m+4}(a_2) & \dots & Q_{m+r}(a_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ Q_m(a_q) & Q_{m+2}(a_q) & Q_{m+4}(a_q) & \dots & Q_{m+r}(a_q) \\ Q'_m(a_q) & Q'_{m+2}(a_q) & Q'_{m+4}(a_q) & \dots & Q'_{m+r}(a_q) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ Q_m^{(\alpha_q-1)}(a_q) & Q_{m+2}^{(\alpha_q-1)}(a_q) & Q_{m+4}^{(\alpha_q-1)}(a_q) & \dots & Q_{m+r}^{(\alpha_q-1)}(a_q) \end{vmatrix}$$

15. Occupons-nous du calcul des coefficients de la formule de quadrature (38).

Si dans cette formule on remplace

$$f(x) = \frac{\omega(x)}{\omega(x_i)} \frac{u_i(x)}{u_i(x_i)}, \quad \text{où } u_i(x) = \frac{u(x)}{x - x_i},$$

on obtient les formules

$$(44) \quad A_i = U \left[ \frac{\omega(x) u_i(x)}{\omega(x_i) u_i(x_i)} \right], \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Pour les autres coefficients on a les expressions suivantes, qui résultent des formules (20)

$$(45) \quad B_{j,k} = U [h_{j,k}],$$

$$\text{où} \quad h_{j,k} = \sum_{v=0}^{a_j-k-1} \frac{(x-a_j)^k}{k!} \left[ \frac{(x-a_j)^v}{v!} \left( \frac{1}{\beta_j(x)} \right)^{(v)} \right] \beta_j(x),$$

et 
$$\beta_j(x) = u(x)\omega_j(x).$$

16. Il est aisé de montrer que tous les coefficients  $A_i$  sont positifs. En effet, si on a en vue que, quel que soit le polynôme  $v(x)$  du degré  $p$ , de (7), on a

$$v(x) = Cu(x) + \sum_{q=1}^m \frac{u_q(x)}{u_q(x_q)} v(x_q),$$

où  $C \neq 0$  si  $p = m$  et  $C = 0$  si  $p < m$  et si on remplace cette expression de  $v(x)$  dans la formule qui donne explicitement le polynôme d'interpolation de (8), où  $r_i = 1$ , on obtient — après l'intégration — les expressions pour les coefficients  $A_i$

$$(46) \quad A_i = U \left[ \frac{\omega(x)}{\omega(x_i)} \left( \frac{u_i(x)}{u_i(x_i)} \right)^2 \right], \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Il en résulte que  $A_i > 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ ; les autres coefficients  $B_{j,k}$  peuvent être aussi négatifs, ainsi qu'on peut le voir dans les exemples que nous allons donner.

17. La suite de polynômes orthogonaux  $\{u_m(x)\}$  n'est généralement pas normée, mais on peut la normer facilement (voir à cet effet [14]); notons par  $\{\hat{u}_m(x)\}$  la suite ortho-normée relative à l'intervalle  $(a, b)$  et la distribution (41)

Si l'on applique à cette suite la formule de Christoffel-Darboux, on obtient

$$(47) \quad K_{m-1}(t, x) = \sqrt{\lambda_m} \frac{\hat{u}_m(t)\hat{u}_{m-1}(x) - \hat{u}_m(x)\hat{u}_{m-1}(t)}{t-x},$$

où 
$$K_{m-1}(t, x) = \sum_{i=1}^{m-1} \hat{u}_i(t)\hat{u}_i(x),$$

et 
$$\lambda_m = U[\hat{u}_m^2] : U[\hat{u}_{m-1}^2].$$

En multipliant par  $\omega(x)d\psi(x)$  les deux membres de la formule (47) et en intégrant de  $a$  à  $b$ , on obtient

$$U[\omega(t)K_{m-1}(t, x)] = \sum_{i=0}^{m-1} \hat{u}_i(x) U[\omega(t)\hat{u}_i(t)] = \hat{u}_0^2 U[\omega(t)] = 1,$$

car

$$\hat{u}_0 = \frac{1}{\sqrt{c_0}}, \quad c_0 = U[\omega(t)t^0].$$

Nous avons donc

$$\sqrt{\lambda_m} U \left[ \omega(t) \frac{\hat{u}_m(t)\hat{u}_{m-1}(x) - \hat{u}_m(x)\hat{u}_{m-1}(t)}{t-x} \right] = 1.$$

