ACADEMIA R. P. R. FILIALA IAŞI
STUDII ŞI CERCETĂRI ŞTIINŢIFICE
Anul VI (1955), Nr. 1-2

ASUPRA UNEI GENERALIZĂRI A FORMULEI DE INTEGRARE NUMERICĂ A LUI GAUSS

DE

TIBERIU POPOVICIU

Comunicare prezentată la 4 mai 1955 în şedinţa Filialei Iaşi a Academiei R. P. R.

§ 1. **Formulele de tip Gauss.**

1. In problemele practice de calcul numeric, de multe ori se cere valoarea unei funcţionale liniare [1]) $A[f]$, definită pe un spaţiu vectorial S de funcţii $f = f(x)$, reale, de variabila reală x, definite şi continue pe un interval I. In cele ce urmează vom mai presupune că elementele lui S sînt derivabile de un număr suficient de ori, cel puţin pe punctele unde vor interveni aceste derivate. Vom presupune de asemenea că S conţine toate polinoamele în x. In cele ce urmează vom impune funcţionalei $A[f]$ şi anumite condiţii restrictive, pe care le vom specifica atunci cînd ele vor interveni.

2. Să presupunem că se dau valorile

$$f^{(j)}(x_i), \ j = 0,1,\ldots,r_i - 1, \ i = 1,2,\ldots,n \quad (f^{(0)}(x) = f(x)), \tag{1}$$

ale funcţiei $f(x)$ şi ale primelor sale derivate $f'(x), f''(x), \ldots$ pe punctele *distincte*

$$x_1\ ,\ x_2, \ldots, x_n \tag{2}$$

ale intervalului I. Pe punctul x_i sînt date valorile funcţiei şi ale primelor sale $r_i - 1$ derivate, astfel că numerele r_i, $i = 1,2,\ldots,n$ sînt întregi pozitive.

Pentru fiecare $f \in S$, $A[f]$ se poate aproxima cu o combinaţie liniară dată a valorilor (1) ale funcţiei $f(x)$ şi ale primelor sale derivate pe punctele (2). Obţinem astfel *formula de aproximare*

$$A[f] \approx \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=0}^{r_i - 1} a_{i,j} f^{(j)}(x_i). \tag{3}$$

Punctele (2) sînt *nodurile* acestei formule iar numerele r_i, $i = 1,2,\ldots,n$ sînt *ordinele de multiplicitate* ale acestor noduri. Nodul r_i are ordinul de

---

1) Prin o funcţională liniară înţelegem o funcţională aditivă şi omogenă.

multiplicitate r_i, $i=1,2,\ldots,n$. Numerele $a_{i,j}$, $j=0,1,\ldots,r_i-1$, $i=1,2,\ldots,n$ caracterizează formula de aproximare (3) de acest tip şi se pot numi *coeficienţii* acestei formule.

Restul $\mathrm{R}[f]$ al formulei (3) este, prin definiţie, diferenţa dintre membrul întîi şi membrul al doilea al formulei. Dacă deci adunăm restul la membrul al doilea al formulei, această egalitate aproximativă devine o egalitate obişnuită. Restul este, evident tot o funcţională liniară definită pe S.

3. Se poate da şi o altă interpretare formulei de aproximare (3). O metodă generală pentru găsirea unei valori aproximative pentru $\mathrm{A}[f]$ constă în a înlocui funcţia $f(x)$ printr-o altă funcţie $\varphi \in S$ şi a lua pe $\mathrm{A}[\varphi]$ ca valoare aproximativă pentru $\mathrm{A}[f]$, deci $\mathrm{A}[f] \approx \mathrm{A}[\varphi]$.

Din punct de vedere teoretic nimic nu ne împiedică să alegem funcţia $\varphi(x)$ cu totul arbitrar, doar cu singura restricţie să aparţină lui S. Insă din punctul de vedere al aplicaţiilor practice, alegerea funcţiei $\varphi(x)$ trebuie şi poate să fie în general restrînsă considerabil. Un caz important este atunci cînd $\varphi(x)=\mathrm{B}[f\,|\,x]$ este un operator liniar dat, cu valorile în S. In acest caz $\mathrm{A}[\varphi]=\mathrm{A}[\mathrm{B}[f\,|\,x]]$ este o funcţională liniară de f, bine determinată şi definită pe S. Restul $\mathrm{R}[f]=\mathrm{A}[f]-\mathrm{A}[\varphi]$ va fi atunci de asemenea o funcţională liniară bine determinată şi definită pe S.

O clasă importantă de funcţii $\varphi(x)$ de forma precedentă este formată de funcţiile de interpolare liniară generalizate

$$\varphi(x)=\mathrm{B}[f\,|\,x]=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{r_i-1}\varphi_{i,j}(x)f^{(j)}(x_i) \tag{4}$$

corespunzătoare nodurilor (2), cu ordinele de multiplicitate indicate şi unde $\varphi_{i,j}(x)\in S$, $j=0,1,\ldots,r_i-1$, $i=1,2,\ldots,n$ sînt nişte funcţii date. Atunci formula $\mathrm{A}[f]\approx\mathrm{A}[\varphi]$ se reduce la (3), unde coeficienţii sînt daţi de formulele

$$a_{i,j}=\mathrm{A}[\varphi_{i,j}]\,,\quad j=0,1,\ldots,r_i-1\,,\quad i=1,2,\ldots,n\,.$$

In particular, fie

$$\varphi(x)=\mathrm{L}(\underbrace{x_1\,,\,x_1,\ldots,x_1}_{r_1}\,,\,\underbrace{x_2\,,\,x_2,\ldots,x_2}_{r_2},\ldots,\underbrace{x_n\,,\,x_n,\ldots,x_n}_{r_n};\,f\,|\,x)$$

polinomul de interpolare al lui Lagrange-Hermite de gradul

$$p=r_1+r_2+\cdots+r_n-1, \tag{5}$$

care ia, împreună cu primele sale r_i-1 derivate, valorile respective (1) pe nodurile x_i, $i=1,2,\ldots,n$. Această funcţie $\varphi(x)$ este de forma (4), unde

$$\varphi_{i,j}(x)=l_{i,j}(x)\,,\quad j=0,1,\ldots,r_i-1\,,\quad i=1,2,\ldots,n$$

sînt polinoamele fundamentale de interpolare relative la nodurile (2) cu ordinele lor de multiplicitate respective. Aceste polinoame sînt complet determinate. Ele au nişte expresii bine cunoscute, dintre care reamintim formulele

$$l_{i,r_i-1}(x)=\frac{1}{(r_i-1)!\prod\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}(x_i-x_j)^{r_j}}\cdot\frac{l(x)}{x-x_i}\,,\quad i=1,2,\ldots,n \tag{6}$$

unde

$$l(x)=(x-x_1)^{r_1}(x-x_2)^{r_2}\ldots(x-x_n)^{r_n}\,. \tag{7}$$

In cazul considerat formula (3) devine

$$\mathrm{A}[f]\approx\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{r_i-1}c_{i,j}f^{(j)}(x_i) \tag{8}$$

unde

$$c_{i,j}=\mathrm{A}[l_{i,j}]\,,\quad j=0,1,\ldots,r_i-1\,,\quad i=1,2,\ldots,n \tag{9}$$

4. Restul formulei (8) se bucură de importanta proprietate că se anulează pentru orice polinom de gradul p, p fiind dat de formula (5).

In general dacă funcţionala liniară $\mathrm{A}[f]$ este nulă pentru orice polinom de gradul m [2]), dar este diferită de zero pentru cel puţin un polinom de gradul $m+1$, se zice că ea are *gradul de exactitate* m. Această definiţie se extinde în mod natural şi la cazurile $m=-1$ şi $m=+\infty$. Mai precis, gradul de exactitate este un număr întreg ≥ -1 sau numărul impropriu $+\infty$ ataşat funcţionalei $\mathrm{A}[f]$ şi perfect caracterizat de proprietatea:

1°. $m=-1$, dacă $\mathrm{A}[1]\neq 0$,

2°. $\mathrm{A}[1]=\mathrm{A}[x]=\cdots=\mathrm{A}[x^m]=0$, $\mathrm{A}[x^{m+1}]\neq 0$, dacă $\mathrm{A}[1]=0$ şi cel puţin unul din numerele $\mathrm{A}[x^i]$, $i=1,2,\ldots$ este diferit de zero,

3°. $m=+\infty$, dacă $\mathrm{A}[x^i]=0$, $i=0,1,\ldots$

In fine vom zice că funcţionala $\mathrm{A}[f]$ are gradul de exactitate cel puţin m, dacă are gradul de exactitate $\geq m$, deci dacă se anulează pentru orice polinom de gradul m.

Pentru simplificare vom zice că o formulă de aproximare (3) are gradul de exactitate m resp. are gradul de exactitate cel puţin m, dacă restul acestei formule are gradul de exactitate m resp. are gradul de exactitate cel puţin m.

Cu această convenţie putem spune că formula (8) are gradul de exactitate cel puţin p.

Reamintim următoarea:

Teorema 1. *Dacă formula* (3) *are gradul de exactitate cel puţin* p, *această formulă coincide în mod necesar cu* (8).

