BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul V (IX), Fasc. 1–2, 1959

17.

512.52

ASUPRA UNEI DEMONSTRAŢII A TEOREMEI LUI WEIERSTRASS

DE

D. D. STANCU

1. Să considerăm o funcţie $f(x)$ continuă pe intervalul $[-1, +1]$ şi să notăm cu $Q_{2n-1}(f; x)$ polinomul de grad cel mult $2n-1$ care pe punctele distincte $x_{n,1}, x_{n,2}, \ldots, x_{n,n}$ verifică condiţiile

$$Q_{2n-1}(f; x_{n,i}) = f(x_{n,i}), \quad Q'_{2n-1}(f; x_{n,i}) = 0, \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Dacă $x_{n,1}, x_{n,2}, \ldots, x_{n,n}$ sînt cele n rădăcini reale, distincte şi cuprinse în intervalul $[-1, +1]$, ale polinomului lui Cebîşev $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$, atunci acest polinom se poate pune [1] sub forma

$$P_{2n-1}(f; x) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} (1 - x_{n,i}\, x) \left(\frac{T_n(x)}{x - x_{n,i}} \right)^2 f(x_{n,i}).$$

În anul 1916 L. Fejér [1] a demonstrat că şirul de polinoame $\{P_{2n-1}(f; x)\}$ converge uniform, pe intervalul $[-1, +1]$, către funcţia $f(x)$.

În anul 1950 prof. T. Popoviciu [2] a dat o nouă demonstraţie pentru teorema lui Weierstrass cu ajutorul acestor polinoame, arătînd că

(1) $$|f(x) - P_{2n-1}(f; x)| \leqq 2\, \omega(1/\sqrt{n}), \quad x \in [-1, +1],$$

unde $\omega(\delta)$ reprezintă modulul de continuitate al lui $f(x)$.

În anul 1921 N. Krîlov şi E. Steuermann [3] au arătat că polinomul care este de grad cel mai mic şi pe nodurile de mai sus, ale lui Cebîşev, verifică condiţiile

(2) $$Q(f; x_{n,i}) = f(x_{n,i}), \quad Q^{(k)}(f; x_{n,i}) = 0, \quad (i = 1, 2, \ldots, n; \quad k = 1, 2, 3),$$

este

(3) $$P_{4n-1}(f; x) = \sum_{i=1}^{n} v_{n,i}(x) f(x_{n,i}),$$

unde

$$(4)\quad v_{n,i}(x)=\left\{\frac{1-2x_{n,i}x+x_{n,i}^2}{1-x_{n,i}^2}+\frac{1}{6}\left(\frac{x-x_{n,i}}{1-x_{n,i}^2}\right)^2[4(n^2-1)-(4n^2-1)x_{n,i}x+6x_{n,i}^2]\right\}l_{n,i}^4(x)$$

şi

$$l_{n,i}(x)=(-1)^{i-1}\frac{T_n(x)}{n(x-x_{n,i})}\sqrt{1-x_{n,i}^2}.$$

Autorii citaţi au mai dovedit, că

$$P_{4n-1}(f;x)\rightrightarrows f(x),\quad x\in[-1,+1].$$

2. În cele ce urmează vom da o nouă demonstraţie a covergenţei uniforme a şirului de polinoame $\{P_{4n-1}(f;x)\}$ către funcţia $f(x)$, întrebuinţînd o metodă analoagă cu cea care l-a condus pe prof. T. Popoviciu la evaluarea (1).

Dacă avem în vedere că $1-2ax+x^2=1-x^2+(x-a)^2$ şi grupăm convenabil termenii, polinomul (4) se poate pune sub forma

$$(5)\quad v_{n,i}(x)=\frac{1}{n^4}\left\{(1-x_{n,i}^2)(1-x^2)+\frac{1}{6}(x-x_{n,i})^2[(4n^2-1)(1-x_{n,i}x)+3]\right\}\left(\frac{T_n(x)}{x-x_{n,i}}\right)^4.$$

Deoarece pentru $x\in[-1,+1]$ avem $1-x^2\geqq 0$, $1-x_{n,i}x\geqq 1-|x_{n,i}|>0$, $1-x_{n,i}^2>0$, rezultă inegalitatea importantă

$$(6)\quad v_{n,i}(x)\geqq 0,\ \text{pentru}\ x\in[-1,+1].$$

În cele ce vor urma ne va mai fi utilă identitatea

$$(7)\quad \sum_{i=1}^{n}v_{n,i}(x)\equiv 1,$$

care se obţine considerînd polinomul de interpolare al lui Hermite relativ la funcţia $f(x)$ şi care foloseşte nodurile $x_{n,1}, x_{n,2},\ldots,x_{n,n}$ şi apoi luînd în particular, $f(x)\equiv 1$.