Soit  $x_1, x_2, \dots, x_m$  les racines du polynôme  $u_m(x)$ ; si l'on remplace ci-dessus  $x = x_i$  on obtient

$$\sqrt{\lambda_m} \hat{u}_{m-1}(x_i) U \left[ \omega(t) \frac{\hat{u}_m(t)}{t-x_i} \right] = 1.$$

En tenant compte de cette formule et de celles de (44)

$$A_i = U \left[ \frac{\omega(t) u_i(t)}{\omega(x_i) u_i(x_i)} \right] = U \left[ \frac{\omega(t) \hat{u}_m(t)}{\omega(x_i) \hat{u}_m'(x_i)(t-x_i)} \right] = \frac{1}{\omega(x_i) \hat{u}_m'(x_i)} U \left[ \frac{\omega(t) \hat{u}_m(t)}{t-x_i} \right],$$

on obtient immédiatement que

$$A_i = \frac{1}{\sqrt{\lambda_m} \hat{u}_m'(x_i) \hat{u}_{m-1}(x_i)}, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Nous estimons que ces formules explicites sont très utiles pour le calcul pratique des coefficients  $A_i$  de la formule de quadrature (38). Des expressions similaires ont été données par CHRISTOFFEL [2] pour les coefficients de la formule de quadrature de Gauss.

18. Donnons maintenant quelques exemples.

1°. Dans le cas  $a = -b = -1$ ,  $\omega(x) = 1 - x^2$ ,  $d\psi(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta dx$  ( $\alpha, \beta > -1$ ),  $m = r_1 = 1$ , on trouve le noeud fondamental  $x_1 = \frac{\beta - \alpha}{\alpha + \beta + 4}$

et la formule de quadrature

$$\int_{-1}^{+1} (1-x)^\alpha(1+x)^\beta f(x) dx =$$

$$= 2^{\alpha+\beta+1} \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}{(\alpha+2)(\beta+2)\Gamma(\alpha+\beta+4)} \left[ (\alpha+1)(\alpha+2)^2 f(-1) + (\alpha+1)(\beta+1) \right.$$

$$\left. + (\alpha+\beta+4)^2 f\left(\frac{\beta-\alpha}{\alpha+\beta+4}\right) + (\beta+1)(\beta+2)^2 f(1) \right] - 2^{\alpha+\beta+2} \frac{\Gamma(\alpha+3)\Gamma(\beta+3)}{3(\alpha+\beta+4)\Gamma(\alpha+\beta+6)} f^{(4)}(\xi),$$

où  $\Gamma(\beta)$  est la fonction de Euler de la deuxième espèce.

Dans le cas  $\alpha = \beta$  cette formule se réduit à

$$\int_{-1}^{+1} (1-x^2)^\alpha f(x) dx = 2^{\alpha+1} \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\alpha+2)}{\Gamma(2\alpha+4)} [f(-1) + 4(\alpha+1)f(0) + f(1)] -$$

$$- 2^{2\alpha+1} \frac{\Gamma(\alpha+2)\Gamma(\alpha+3)}{3\Gamma(2\alpha+6)} f^{(4)}(\xi),$$

qui, pour  $\alpha = 0$  se réduit à la formule de Cavalieri-Simpson

$$\int_{-1}^{+1} f(x) dx = \frac{1}{3} [f(-1) + 4f(0) + f(1)] - \frac{1}{90} f^{(4)}(\xi).$$

2°. Si  $a = -b = -1$ ,  $d\varphi(x) = (1 - x^2)^a dx$ ,  $\omega(x) = (x^2 - 1)^2$ ,  $m = 3$ ,

les noeuds fondamentaux sont les racines du polynôme

$$\frac{1}{\omega(x)} \begin{vmatrix} J_3(x) & J_5(x) & J_7(x) \\ J_3(1) & J_5(1) & J_7(1) \\ J_3'(1) & J_5'(1) & J_7'(1) \end{vmatrix}$$

où  $J_n(x) = J_n^{(a,a)}(x)$  est le polynôme ultrasphérique de Jacobi du degré  $n$  correspondant à la distribution ci-dessus.