Demonstraţia acestei proprietăţi am dat-o într-o altă lucrare [9]. Demonstraţia de acolo se referea la o funcţională liniară $\mathrm{A}[f]$ particulară, ea însă nu depinde de forma acestei funcţionale.

Teorema 1 ne spune că formula (8) joacă un rol special printre formulele (3) care se obţin variind coeficienţii acestei formule. Formula (8) este, printre toate formulele (3) corespunzătoare unei funcţionale $\mathrm{A}[f]$ şi unor noduri (2), date împreună cu ordinele lor de multiplicitate respective, aceea (unica) care *are gradul de exactitate maxim.*

5. In general gradul de exactitate al formulei (8) este p. In cazuri particulare acest grad de exactitate poate însă să fie şi mai mare decît p.

Definiţie. *Vom zice că formula* (8) *este de* **tip Gauss** *dacă gradul său de exactitate este cel puţin* $p+n$.

2) Printr-un polinom de gradul m, înţelegem un polinom de gradul efectiv $\leq m$. Un polinom de gradul 0 este o constantă, iar un polinom de gradul -1, polinomul identic nul.

Pentru ca formula (8) să fie de tip Gauss este necesar şi suficient ca restul său $R[f]$ să se anuleze pentru orice polinom de gradul $p+n$. Un polinom $P(x)$ de gradul $p+n$ este totdeauna de forma $P(x) = l(x)Q(x) + Q_1(x)$, unde $l(x)$ este polinomul (7), $Q(x)$ un polinom de gradul $n-1$ iar $Q_1(x)$ un polinom de gradul p. Reciproc, orice polinom de această formă este de gradul $p+n$. Atunci $R[P] = R[lQ]$ şi din (8) rezultă imediat $R(lQ) = A[lQ]$. Se deduce prin urmare că condiţia necesară şi suficientă ca formula (8) să fie de tip Gauss este ca să avem

$$A[lQ] = 0, \tag{10}$$

oricare ar fi polinomul $Q(x)$ de gradul $n-1$.

Două funcţii f, g pentru care avem $A[fg] = 0$ se pot numi *ortogonale* faţă de funcţionala $A[f]$. Putem deci enunţa:

Teorema 2. *Condiţia necesară şi suficientă ca formula* (8) *să fie de tip Gauss este ca polinomul* (7) *să fie ortogonal cu orice polinom de gradul* $n-1$.

Ortogonalitatea polinomului $l(x)$ cu orice polinom de gradul $n-1$ este echivalentă cu ortogonalitatea lui cu n polinoame de gradul $n-1$ liniar independente. Un astfel de sistem de n polinoame este format din primele n puteri $1, x, x^2, \dots, x^{n-1}$ ale lui x. Un alt sistem de acest fel este format din polinoamele

$$(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n), \quad i=1,2,\dots,n, \tag{11}$$

deoarece presupunem că nodurile sînt distincte.

Acest din urmă exemplu ne arată că o formulă (8) de tip Gauss nu este altceva decît o formulă de forma (8)

$$A[f] \approx \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=0}^{r_i} c'_{i,j} f^{(j)}(x_i), \tag{12}$$

corespunzătoare nodurilor (2), însă de ordine de multiplicitate r_i+1 (în loc de r_i), $i=1,2,\dots,n$ respectiv şi în care avem $c'_{i,r_i}=0$, $i=1,2,\dots,n$. Această observaţie se datoreşte în principiu lui A. A. M a r k o v [4]. Proprietatea rezultă din formulele (6), (9) corespunzătoare formulei (12).

6. In cele ce urmează vom presupune că funcţionala $A[f]$, numărul natural n şi ordinele de multiplicitate $r_1, r_2, \dots, r_n$ ale nodurilor sînt date.

Condiţia de ortogonalitate, pe baza observaţiei de mai sus, se poate interpreta şi altfel. Putem privi pe

$$\Phi = \Phi(x_1, x_2, \dots, x_n) = A\left[\prod_{i=1}^{n}(x-x_i)^{r_i+1}\right] \tag{13}$$

ca o funcţie (polinom) de $x_1, x_2, \dots, x_n$. Atunci

$$-\frac{1}{r_i+1}\cdot\frac{\partial\Phi}{\partial x_i} = A[l(x)(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)]$$
$$i=1,2,\dots,n$$

Rezultă că nodurile unei formule (8) de tip Gauss formează totdeauna o soluţie a sistemului algebric

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x_i} = 0, \quad i=1,2,\dots,n. \tag{14}$$

Orice soluţie a acestui sistem, în care valorile variabilelor $x_1, x_2, \dots, x_n$ sînt *distincte*, ne dă o formulă de tip Gauss. Sistemul (14) nu are însă totdeauna o astfel de soluţie (reală).

Dacă mai multe numere r_i sînt egale, nu considerăm ca distincte două formule de tip Gauss care diferă numai prin o permutare a nodurilor avînd această ordine de multiplicitate. Cu alte cuvinte formulele de tip Gauss depind numai de valorile distincte ale ordinelor de multiplicitate.

Pe baza acestei observaţii, se poate uşor transforma sistemul (14) într-altul echivalent din punctul de vedere al căutării formulelor de tip Gauss. Astfel dacă $r'_1, r'_2, \dots, r'_t$ $(1 \leq t \leq n)$ sînt valorile distincte ale ordinelor de multiplicitate $r_1, r_2, \dots, r_n$, fie n_i numărul nodurilor de ordin de multiplicitate r'_i şi $\sigma_1^{(i)}, \sigma_2^{(i)}, \dots, \sigma_{n_i}^{(i)}$ funcţiile simetrice fundamentale ale acestor noduri, $i=1,2,\dots,t$. Atunci, din punctul de vedere al căutării formulelor de tip Gauss, sistemul (14) este echivalent cu

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\sigma_j^{(i)}} = 0, \quad j=1,2,\dots,n_i, \quad i=1,2,\dots,t \tag{15}$$

Acest sistem este tot atît de simplu ca şi (14) în sensul că funcţia Φ este un polinom în raport cu $\sigma_j^{(i)}$, $j=1,2,\dots,n_i$, $i=1,2,\dots,t$. Echivalenţa sistemelor (14), (15), în sensul specificat rezultă din faptul că determinantul funcţional al funcţiilor simetrice fundamentale $\Sigma z_1 z_2 \dots z_i$, $i=1,2,\dots,k$ al variabilelor $z_1, z_2, \dots, z_k$ în raport cu aceste variabile este diferit de zero, pentru orice sistem de valori *diferite* ale acestor variabile (a se vedea de ex. [6]).

Aceleaşi lucruri se pot spune şi despre sistemul care se deduce din (14), înlocuind numai în parte nodurile corespunzătoare la ordine de multiplicitate egale prin funcţiile lor simetrice fundamentale. Metoda precedentă se mai poate combina cu nişte transformări liniare ale unora sau tuturor variabilelor x_i.

7. Trebuie să observăm că pentru o funcţională liniară dată $A[f]$ şi pentru un sistem dat de ordine de multiplicitate, nu există totdeauna formule de tip Gauss.

Vom zice că funcţionala $A[f]$ este de *ordin de pozitivitate* k dacă $A[Q^2] > 0$, pentru orice polinom $Q(x)$ de gradul $k-1$ şi neidentic nul.

Putem atunci face observaţia că pentru o funcţională de ordin de pozitivitate $k \geq \frac{1}{2}(p+n+2)$ şi dacă cel puţin unul dintre ordinele de multiplicitate $r_1, r_2, \dots, r_n$ este *par*, nu există nici o formulă de tip Gauss. Intr-adevăr să presupunem, pentru fixarea ideilor, că $r_i, r_{i+1}, \dots, r_n$ sînt numere pare, $0 < i \leq n$, ceilalţi (dacă $1 < i$) fiind impari. Atunci $l(x)(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_{i-1})$ este patratul unui polinom de gradul $\frac{1}{2}(p+i) \leq k-1$. Avem deci $A[l(x)(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_{i-1})] > 0$, ($A[l] > 0$, dacă $i=1$), ceea ce, pe baza teoremei 2, demonstrează proprietatea.

Din contra, vom vedea că dacă toate numerele $r_1, r_2, \dots, r_n$ sînt impare, există cel puţin o formulă de tip Gauss.

Formulele (14) ne sugerează imediat examinarea extremelor relative ale funcției (13). Un extremum relativ atins de un sistem de valori diferite ale variabilelor $x_1, x_2, \ldots, x_n$, ne demonstrează existența a cel puțin unei formule de tip Gauss. Vom vedea că pe baza acestei observații, această proprietate de existență are loc în particular dacă $A[f]$ este de ordin de pozitivitate $\geq \frac{1}{2}(p+n+1)$ și dacă toate ordinele de multiplicitate sînt impare.

In § următor vom studia o problemă de extremum care, în particular ne va da soluția problemei de mai sus. Proprietățile obținute în acest § trebuie considerate ca o generalizare a proprietăților extremale bine cunoscute ale polinoamelor ortogonale și ale generalizărilor acestora în sensul lui G. Polya [5] și D. Jackson [2, 3].

§ 2. Asupra unei probleme de minimum.