Ţinînd seama de (6) şi (7), precum şi de următoarele proprietăţi ale modulului de continuitate

$$\omega(\lambda\delta)\leqq(\lambda+1)\,\omega(\delta),\ (\lambda,\delta>0),\quad |f(x'')-f(x')|\leqq\omega(|x''-x'|),$$

putem scrie succesiv

$$(8)\quad \begin{aligned}|f(x)-P_{4n-1}(f;x)|&=\left|\sum_{i=1}^{n}[f(x)-f(x_{n,i})]\,v_{n,i}(x)\right|\leqq\\ &\leqq\sum_{i=1}^{n}|f(x)-f(x_{n,i})|\,v_{n,i}(x)\leqq\left(\frac{1}{\delta}\sum_{i=1}^{n}|x-x_{n,i}|\,v_{n,i}(x)+1\right)\omega(\delta).\end{aligned}$$

Folosind acum inegalitatea lui Cauchy-Buniakovski, obţinem

$$\begin{aligned}\left(\sum_{i=1}^{n}|x-x_{n,i}|\,v_{n,i}(x)\right)^2&\leqq\sum_{i=1}^{n}(x-x_{n,i})^2v_{n,i}(x)=\\ &=\frac{T_n^4(x)}{n^4}\sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{(1-x^2)(1-x_{n,i}^2)}{(x-x_{n,i})^2}+\frac{1}{6}[(4n^2-1)(1-x_{n,i}x)+3]\right\}=\\ &=\frac{T_n^4(x)}{n^4}\left\{\frac{(2n^2+1)n}{3}+(1-x^2)\sum_{i=1}^{n}\frac{1-x_{n,i}^2}{(x-x_{n,i})^2}\right\}=\\ &=\frac{2n^2+1}{3n^3}T_n^4(x)+\frac{1}{n^2}(1-x^2)T_n^2(x)\sum_{i=1}^{n}l_{n,i}^2(x).\end{aligned}$$

Dacă acum ne folosim de următoarea inegalitate stabilită de L Fejér [4]

$$\sum_{i=1}^{n}l_{n,i}^2(x)<2,$$

valabilă pentru orice n şi pentru orice $x\in[-1,+1]$, găsim că

$$\sum_{i=1}^{n}(x-x_{n,i})^2v_{n,i}(x)<\frac{2n^2+1}{3n^3}+\frac{2}{n^2}(1-x^2)T_n^2(x)\leqq\frac{2n^2+6n+1}{3n^3}.$$

Alegînd apoi $\delta=\sqrt{\dfrac{2n^2+6n+1}{3n^3}}$ şi ţinînd seama de inegalitatea (8), rezultă în definitiv că avem

$$(9)\quad |f(x)-P_{4n-1}(f;x)|<2\,\omega\left(\sqrt{\frac{2n^2+6n+1}{3n^3}}\right),\ x\in[-1,+1].$$

Avînd în vedere că $\omega(\delta)\to 0$ cînd $\delta\to 0$, inegalitatea de mai sus ne dovedeşte că avem

$$\lim_{n\to\infty}P_{4n-1}(f;x)=f(x),$$

uniform pe $[-1,+1]$.

Rezultă de aici de asemenea şi o indicaţie asupra ordinului cu care polinomul $P_{4n-1}(f;x)$ al lui Krilov-Steuermann aproximează funcţia $f(x)$.

Primit la 24 II 1959

Academia R. P. R., filiala Cluj

BIBLIOGRAFIE

1. Fejér L., Gött. Nachr, 1916, S. 66–91.
2. Popoviciu T., Lucrările ses. gen. şt., Acad. R. P. R., iunie 1950, pp. 1664–1667
3. Krylov N. et Steuermann E., Kiev Bull. Ac. Sc., 1922–1923, **1**, pp. 13–16.
4. Fejér L., Math. Ann., 1932, **106**, S. 1–55.

$$\sqrt{\frac{2n^2+6n+1}{3n^3}}=\sqrt{\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{n}+2\cdot\frac{1}{n^2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{n^3}}\leq\sqrt{\left(\frac{2}{3}+2+\frac{1}{3}\right)\frac{1}{n}}=\sqrt{3}\,\frac{1}{\sqrt{n}}<2\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$\Rightarrow |f(x)-P_{4n-1}(f;x)|<4\,\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

О ДОКАЗАТЕЛЬСТВЕ ТЕОРЕМЫ ВЕЙЕРШТРАССА

(Резюме)

Дается новое доказательство теоремы Вейерштрасса при помощи многочленов Крылова-Штейермана [3], причём доказывается неравенство (9).

SULLA DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA DI WEIERSTRASS

(Sunto)

L'Autore espone una nuova dimostrazione del teorema di Weierstrass servendosi all'uopo dei polinomi di Krylov-Steuermann [3]. Si dimonstra l'ineguaglianza (9).