En effectuant les calculs, on trouve le système suivant de noeuds fondamentaux

$$x_1 = -\sqrt{\frac{3}{2\alpha+9}}, x_2 = 0, x_3 = \sqrt{\frac{3}{2\alpha+9}}.$$

La formule de quadrature correspondante est

$$\int_{-1}^{+1} (1-x^2)^a f(x) dx = 2^{2\alpha+3} \frac{\Gamma(\alpha+1) \Gamma(\alpha+3)}{3(\alpha+3) \Gamma(2\alpha+8)} \{ 32(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)^3 f(0) + (\alpha+1)(\alpha+2)(2\alpha+9)^3 [f(x_1) + f(x_3)] + 9(8\alpha^2+45\alpha+57) [f(-1) + f(1)] + 9(\alpha+1)(\alpha+3) [f'(-1) - f'(1)] \} + 4^{\alpha+1} \frac{\Gamma(\alpha+4) \Gamma(\alpha+6)}{4725(2\alpha+9) \Gamma(2\alpha+12)} f^{(10)}(\xi).$$

Dans le cas  $\alpha = 0$ ,  $\alpha = -\frac{1}{2}$  celle-ci devient

$$\int_{-1}^{+1} f(x) dx = \frac{1}{105} \left[ 19f(-1) + f'(-1) + 54f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + 64f(0) + 54f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) - f'(1) + 19f(1) \right] + \frac{1}{589396500} f^{(10)}(\xi),$$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-1}^{+1} \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{1}{2400} \left[ 438f(-1) + 15f'(-1) + 512f\left(-\frac{\sqrt{6}}{4}\right) + 500f(0) + 512f\left(\frac{\sqrt{6}}{4}\right) - 15f'(1) + 438f(1) \right] + \frac{f^{(10)}(\xi)}{1238630400}.$$

19. Dans le travail [13] nous nous sommes occupés d'une généralisation différente de celles dont il a été fait mention jusqu'ici, des formules de

type Gauss. Nous y nommons formule du type Gauss généralisée toute formule de quadrature de la forme

$$\int_a^b f(x) d\psi(x) = \sum_{i=1}^m \sum_{k=0}^{r_i-1} A_{i,k} f^{(k)}(x_i) + \rho[f],$$

ayant le degré d'exactitude  $2N - 1$ , où  $N$  est le nombre des coefficients  $A_{i,k}$  différents de zéro.

Dans la catégorie de ces formules, excepté les formules classiques du type Gauss, entrent, par exemple, aussi les formules de la forme

$$\int_{-a}^{+a} \rho(x) f(x) dx = \sum_{i=1}^{2m} A_i f(x_i) + \sum_{k=0}^{s-1} C_{2k} f^{(2k)}(0) + \rho[f],$$

où les noeuds  $x_i$  sont les racines du polynôme  $D_{2n,2s}(x)$  orthogonal dans l'intervalle, fini ou infini,  $(-a, +a)$ , relativement à la fonction paire  $q(x) = \rho(x)x^{2s}$  à tout polynôme du degré  $n - 1$ .

On remarque aisément que ces formules ne sont que des cas particuliers des formules dont nous sommes occupés dans le présent travail.