8. Să considerăm, în particular, o funcțională liniară de forma

$$A[f] = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i f(y_i), \tag{16}$$

unde k este un număr natural, $y_1, y_2, \ldots, y_k$, k puncte distincte ale axei reale iar $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ sînt k numere *pozitive* date.

Vom nota cu P_n mulțimea polinoamelor (reale) de gradul n de forma $x^n + \cdots$, deci cu coeficientul lui x^n egal cu 1.

Se dau t numere pozitive $s_1, s_2, \ldots, s_t$ și t numere naturale $n_1, n_2, \ldots, n_t$ astfel încît fiecărui număr s_i îi corespunde un număr n_i. Pentru prescurtarea limbajului vom numi numerele s_i *puteri* iar numerele n_i *gradele* respective corespunzătoare acestor puteri. Aceste denumiri sînt justificate prin cele ce urmează.

Fie

$$\mu = \mu^{(s_1, s_2, \ldots, s_t)}_{n_1, n_2, \ldots, n_t} = \inf A\left[\prod_{i=1}^{t} |\pi_i|^{s_i}\right] \tag{17}$$

unde marginea inferioară este relativă la toate polinoamele $\pi_i \in P_{n_i}$, $i = 1, 2, \ldots, t$.

Orice sistem particular de polinoame $\pi_i \in P_{n_i}$, $i = 1, 2, \ldots, t$ pentru care $A\left[\prod_{i=1}^{t} |\pi_i|^{s_i}\right] = \mu$ se va numi un sistem de polinoame minimizante sau, mai pe scurt, un *sistem minimizant*.

Cazul $t = 1$ este bine cunoscut și a fost examinat în special de D. Jackson [3].

9. In cazul $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_t \geq k$ avem $\mu = 0$ și pentru ca sistemul $\pi_i \in P_{n_i}$, $i = 1, 2, \ldots, t$ să fie minimizant este necesar și suficient ca fiecare punct y_j, $j = 1, 2, \ldots, k$ să fie rădăcină a cel puțin unui polinom π_i. In cazul $n < k$ rezultatele sînt mai puțin banale și sînt date de următoarea:

Teorema 3. *$A[f]$ fiind o funcțională liniară de forma (16) cu punctele y_i distincte și cu numerele λ_i toate pozitive iar $s_1, s_2, \ldots, s_t$ un sistem de puteri* (pozitive) *și $n_1, n_2, \ldots, n_t$ un sistem de grade corespunzătoare date, cu suma lor $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_t < k$:*

1°. *Există cel puțin un sistem minimizant.*

2°. *Dacă $\pi_i \in P_{n_i}$, $i = 1, 2, \ldots, t$ este un sistem minimizant, polinoamele π_i au toate rădăcinile reale.*

Dacă puterile $s_1, s_2, \ldots, s_t$ sînt toate > 1, atunci orice sistem minimizant $\pi_i \in P_{n_i}$, $i = 1, 2, \ldots, t$ mai verifică și următoarele proprietăți:

3°. *Toate rădăcinile polinomului*

$$\pi = \pi(x) = \prod_{i=1}^{t} \pi_i \tag{18}$$

sînt distincte.

4°. *Avem*[3])

$$A\left[\prod_{i=1}^{t} |\pi_i|^{s_i - 1} (\mathrm{sg}\pi) Q\right] = 0, \tag{19}$$

oricare ar fi polinomul $Q(x)$ de gradul $n-1$.

5°. *Rădăcinile polinomului* (18) *sînt separate de punctele $y_1, y_2, \ldots, y_k$.*

Observăm că în cazul teoremei 3, $\mu > 0$.

10. Pt. 1° al teoremei 3 se demonstrează arătînd întîi că există un număr pozitiv a astfel că dacă cel puțin unul dintre coeficienții polinoamelor π_i, $i = 1, 2, \ldots, t$ este $\geq a$ în valoare absolută, avem

$$A\left[\prod_{i=1}^{t} |\pi_i|^{s_i}\right] > \mu. \tag{20}$$

Proprietatea aceasta rezultă din următoarele trei leme:

Lema 1. *Dacă $m < k$ și $\pi \in P_m$, există un număr pozitiv b_m astfel ca*

$$|\pi| \geq b_m \tag{21}$$

pe cel puțin $k - m$ din punctele y_i, $i = 1, 2, \ldots, k$.

Fie pentru aceasta

$$E(z_1, z_2, \ldots, z_{m+1}) \tag{22}$$

cea mai bună aproximație, în sensul lui Cebișev, a lui x^m prin polinoame de gradul $m-1$ pe punctele distincte $z_1, z_2, \ldots, z_{m+1}$. Valoarea lui (22) este bine cunoscută [13] dar nu este nevoie să fie reprodusă aici. Reținem numai că acest număr este *pozitiv*[4]).

Să luăm $b_m = \min E(y_{i_1}, y_{i_2}, \ldots, y_{i_{m+1}})$, unde minimul se referă la toate combinările $i_1, i_2, \ldots, i_{m+1}$ cîte $m+1$ ale indicilor $1, 2, \ldots, k$. Din proprietățile polinoamelor de cea mai bună aproximație și din definiția numărului b_m rezultă că printre primele $m+1$ puncte y_i există unul, fie y_{j_1} pe care $|\pi| \geq b_m$. Lăsînd la o parte punctul y_{j_1}, printre primele $m+1$ puncte y_i rămase, există unul, fie y_{j_2}, pe care $|\pi| \geq b_m$. Lăsăm la o parte și punctul y_{j_2} și continuăm procedeul. In felul acesta determinăm punctele y_{j_1}, $y_{j_2}, \ldots, y_{j_{m+1}}$ pe care inegalitatea (21) este verificată.

3) Avem $\mathrm{sg} z = -1, 0$ resp. 1 după cum $z <, =$ resp. > 0. Dacă s este un număr întreg pozitiv și par, avem $|z|^{s-1} \mathrm{sg} z = z^{s-1}$, $|z|^{s-1} = z^{s-1} \mathrm{sg} z$, oricare ar fi z.

4) Dacă $\epsilon = \min\limits_{i \neq j} |z_i - z_j|$, avem

$$E(z_1, z_2, \ldots, z_{m+1}) > \frac{\epsilon^m}{m+1}$$

Observăm că numărul b_m nu depinde de polinomul π.

Lema 2. *Dacă* $\pi \in P_m$ *și dacă avem* $|\pi| \leq M$, *pe* m *puncte distincte* $z_1, z_2, \ldots, z_m$, *atunci există un număr pozitiv* $F(z_1, z_2, \ldots, z_m)$ *astfel că toți coeficienții polinomului* π *să fie* $< F(z_1, z_2, \ldots, z_m) M$, *în valoare absolută.*

Proprietatea este bine cunoscută și ne putem dispensa de a da demonstrarea ei aici [5]).

Lema 3. *Dacă* $\pi_i \in P_{n_i}$, $i = 1, 2, \ldots, t$, $n = n_1 + n_2 \cdots + n < k$ *și dacă*

$$\prod_{i=1}^{t} |\pi_i|^{s_i} \leq N, \tag{23}$$

pe punctele $y_1, y_2, \ldots, y_k$, *există un număr pozitiv* c, *independent de polinoamele* π_i, $i = 1, 2, \ldots, t$, *astfel ca toți coeficienții acestor polinoame să fie* $< cN$ *în valoare absolută.*

Demonstrația se poate face prin inducție completă asupra lui t. Pentru $t = 1$ proprietatea este adevărată căci atunci (23) devine $|\pi_1|^{s_1} \leq N$ și, pe baza lemei 2, coeficienții polinomului π_1 sînt $< F(y_1, y_2, \ldots, y_{n_1}) N^{\frac{1}{s_1}}$ în valoare absolută.

Să presupunem că proprietatea este adevărată pentru $t-1$ $(t > 1)$ puteri și să o demonstrăm pentru t puteri. Să presupunem deci că avem (23). Pe baza lemei 1, fie $y_{j_1}, y_{j_2}, \ldots, y_{j_{k-n_1}}$, $k - n_1$ dintre punctele y_i pe care avem $|\pi_1| \geq b_{n_1}$. Atunci $k - n_1 > n_2 + n_3 + \cdots + n_t$ și pe aceste puncte avem $\prod_{i=2}^{t} |\pi_i|^{s_i} \leq N b_{n_1}^{-s_1}$. Rezultă că există un număr c' astfel ca toți coeficienții polinoamelor $\pi_2, \pi_3, \ldots, \pi_t$ să fie $< c' b_{n_1}^{-s_1} N$, în valoare absolută. La fel demonstrăm că există un număr c'' astfel ca toți coeficienții polinoamelor $\pi_1, \pi_3, \pi_4, \ldots, \pi_t$ să fie $< c'' b_{n_2}^{-s_2} N$, în valoare absolută. Dacă $c = \max(c' b_{n_1}^{-s_1}, c'' b_{n_2}^{-s_2})$, vedem că proprietatea este adevărată pentru t puteri. Cu aceasta, lema 3 este demonstrată.

11. Să revenim la pt. 1^0 al teoremei 3.

Avem evident

$$\mu \leq A[|x|^{n_1 s_1 + n_2 s_2 + \cdots + n_t s_t}] = T.$$

Să presupunem acum că

$$\prod_{i=1}^{t} |\pi_i|^{s_i} \leq N_1 = \frac{T}{\min(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k)}$$

și fie c_1, numărul c corespunzător lui $N = N_1$ din lema 3.

Dacă atunci $a = c_1 N_1$ și dacă cel puțin unul din coeficienții polinoamelor $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_t$ este $\geq a$ în valoare absolută, avem $\prod_{i=1}^{t} |\pi_i|^{s_i} > N_1$ pe

5) Dacă $\delta = \max_i |z_i|$, avem

$$F(z_1, z_2, \ldots, z_m) < \frac{M}{E(z_1, z_2, \ldots, z_m)} + (\delta + 1)^m.$$

cel puțin unul din punctele y_i. Avem atunci $A[\prod_{i=1}^{t} |\pi_i|^{s_i}] > T \geq \mu$ și inegalitatea (20) este verificată.

Printr-un raționament bine cunoscut putem acum demonstra existența a cel puțin unui sistem minimizant.

Din definiția lui μ și din proprietățile precedente, rezultă că putem găsi un șir infinit de sisteme de polinoame $\pi_i^{(m)} \in P_{n_i}$, $i = 1, 2, \ldots, t$, $m = 1, 2, \ldots$ astfel ca, pe de o parte, toți coeficienții acestor polinoame să fie $< a$ în valoarea absolută și, pe de altă parte, dacă pentru prescurtare punem $\Pi^{(m)} = \prod_{i=1}^{t} |\pi_i^{(m)}|^{s_i}$ să avem

$$\lim_{m \to \infty} A[\Pi^{(m)}] = \mu.$$

Putem atunci extrage din șirul $(\Pi^{(m)})_{m=1}^{\infty}$ un șir parțial $(\Pi^{(\nu_m)})_{m=1}^{\infty}$ astfel ca

$$\lim_{m \to \infty} \pi_i^{(\nu_m)} = \pi_i^* \in P_{n_i}, \quad i = 1, 2, \ldots, t$$

uniform în orice interval finit.

Rezultă atunci că polinoamele π_i^*, $i = 1, 2, \ldots, t$ formează un sistem minimizant.

Cu aceasta pt. 1^0 al teoremei 3 este demonstrat.

12. Fie π_i, $i = 1, 2, \ldots, t$ un sistem de polinoame minimizante. Să presupunem că $1 \leq u < t$, unde u este un număr natural și că polinoamele $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_u$ se descompun în produsul a doi factori reali $\pi_i = \pi_i' \pi_i''$, $i = 1, 2, \ldots, u$ astfel că $\pi_i' \in P_{n'_i}, \pi_i'' \in P_{n''_i}$ deci și $n_i' + n_i'' = n_i$. Putem presupune $n_i' > 0$, $i = 1, 2, \ldots, u$ și că, în particular, factorul π_i'' se poate reduce și la 1 (atunci $n_i'' = 0$, $n_i' = n_i$).

Să considerăm funcționala liniară

$$A_1[f] = A\left[\left(\prod_{i=1}^{u} |\pi_i''|^{s_i} \cdot \prod_{i=u+1}^{n} |\pi_i|^{s_i}\right) f\right]. \tag{24}$$

Această funcțională este de forma $A_1[f] = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j' f(y_j)$, unde

$$\lambda_j' = \lambda_j \prod_{i=1}^{u} |\pi_i''(y_j)|^{s_i} \cdot \prod_{i=u+1}^{n} |\pi_i(y_j)|^{s_i}, \quad j = 1, 2, \ldots, k.$$

Se vede că cel mult $n_1'' + n_2'' + \cdots + n_u'' + n_{u+1}\, n_{u+2} + \cdots + n_t$ coeficienți λ_j' se anulează și cel puțin $k' = k - (n + n_2 + \cdots + n_t) + n_1' + n_2' + \cdots + n_u' > n_1' + n_2' + \cdots + n_u'$ sînt pozitivi. Pt. 1^0 al teoremei 3 se aplică funcționalei (24) și sistemul de polinoame $\pi_1', \pi_2', \ldots, \pi_u'$ coincide în mod necesar cu un sistem minimizant pentru funcționala (24), pentru puterile $s_1, s_2, \ldots, s_u$ cărora corespund respectiv gradele $n_1', n_2', \ldots, n_u'$. Pentru a arăta acest lucru să presupunem contrariul și fie atunci $\pi_1^*, \pi_2^*, \ldots, \pi_u^*$ un sistem minimizant corespunzător funcționalei $A_1[f]$. Avem

$$A\left[\prod_{i=1}^{u} |\pi_i^* \pi_i''|^{s_i} \prod_{i=u+1}^{t} |\pi_i|^{s_i}\right] = A_1\left[\prod_{i=1}^{u} |\pi_i^*|^{s_i}\right] < A_1\left[\prod_{i=1}^{u} |\pi_i'|^{s_i}\right] = A\left[\prod_{i=1}^{t} |\pi_i|^{s_i}\right]$$

deci

$$\mathrm{A}\left[\prod_{i=1}^{u} |\pi_i^* \pi_i''|^{s_i} \prod_{i=u+1}^{t} |\pi_i|^{s_i}\right] < \mathrm{A}\left[\prod_{i=1}^{t} |\pi_i|^{s_i}\right]$$

ceea ce contrazice ipoteza că π_i, $i=1,2,\dots,t$ este un sistem minimizant.

13. Pe baza observațiilor de mai sus, pentru a demonstra pt. 2^0 al teoremei 3 este destul să presupunem $t=1$, ceea ce simplifică raționamentul. Fie atunci $\pi \in P_n$ un polinom minimizant. Să presupunem că π nu ar avea toate rădăcinile reale. Atunci acest polinom are un factor real de forma $(x-a)^2+b^2$, unde $b \neq 0$. Să punem $\pi(x)=[(x-a)^2+b^2]\,\mathrm{Q}(x)$, $\pi_1(x)=(x-a)^2\,\mathrm{Q}(x)$. Atunci $\pi_1 \in P_n$ și $|\pi_1| \leq |\pi|$ pentru orice x. Insă inegalitatea $|\pi_1|<|\pi|$ este verificată pe cel puțin unul din punctele y_i, prin urmare $\mathrm{A}[|\pi_1|^{s_1}] < \mathrm{A}[|\pi|^{s_1}]$, ceea ce contrazice ipoteza că π este un polinom minimizant.

Cu aceasta, pt. 2^0 al teoremei 3 este demonstrat.

14. Pentru a demonstra pt. 3^0 al teoremei 3, pe baza celor stabilite la nr. 12, 13, este destul a considera numai cazul $t=2$, $n_1=n_2=1$. Dacă atunci π_1, π_2 este un sistem minimizant, trebuie să arătăm că $\pi_1 \neq \pi_2$. Să presupunem contrariul, deci că am avea $\pi_1=\pi_2=\pi$ și fie $\psi(\epsilon)=\mathrm{A}[|\pi+s_2\epsilon|^{s_1}|\pi-s_1\epsilon|^{s_2}]$. Atunci $\psi(\epsilon)$ este o funcție continuă și are o derivată continuă în ϵ $(s_1, s_2>1)$.
Avem

$$\frac{d\psi}{d\epsilon}=-s_1 s_2(s_1+s_2)\,\epsilon\,\mathrm{A}[|\pi+s_2\epsilon|^{s_1-1}|\pi-s_1\epsilon|^{s_2-1}\,\mathrm{sg}(\pi+s_2\epsilon)(\pi-s_1\epsilon)] \tag{25}$$

Insă

$$\mathrm{A}[|\pi+s_2\epsilon|^{s_1-1}|\pi-s_1\epsilon|^{s_2-1}\,\mathrm{sg}(\pi+s_2\epsilon)(\pi-s_1\epsilon)]>0,$$

pentru $|\epsilon|$ destul de mic, deoarece membrul întîi este o funcție continuă de ϵ care pentru $\epsilon=0$ se reduce la $\mathrm{A}[|\pi|^{s_1+s_2-2}]>0$. Din (25) rezultă deci $\mathrm{sg}\,\frac{d\psi}{d\epsilon}=-\mathrm{sg}\,\epsilon$, pentru $|\epsilon|$ destul de mic, ceea ce ne arată că $\psi(\epsilon)$ are un maximum relativ strict pentru $\epsilon=0$. Pentru $|\epsilon|$ destul de mic dar $\neq 0$ avem deci

$$\mathrm{A}[|\pi+s_2\epsilon|^{s_1}|\pi-s_1\epsilon|^{s_2}] < \mathrm{A}[|\pi|^{s_1+s_2}]$$

ceea ce contrazice ipoteza că $\pi_1=\pi_2=\pi$ este un sistem minimizant. Cu aceasta am demonstrat că $\pi_1 \neq \pi_2$ și deci pt. 3^0 al teoremei 3.