Voici deux exemples de pareilles formules :

1°. Dans le cas  $a = 1$ ,  $\rho(x) = \sqrt{1-x^2}$ ,  $m = 5$ ,  $r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = 1$ ,  $r_5 = 3$ , on obtient la formule de quadrature

$$\int_{-1}^{+1} \sqrt{1-x^2} f(x) dx = \frac{\pi}{1568} \left\{ 392f(0) + 7f''(0) + 2[49 - 10\sqrt{7}] \cdot [f(x_1) + f(x_4)] + 2[49 + 10\sqrt{7}] [f(x_2) + f(x_3)] \right\} + \frac{\pi}{2942985830400} f^{(12)}(\xi),$$

où

$$-x_2 = x_3 = \sqrt{\frac{7-\sqrt{7}}{12}}, -x_1 = x_4 = \sqrt{\frac{7+\sqrt{7}}{12}}.$$

2°. Si l'on suppose que  $a = \infty$ ,  $\rho(x) = e^{-x^2}$ ,  $m = 5$ ,  $r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = 1$ ,  $r_5 = 3$ , on obtient les noeuds

$$-x_1 = x_4 = \sqrt{\frac{7+\sqrt{14}}{2}}, -x_2 = x_3 = \sqrt{\frac{7-\sqrt{14}}{2}}, x_5 = 0$$

et la formule de quadrature

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} f(x) dx = \frac{1}{4900} \left\{ 3808f(0) + 280 \cdot f''(0) + 3(91 + 23\sqrt{14}) [f(x_2) + f(x_3)] + 3(91 - 23\sqrt{14}) [f(x_1) + f(x_4)] \right\} + \frac{f^{(12)}(\xi)}{36495360},$$

que a le degré d'exactitude 11.

## BIBLIOGRAPHIE

1. F. C. Gauss, *Methodus nova integralium valores per approximationem inveniendi*. Werke, t. 3, pp. 163—196.
2. E. B. Christoffel, *Über die Gaussische Quadratur und eine Verallgemeinerung derselben*. Journ. f. Math. t. 55, 1858, pp. 61—82.
3. F. G. Mehler, *Bemerkungen zur Theorie der mechanischen Quadraturen*. Ibid. t. 63, 1864, pp. 152—157.
4. C. A. Possé, *Sur les quadratures*, Nouv. Ann. de Math. t. 14, 1875, pp. 49—62.
5. E. Heine, *Handbuch der Kugelfunctionen*. t. 1. 1878
6. T. J. Stieltjes, *Quelques recherches sur la théorie des quadratures dites mécaniques*. Ann. de l'Ec. Norm. t. 1. 1884, pp. 409—426.
7. A. Markoff, *Sur la méthode de Gauss pour le calcul approché des intégrales*. Math. Ann. 25, 1885, pp. 427—432.
8. J. Deruyts, *Sur le calcul approché de certaines intégrales définies*. Bull. de l'Acad. de Belgique, t. 2, 1886, pp. 301—311.
9. P. Turán, *On the theory of the mechanical quadrature*. Acta Scient. Mathem. t. 12, 1950, pp. 30—37.
10. Л. Чакалов, *Общи квадратурни формули от Гаусов тип*. Известия мат. Инст. Българска Акад. т. 1, Фе. 1, 1954, пп. 67—82.
11. Т. Поповициу, *Asupra unei generalizări a formulei de integrare numerică a lui Gauss*. Studii și cercetări științifice. Iași, t. 6. 1955, pp. 29—57.
12. D. D. Stancu, *Generalizarea formulei de cuadratură a lui Gauss Christoffel*. Studii și cercetări științifice. Matematică. Iași. t. 8, fs. 1, 1957, pp. 1—18.
13. D. D. Stancu, *Sur une classe de polynômes orthogonaux et de formules générales de quadrature avec un nombre minimum de termes*. Bulletin Mathématique. Bucarest, 1957, (sous presse)
14. В. Л. Гончаров, *Теория интерполирования и приближения функций*. Москва, 1954, стр. 64.
15. D. D. Stancu, *Asupra formulei de interpolare a lui Hermite și a unor aplicații ale acesteia*. Studii și cercetări. Matematică. Cluj, nr. 2, 1957 (sous presse).

Reçu le 5 mars 1958