15. Fie $x_1, x_2, \dots, x_n$ rădăcinile polinomului $\pi_1\pi_2\dots\pi_t$, atunci

$$\mathrm{A}\left[\prod_{i=1}^{t}|\pi_i|^{s_i}\right]=\mathrm{A}\left[\prod_{i=1}^{n}|x-x_i|^{s'_i}\right] \tag{26}$$

este o funcție continuă de $x_1, x_2, \dots, x_n$. Pe baza rezultatelor precedente, în orice punct unde marginea inferioară (17) este atinsă, avem un minimum relativ al funcției. Dacă puterile $s_1, s_2, \dots, s_t$ sînt toate >1, aceste minime sînt atinse numai pentru valori diferite ale variabilelor x_i. In acest caz

însă funcția (26) este derivabilă și deci, în aceste puncte, derivatele parțiale de ordinul întîi ale funcției (26) sînt nule. Avem[6])

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\mathrm{A}\left[\prod_{i=1}^{t}|\pi_i|^{s_i}\right]=s'_i\,\mathrm{A}\left[\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}|x-x_j|^{s'_j}\,.\,|x-x_i|^{s'_i-1}\,\mathrm{sg}(x-x_i)\right]=$$

$$=s'_i\,\mathrm{A}\left[\prod_{i=1}^{t}|\pi_i|^{s_i-1}\,.\,\mathrm{sg}\left(\prod_{i=1}^{t}\pi_i\right).\,(x-x_1)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)\right],$$

de unde rezultă pt. 4^0 al teoremei 3, observînd că în condițiile de aici polinoamele (11) sînt liniar independente.

16. Enunțul pt. 5^0 al teoremei 3 constituie, sub o formă mai completă, o reciprocă a proprietății precedente în sensul că pt. 3^0 rezultă din pt. 4^0. De altfel proprietatea este ceva mai generală și se poate enunța astfel:

Teorema 4. $\mathrm{A}[f]$ *fiind o funcțională liniară de forma* (16) *cu punctele* y_i *distincte și cu numerele* λ_i *toate pozitive, iar* $s_1, s_2, \dots, s_t$ *un sistem de puteri toate* >1 *și* $n_1, n_2, \dots, n_t$ *un sistem de grade corespunzătoare, cu suma lor* $n<k$, *dacă polinoamele* $\pi_i \in P_{n_i}$, $i=1,2,\dots,t$ *verifică egalitatea* (19) *pentru orice polinom* $\mathrm{Q}(x)$ *de gradul* $n-1$, *atunci toate rădăcinile polinomului* (18) *sînt reale, distincte și separate de punctele* y_i, $i=1,2,\dots,k$.

Proprietatea de separare din enunț înseamnă că dacă presupunem punctele y_i aranjate în ordine crescătoare, deci $y_1<y_2<\dots<y_k$, avem $\pi(y_1)\neq 0$, $\pi(y_k)\neq 0$ iar șirul

$$\pi(y_1),\ \pi(y_2),\dots,\pi(y_k) \tag{27}$$

prezintă (după suprimarea eventualilor termeni nuli) exact n variații de semn.

Observăm întîi că, polinomul π fiind de gradul n, șirul (27) prezintă cel mult n variații de semn. In plus, dacă $\pi(y_1)=0$, $\pi(y_k)\neq 0$ sau dacă $\pi(y_1)\neq 0$, $\pi(y_k)=0$ cel mult $n-1$, iar dacă $\pi(y_1)=\pi(y_k)=0$ cel mult $n-2$ variații de semn. In fine observăm că din $n<k$ rezultă că cel puțin un termen al șirului (27) este diferit de zero.

Să presupunem acum că șirul ar prezenta numai $n'<n$ variații de semn și fie

$$\pi(y_{j_1}),\ \pi(y_{j_2}),\dots,\pi(y_{j_{n'+1}}),\quad j_1<j_2<\dots<j_{n'+1}$$

un subșir al lui (27) care prezintă exact n' variații de semn. Fie i_ν cel mai mic număr natural astfel ca $\pi(y_{j_\nu})\,\pi(y_{j_\nu+i_\nu})<0$. Astfel $1\leq i_\nu \leq j_{\nu+1}-j_\nu$, $\nu=1,2,\dots,n'$. Să luăm punctele $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n'}$ astfel ca $y_{j_\nu}<\xi_\nu<y_{j_\nu+i_\nu}$, $\nu=1,2,\dots,n'$ și să considerăm polinomul $\mathrm{Q}(x)=\pi(y_{j_{n'+1}})(x-\xi_1)\,x-\xi_2)\dots(x-\xi_{n'})$ care este de gradul $n'\leq n-1$ și care nu se anulează pe nici unul din punctele y_i. Din felul cum au fost alese punctele ξ_ν, rezultă că avem și $\pi(y_j)\,\mathrm{Q}(y_t)\geq 0$, $i=1.2,\dots,k$, și avem atunci

6) Avem
$\frac{d\,|x|^s}{dx}=s\,|x|^{s-1}\,\mathrm{sg}x$ pentru $s>1$ și $\frac{d^2\,|x|^s}{dx^2}=s\,(s-1)\,|x|^{s-2}$ pentru $s\geq 2$.

$$A\left[\prod_{i=1}^{t} |\pi_i|^{s_i-1} (\mathrm{sg}\pi)\, Q\right] = A\left[\prod_{i=1}^{t} |\pi_i|^{s_i-1} |Q|\right] > 0$$

în contradicţie cu egalitatea (19).

Cu aceasta, teorema 4 este demonstrată. Ea generalizează o proprietate stabilită mai de mult pentru $t=1$, $s_1=2$ [7].

17. Teorema 3 şi rezultatele precedente ne arată că problema de minimum tratată revine totdeauna la cazul particular cînd gradele corespunzătoare puterilor sînt toate egale cu 1.

Dacă pentru prescurtare notăm cu $\mu^{s_1, s_2, \dots, s_t}$ numărul (17) cînd toate gradele $n_1, n_2, \dots, n_t$ sînt egale cu 1, avem

$$\mu^{s_1, s_2, \dots, s_t} < \mu^{s_2+s_2, s_3, s_4, \dots, s_t} \quad (t > 3)$$

şi în particular $\mu^{s_1, s_2, \dots, s_t} < \mu^{s_1+s_2+\dots+s_t}$.

In particular cazurile $t=1$ şi $s_1=s_2=\dots=s_t$ sînt echivalente în sensul precedent.

Pentru a preciza *unicitatea* sistemului minimizant trebuie să spunem că nu se consideră ca distincte două sisteme de polinoame minimizante în care pentru fiecare grup de puteri egale, produsul polinoamelor π_i este acelaşi.

Se ştie că sistemul minimizant este unic dacă puterile sînt egale şi > 1 [3].

Dacă puterile s_i nu sînt toate egale, unicitatea nu mai are loc în general după cum va rezulta din exemplele de la § 4. Tot aceste exemple ne arată că proprietatea exprimată de pt. 4^0 al teoremei 3 nu caracterizează sistemele minimizante, cu alte cuvinte, există şi polinoame (18) pentru care proprietatea de ortogonalitate 4^0 a teoremei 3 este verificată dar care nu sînt formate cu un sistem minimizant.

Dacă puterile $s_1, s_2, \dots, s_t$ sînt toate ≥ 2, deci şi $s'_i \geq 2$, $i=1,2,\dots,n$ putem uşor demonstra că orice sistem de polinoame π_i, $i=1,2,\dots,t$ care verifică proprietatea 4^0 a teoremei 3, deci în particular polinoamele minimizante, corespund la minime relative stricte ale funcţiei (26). Intr-adevăr, în acest caz, funcţia (26) are şi derivate parţiale de ordinul al doilea şi avem

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} A\left[\prod_{i=1}^{t} |\pi_i|^{s_i}\right] = s'_i(s'_i-1) A\left[\left(\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |x-x_j|^{s'_j}\right) |x-x_i|^{s'_i-2}\right] > 0$$

$$i=1,2,\dots,n$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} A\left[\prod_{i=1}^{t} |\pi_i|^{s_i}\right] = \tag{28}$$

$$= s'_i s'_j A\left[\left(\prod_{\substack{\nu=1\\ \nu\neq i,\ \nu\neq j}}^{n} |x-x_\nu|^{s'_\nu}\right) |x-x_i|^{s'_i-1} |x-x_j|^{s'_j-1} \,\mathrm{sg}(x-x_i)(x-x_j)\right] =$$

$$= s'_i s'_j A\left[\left(\prod_{i=1}^{t} |\pi_i|^{s_i-1}\right) \left(\mathrm{sg} \prod_{i=1}^{t} \pi_i\right) (x-x_1)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_{j-1}) \cdot\right.$$

$$\left.\cdot (x-x_{j+1})\dots(x-x_n)\right] \qquad i=1,2,\dots,j-1,\ j=2,3,\dots,n.$$

Pe baza proprietăţii de ortogonalitate (19) în punctele considerate, toate derivatele (28) sînt nule şi proprietatea enunţată rezultă.

In cazul cînd $n>k$, este evident că, în sensul de mai sus, există o infinitate de sisteme minimizante. Dacă $n=k$ unicitatea nu are loc, în sensul de mai sus, decît dacă puterile sînt egale. Este de observat că pt. 4^0 al teoremei 3 subsistă şi în cazul $n \geq k$, chiar cu reciproca sa, în sensul, că dacă (19) are loc pentru orice polinom $Q(x)$ de gradul $n-1$, sistemul π_i, $i=1,2,\dots,t$ este minimizant. Intr-adevăr să presupunem că sistemul nu ar fi minimizant deci că polinomul (18) nu s-ar anula pe toate punctele y_i. Fie, pentru fixarea ideilor, $\pi(y_k) \neq 0$. Avem atunci

$$A\left[\prod_{i=1}^{t} |\pi_i|^{s_i-1} \cdot (\mathrm{sg}\pi)(x-y_1)(x-y_2)\dots(x-y_{k-1})\right] =$$

$$= \lambda_k \prod_{i=1}^{t} |\pi_i(y_k)|^{s_i-1} \mathrm{sg}(\pi(y_k)) \cdot (y_k-y_1)(y_k-y_2)\dots(y_k-y_{k-1}) \neq 0,$$

ceea ce contrazice egalitatea (19).

§ 3. Existenţa unor formule de tip Gauss.

18. Avem întîi următoarea:

Teorema 5. *Pentru orice funcţională liniară* $A[f]$ *de forma* (16), *cu punctele* y_i *distincte şi cu numerele* λ_i *toate pozitive, relativ la orice număr natural* $n<k$ *şi la orice sistem de ordine de multiplicitate* $r_1, r_2, \dots, r_n$ *format din numere* **impare**, *există cel puţin o formulă* (8) *de tip Gauss.*

Ipoteza ca numerele $r_1, r_2, \dots, r_n$ să fie toate impare este esenţială după cum rezultă uşor pe baza unor consideraţii analoage cu cele făcute la nr. 7.

Teorema 5 rezultă din teorema 3. Pentru a vedea acest lucru este destul să luăm $t=n$, puterile $s_1, s_2, \dots, s_n$ (≥ 2) respectiv egale cu $r_1+1, r_2+1, \dots, r_n+1$ şi gradele corespunzătoare toate egale cu 1. Dacă (2) sînt rădăcinile polinomului (18) corespunzător unui sistem minimizant, avem

$$l(x) = \prod_{i=1}^{n} |x-x_i|^{s_i-1} \mathrm{sg}(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)$$

şi condiţia (19) se reduce la ortogonalitatea polinomului $l(x)$ cu orice polinom de gradul $n-1$.

In felul acesta, fiecărui sistem minimizant îi corespunde o formulă (8) de tip Gauss.

19. Să revenim la o funcţională liniară $A[f]$ de ordin de pozitivitate k, aşa cum a fost aceasta definită la nr. 7. Evident că dacă $A[f]$ are ordinul de pozitivitate k, el are şi ordinul de pozitivitate k' pentru orice $k'<k$.

Dacă introducem momentele

$$\alpha_i = A[x^i],\ i=0,1,\dots \tag{29}$$

şi determinanţii lui Hankel $A_j = \| \alpha_{\lambda+\mu} \|_{\lambda,\mu=0,1,\dots,j}$, $j=0,1,\dots$, corespunzători, condiţia necesară şi suficientă ca funcţionala $A[f]$ să aibă ordinul de pozitivitate k este ca să avem

$$A_j > 0,\ j = 0,1,\dots,k-1, \tag{30}$$

sau, ceea ce este echivalent, ca forma patratică $\sum\limits_{i,j=0}^{k-1} \alpha_{i+j}\,\xi_i\,\xi_j$ să fie definită şi pozitivă.

Este clar că în general determinarea formulelor de tip Gauss nu depinde decît de rapoartele mutuale ale primilor $p+n+1$ momente α_i, $i=0,1,\dots,p+n$ ale lui $A[f]$. Mai precis în determinarea formulelor de tip Gauss se poate face abstracţie de o transformare liniară a variabilei x şi de un factor constant diferit de zero al funcţionalei $A[f]$. De altfel această observaţie este valabilă în general pentru formulele de forma (3) care prin transformările indicate îşi păstrează forma şi gradul de exactitate.

Dacă $A[f]$ este o funcţională liniară de ordin de pozitivitate k, există un polinom $\rho_k \in P_k$ şi unul singur care este ortogonal cu orice polinom de gradul $k-1$. Acesta este *polinomul ortogonal de gradul* k ataşat funcţionalei $A[f]$ [7]).

Polinomul ρ_k are toate rădăcinile reale şi distincte. Intr-adevăr, în cazul contrar, acest polinom ar trebui să aibă un divizor de forma $(x-a)^2+b^2$ (a, b reali). Dacă atunci $\rho_k = [(x-a)^2+b^2]\,Q$, Q este un polinom de gradul $k-2$ şi avem $A[\rho_k Q] = A[((x-a)\,Q)^2] + b^2 A[Q^2] > 0$, ceea ce contrazice proprietatea de ortogonalitate.

E clar că polinomul ρ_k nu depinde decît de primele $2k$ momente α_i, $i=0,1,\dots,2k-1$ ale lui $A[f]$.

In particular o funcţională de forma (16), în care y_i sînt distincţi şi λ_i pozitivi, are gradul de pozitivitate k. In acest caz $\rho_k(x) = (x-y_1)(x-y_2)\dots(x-y_k)$.

Dar avem şi un fel de reciprocă a acestei proprietăţi în sensul următor. Dacă y_i, $i=1,2,\dots,k$ sînt rădăcinile polinomului ρ_k iar momentele (29) verifică inegalităţile (30), există o funcţională liniară $A^{(k)}[f]$ de forma (16), cu toţi coeficienţii λ_i pozitivi şi astfel ca să avem

$$\alpha_i = A^{(k)}[x^i],\quad i=0,1,\dots,2k-1. \tag{31}$$

Intr-adevăr, orice polinom $Q(x)$ de gradul k este de forma

$$Q(x) = a\,\rho_k(x) + \sum_{i=1}^{k} \frac{\rho_k(x)}{(x-y_i)\,\rho'_k(y_i)}\,Q(y_i)$$

unde constanta a este egală cu zero dacă şi numai dacă $Q(x)$ este de gradul $k-1$. Dacă $P(x)$ este un polinom de gradul $2k-1$, el este totdeauna produsul a două polinoame (reale) $Q(x)$, $Q_1(x)$, primul de gradul k şi al doilea de gradul $k-1$. Avem deci

$$P(x) = Q(x)\,Q_1(x) = \left[a\,\rho_k(x) + \sum_{i=1}^{k} \frac{\rho_k(x)}{(x-y_i)\,\rho'_k(y_i)}\,Q(y_i)\right]\cdot$$

$$\cdot\left[\sum_{i=1}^{k} \frac{\rho_k(z)}{(x-y_i)\,\rho'_k(y_i)}\,Q_1(y_i)\right] = a\sum_{i=1}^{k} \rho_k(x)\,\frac{\rho_k(x)}{(x-y_i)\,\rho'_k(y_i)}\,Q_1(y_i) +$$

7) Existenţa şi unicitatea polinomului ρ_k rezultă numai din $A_{k-1} \neq 0$. Dacă $A_{k-1} = 0$ un astfel de polinom sau nu există sau el nu este determinat în mod unic.

$$+ \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{\rho_k(x)}{(x-y_i)\,\rho'_k\,y_i)}\right)^2 P(y_i) +$$

$$+ \sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{k} \rho_k(x)\,\frac{\rho_k(x)}{(x-y_i)(x-y_j)\,\rho'_k(y_i)\,\rho'_k(y_j)}\,Q(y_i)\,Q_1(y_j)$$

Dacă ţinem seamă de ortogonalitate, deducem

$$A[P] = A^{(k)}[P] = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\,P(y_i)$$

unde

$$\lambda_i = A\left[\left(\frac{\rho_k(x)}{(x-y_i)\,\rho'_k(y_i)}\right)^2\right] > 0,\ i=1,2,\dots,k$$

De aici rezultă, în particular, formulele (31).

Din analiza precedentă reţinem:

Lema 4. — *Dacă funcţionala liniară $A[f]$ are ordinul de pozitivitate k, se poate găsi o funcţională liniară $A^{(k)}[f]$ de forma (16) cu toţi coeficienţii λ_i pozitivi şi astfel ca să avem $A[f] = A^{(k)}[f]$, pentru orice polinom de gradul $2k-1$.*

Este uşor de văzut că funcţionala liniară $A^{(k)}[f]$ este unică şi este tocmai cea determinată mai sus.

20. — Presupunem bineînţeles că dacă $A[f]$ are ordinul de pozitivitate k, intervalul I conţine rădăcinile polinomului ortogonal de gradul k ataşat acestei funcţionale.

Putem face observaţia că dacă a este un număr astfel ca $A[(x-a)Q^2] > 0$, pentru orice polinom Q de gradul $k-1$, rădăcinile polinomului ρ_k sînt toate $> a$. Intr-adevăr dacă ρ_k ar avea o rădăcină $x_0 \leq a$, atunci dacă punem $\rho_k(x) = (x-x_0)\,Q(x)$, am avea $A[\rho_k Q] = A[(x-a)\,Q^2] + (a-x_0)\,A[Q^2] > 0$, care contrazice ortogonalitatea. La fel se vede că dacă $A[(x-b)\,Q^2] < 0$, pentru orice polinom Q de gradul $k-1$, rădăcinile lui ρ_k sînt toate $< b$.

Astfel, de ex., funcţionalele clasice ale lui Jacobi, Laguerre şi Hermite

$$J^{(\alpha,\beta)}[f] = \int_{-1}^{+1} (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta} f(x)\,dx \quad (\alpha,\beta > -1) \tag{32}$$

$$L^{(\alpha)}[f] = \int_{0}^{\infty} e^{-x}\,x^{\alpha} f(x)\,dx \quad (\alpha > -1) \tag{33}$$

$$H[f] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} f(x)\,dx \tag{34}$$

au ordinul de pozitivitate k, pentru orice k. In primul caz rădăcinile polinoamelor ortogonale sînt în intervalul $(-1,1)$, în al doilea în intervalul $(0,\infty)$ iar în al treilea caz în intervalul $(-\infty,+\infty)$. In aceste cazuri este deci destul să presupunem că I coincide respectiv cu aceste intervale. In cazul funcţionalelor liniare pozitive rezultă în particular că rădăcinile polinoamelor ortogonale sînt în interiorul intervalului I.

21. — Revenind la problema noastră, putem acum demonstra

Teorema 6. — *Pentru orice funcţională liniară* $A[f]$ *care are ordinul de pozitivitate* k, *relativ la orice număr natural şi la orice sistem de ordine de multiplicitate* $r_1, r_2, \ldots, r_n$ *format numai din numere* **impare** *astfel ca* $k \geq \frac{1}{2}(p+n+1)$, *există cel puţin o formulă (8) de tip Gauss.*

Pentru a demonstra această teoremă este destul să considerăm funcţionala $A^{(k)}[f]$ determinată de lema 4. Fie atunci (2) nodurile unei formule a lui Gauss relativă la funcţionala $A^{(k)}[f]$ O astfel de formulă există căci $k \geq n$. Polinomul $l(x)$ este ortogonal cu orice polinom $Q(x)$ de gradul $n-1$ faţă de funcţionala $A^{(k)}[f]$. Insă produsul $l(x)Q(x)$ este de gradul $p+n \leq 2k-1$, deci $A[lQ]=A^{(k)}[lQ]=0$. Polinomul $l(x)$ este deci ortogonal cu orice polinom de gradul $n-1$ faţă de funcţionala $A[f]$, ceea ce, pe baza teoremei 2, demonstrează proprietatea.

Se vede de asemenea că toate formulele de tip Gauss relative la funcţionala $A[f]$ se obţin în acest fel.

Egalitatea $k=n$ nu este posibilă decît dacă $r_1=r_2=\cdots=r_n=1$. Atunci formula de tip Gauss este unică şi are ca noduri tocmai rădăcinile polinomului ρ_k ortogonal ataşat funcţionalei $A[f]$. In afară de acest caz particular, în ipotezele indicate, nodurile oricărei formule de tip Gauss sînt separate de rădăcinile polinomului ortogonal ρ_k ataşat funcţionalei $A[f]$.

Observăm că, în condiţiile teoremei 6, avem

$$(35)\qquad A\left[\prod_{i=1}^{n}(x-x_i)^{r_i+1}\right]= \\ =A^{(k)}\left[\prod_{i=1}^{n}(x-x_i)^{r_i+1}\right]+A[x^{p+n+1}]-A^{(k)}[x^{p+n+1}].$$

Se vede că asupra expresiei (35) se poate pune şi rezolva problema de minimum de la §2, ca şi în cazul funcţionalelor de forma (16). Este vorba bineînţeles de problema de minimum care corespunde puterilor r_i+1, $i=1,2,\ldots,n$ şi gradelor respective toate egale cu 1.[8] Problema se reduce de altfel, pe baza egalităţii (35), la o problemă corespunzătoare pentru o funcţională de formă (16). Există deci, în particular, formule de tip Gauss corespunzătoare sistemului minimizant al acestei probleme.

Dacă $A[f]$ are ordinul de pozitivitate $k > \frac{1}{2}(p+n+1)$, formula (35) se poate înlocui cu

$$A\left[\prod_{i=1}^{n}(x-x_i)^{r_i+1}\right]=A^{(k)}\left[\prod_{i=1}^{n}(x-x_i)^{r_i+1}\right]$$

In particular, o funcţională liniară pozitivă are un ordin de pozitivitate k pentru orice k şi deducem deci

8) Marginea inferioară a acestei expresii nu mai este neapărat ≥ 0.

Consecinţa 1. — *Pentru orice funcţională liniară pozitivă, relativ la orice număr natural n şi la orice sistem de ordine de multiplicitate* $r_1, r_2, \ldots, r_n$ *format numai din numere impare, există cel puţin o formulă de tip Gauss.*

In acest caz nodurile unei formule de tip Gauss sînt în interiorul intervalului I şi sînt separate de rădăcinile oricărui polinom ortogonal de gradul $k > \frac{1}{2}(p+n+1)$ ataşat funcţionalei.

In particular (32), (33), (34) sînt funcţionale de acest fel.

Existenţa formulelor de tip Gauss pentru cazul $r_1=r_2=\ldots=r_n=$ impar a fost demonstrată de P. Turán [**12**].

22. — Pentru restul $R[f]$ al formulelor (8) de tip Gauss, avem

$$(36)\qquad R[x^{p+n+1}]=R\left[l(x)\prod_{i=1}^{n}(x-x_i)\right]=A\left[\prod_{i=1}^{n}(x-x_i)^{r_i+1}\right]$$

Rezultă că în condiţiile teoremei 6, $R[x^{p+n+1}]$ este cel mai mic, pentru şi numai pentru formulele de tip Gauss care provin din sistemele minimizante.

Dacă funcţionala $A[f]$ are ordinul de pozitivitate $k > \frac{1}{2}(p+n+1)$, toate formulele de tip Gauss au gradul de exactitate egal cu $p+n$, deoarece, în acest caz din (36) rezultă că $R[x^{p+n+1}] > 0$.

Pe baza unei observaţii făcute la nr. 5 şi pe baza expresiei bine cunoscute a restului formulei de interpolare a lui Lagrange-Hermite, restul $R[f]$ al unei formule (8) de tip Gauss se poate scrie

$$(37)\qquad R[f]= \\ =A\left[\prod_{i=1}^{n}(x-x_i)^{r_i+1}[\underbrace{x_1,x_1,\ldots,x_1}_{r_1+1},\underbrace{x_2,x_2,\ldots,x_2}_{r_2+1},\ldots,\underbrace{x_n,x_n,\ldots,x_n}_{r_n+1},x;f]\right]$$

folosind o notaţie convenabilă a diferenţelor divizate, care se pot defini astfel:

Fie

$$(38)\qquad V\begin{pmatrix} f_1, f_2, \ldots, f_{m+1} \\ z_1, z_2, \ldots, z_{m+1}\end{pmatrix}=\| f_j(z_i) \|_{i,j=1,2,\ldots,m+1}$$

determinantul valorilor funcţiilor $f_i=f_i(x)$, $i=1,2,\ldots,m+1$ pe punctele $z_1, z_2, \ldots, z_{m+1}$ (i este indicele liniilor iar j al coloanelor), cu condiţia că dacă un grup de ν puncte z_i sînt confundate, cele ν (>1) linii corespunzătoare conţin valorile funcţiilor şi ale primelor lor $\nu-1$ derivate pe acest punct. In particular

$$V(z_1, z_2, \ldots, z_{m+1})=V\begin{pmatrix}1, x, \ldots, x^m \\ z_1, z_2, \ldots, z_{m+1}\end{pmatrix}$$

este determinantul lui Vandermonde al numerelor $z_1, z_2, \ldots, z_{m+1}$ iar

$$[z_1, z_2, \ldots z_{m+1}; f]=\frac{V\begin{pmatrix}1, x, \ldots, x^{m-1}, f \\ z_1, z_2, \ldots, z_{m+1}\end{pmatrix}}{V(z_1, z_2, \ldots, z_{m+1})}$$

este diferența divizată (de ordinul m) a funcției $f(x)$ pe nodurile $z_1, z_2, \ldots, z_{m+1}$.

In cazul important pentru aplicații, cînd $A[f]$ este o funcțională liniară pozitivă, din (37) rezultă că avem $R[f] > 0$ dacă $f(x)$ este o funcție convexă de ordinul $p+n$. Se știe atunci că avem [8],

$$R[f] = R[x^{p+n+1}]\, D_{p+n+1}[f] \tag{39}$$

unde, pentru prescurtare, notăm cu $D_m[f]$ o diferență divizată de ordinul m al funcției $f(x)$ pe $m+1$ noduri *distincte* convenabile (depinzînd de funcția f) din interiorul intervalului I. Aceste noduri pot fi alese oricît de aproape unul de altul [**1**,**10**].

Dacă, în particular, funcția $f(x)$ admite o derivată de ordinul $p+n+1$, avem

$$R[f] = \frac{R[x^{p+n+1}]}{(p+n+1)!} f^{(p+n+1)}(\xi), \tag{40}$$

unde ξ este un punct convenabil al interiorului intervalului I. De asemenea dacă $f(x)$ are o derivată de ordinul $p+n$ care verifică o condiție Lipschitz ordinară cu constanta M, avem

$$|R[f]| \le \frac{|R[x^{p+n+1}]|}{(p+n+1)!} M \tag{41}$$

In formulele (39), (40), (41), coeficientul $R[x^{p+n+1}]$ se poate înlocui cu valoarea lui scoasă din (36).

In fine în acest caz mai observăm că în sensul delimitării restului, cele mai precise formule de tip Gauss sînt acelea care corespund sistemelor minimizante.

In cazul particular cînd $k=n$ și funcționala este de forma (16), formula de tip Gauss (unică) se reduce la formula banală

$$A[f] \approx \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(y_i)$$

cu restul identic nul. Gradul de exactitate al acestei formule este $+\infty$.

§ 4. — Determinarea cîtorva formule de tip Gauss

23. — Pentru a uniformiza notațiile, cînd este vorba de o funcțională liniară $F[f]$, notăm cu litera greacă mică corespunzătoare, afectată de indici, momentele $\varphi_i = F[x^i]$, $i = 0,1,\ldots$, cu litera greacă mare corespunzătoare, afectată de indici, determinanții lui Hankel $\Phi_{i,j} = \|\varphi_{i+\lambda+\mu}\|_{\lambda,\mu=0,1,\ldots,j}$, $i,j = 0,1,\ldots$ și, în particular, $\Phi_j = \Phi_{0,j}$ $j = 0,1,\ldots$

De asemenea introducem momentele transformate $\varphi_{i,j}(\xi) = F[(\xi - x)^i x^j]$, $i,j = 0,1,\ldots$, unde ξ este un parametru independent de x. Avem atunci

$$\varphi_{i,j}(\xi) = \sum_{\nu=0}^{i} (-1)^{\nu} \binom{i}{\nu} \xi^{i-\nu} \varphi_{\nu+j}$$

Determinantul lui Hankel $\Phi_{i,j}(\xi) = \|\varphi_{i+\lambda+\mu,0}(\xi)\|_{\lambda,\mu=0,1,\ldots,j}$ care este un polinom în ξ, se poate aduce, prin transformări elementare de linii și coloane, la alte forme remarcabile. Astfel, avem $(0 \le r \le i)$.

$$\Phi_{i,j}(\xi) = \begin{vmatrix} \varphi_{i-r,0}(\xi) & \varphi_{i-r,1}(\xi) & \ldots & \varphi_{i-r,r+j}(\xi) \\ \varphi_{i-r,1}(\xi) & \varphi_{i-r,2}(\xi) & \ldots & \varphi_{i-r,r+j+1}(\xi) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \varphi_{i-r,j}(\xi) & \varphi_{i-r,j+1}(\xi) & \ldots & \varphi_{i-r,r+2j}(\xi) \\ \delta_0^0(\xi) & \delta_1^0(\xi) & \ldots & \delta_{j+r}^0(\xi) \\ \delta_0^1(\xi) & \delta_1^1(\xi) & \ldots & \delta_{j+r}^1(\xi) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \delta_0^{r-1}(\xi) & \delta_1^{r-1}(\xi) & \ldots & \delta_{j+r}^{r-1}(\xi) \end{vmatrix} \tag{42}$$

unde punem

$$\delta_i^{\nu}(\xi) = \binom{i}{\nu} \xi^{i-\nu}, \ \nu, i = 0,1,\ldots, \ (\delta_i^{\nu}(\xi) = 0, \text{ pentru } i < \nu)$$

In particular, pentru $r=i$ formula (42) devine

$$\Phi_{i,j}(\xi) = \begin{vmatrix} \varphi_0 & \varphi_1 & \ldots & \varphi_{i+j} \\ \varphi_1 & \varphi_2 & \ldots & \varphi_{i+j+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \varphi_j & \varphi_{j+1} & & \varphi_{i+2j} \\ \delta_0^0(\xi) & \delta_1^0(\xi) & \ldots & \delta_{i+j}^0(\xi) \\ \delta_0^1(\xi) & \delta_1^1(\xi) & \ldots & \delta_{i+j}^1(\xi) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \delta_0^{i-1}(\xi) & \delta_1^{i-1}(\xi) & \ldots & \delta_{i+j}^{i-1}(\xi) \end{vmatrix}$$

De asemenea formula este valabilă pentru $r=0$ sub forma următoare:

$$\Phi_{i,j}(\xi) = \begin{vmatrix} \varphi_{i,0}(\xi) & \varphi_{i,1}(\xi) & \ldots & \varphi_{i,j}(\xi) \\ \varphi_{i,1}(\xi) & \varphi_{i,2}(\xi) & \ldots & \varphi_{i,j+1}(\xi) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \varphi_{i,j}(\xi) & \varphi_{i,j+1}(\xi) & \ldots & \varphi_{i,2j}(\xi) \end{vmatrix}$$

Dacă acestui din urmă determinant îi aplicăm o formulă de transformare cunoscută (a se vedea de ex, [**11**]), deducem:

$$\Phi_{i,j}(\xi) = \frac{1}{(j+1)!} F_{t_1, t_2, \ldots, t_{j+1}} \left[\left(\prod_{\nu=1}^{j+1} (\xi - t_{\nu})^i \right) V^2(t_1, t_2, \ldots, t_{j+1}) \right]$$

unde notăm cu $F_{t_1, t_2, \dots, t_{j+1}}$ aplicarea succesivă a operatorului F la variabilele $t_1, t_2, \dots, t_{j+1}$.

24. — Pentru a determina efectiv toate formulele de tip Gauss, este suficient să rezolvăm sistemul care se obține din (10) dacă înlocuim pe Q cu n polinoame de gradul $n-1$ liniar independente. Aceasta revine la rezolvarea sistemului (14) sau al unui sistem echivalent în sensul de la nr. 6.

Ne vom ocupa în special de cazul cînd $n>1, 1 \leq u<n$ şi $r_{u+1}=r_{u+2}=\dots=r_n=1$. Celelalte ordine de multiplicitate $r_1, r_2, \dots, r_u$ sînt numere impare (unele sau toate pot fi egale şi cu 1).

Presupunînd că am obţinut nodurile $x_1, x_2, \dots, x_u$, celelalte noduri sînt determinate în mod unic ca rădăcinile polinomului ortogonal ρ_{n-u} de gradul $n-u$ ataşat funcţionalei [9]

$$C[f]=A\left[\left(\prod_{i=1}^{u}(x_i-x)^{r_i+1}\right)f\right]$$

Polinomul ρ_{n-u} se poate obţine prin rezolvarea unui sistem liniar. Dacă punem

$$\rho_{n-n}=(-1)^{n-u}\sum_{\nu=0}^{n-u} d_\nu(\xi)(\xi-x)^\nu \quad (d_{n-n}(\xi)=1)$$

avem

$$\sum_{\nu=0}^{n-u} d_\nu(\xi)\gamma_{i+\nu,0}(\xi)=0, \qquad i=0,1\dots, n-u-1 \tag{43}$$

Funcţionala $A[f]$, avînd ordinul de pozitivitate $k \geq \frac{1}{2}(p+n+1)$, funcţionala $C[f]$ va avea ordinul de pozitivitate $k-\frac{1}{2}(r_1+r_2+\dots+r_u+u) \geq n-u$ şi deci sistemul (43) are o soluţie unică bine determinată. Determinantul acestui sistem este independent de ξ şi este egal cu Γ_{n-u}.

25.— Sistemul (43) este echivalent cu ultimele $n-u$ ecuaţii (14). Ţinînd seamă de acest sistem, primele u ecuaţii (14) le vom înlocui cu altele care vor conţine numai variabilele $x_1, x_2, \dots, x_u$.

Pentru aceasta considerăm funcţionala

$$C^{(j)}[f]=A\left[\left(\prod_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{u}(x_i-x)^{r_i+1}\right)f\right] \tag{44}$$

Atunci a j^a ecuaţie (14) se poate scrie

$$C^{(j)}[(x_j-x)^{r_j}\rho^2_{u-n}]=0. \tag{45}$$

Observăm acum că $C[f]=C^{(j)}[(x_j-x)^{r_j+1}f]$ deci $\gamma_{i,0}(x_j)=\gamma^{(j)}_{r_j+1+i,0}(x_j)$, $i=0,1\dots$, aşa că pentru $\xi=x_j$, sistemul (43) devine

9) Putem înlocui pe $(x-x_i)^{r_i+1}$ cu $(x_i-x)^{r_i+1}$ căci numerele r_i+1 sînt pare.

$$\sum_{\nu=0}^{n-u} d_\nu(x_j)\gamma^{(j)}_{r_j+1+i+\nu,0}(x_j)=0, \qquad i=1,\dots, n-u-1 \tag{46}$$

Dacă acum ţinem seamă de acest sistem, ecuaţia (45) devine

$$\sum_{\nu=0}^{n-u} d_\nu(x_j)\gamma^{(j)}_{r_j+\nu,0}(x_j)=0. \tag{47}$$

Eliminînd pe $d_\nu(x_j)$, $\nu=0,1,\dots,n-u-1$ din cele $n-u+1$ ecuaţii (56 (47), găsim

$$\Gamma^{(j)}_{r_j, n-u}(x_j)=0. \tag{48}$$

Dacă aici facem $j=1,2,\dots,u$ găsim un sistem care ne determină nodurile $x_1, x_2, \dots, x_u$.

Pe baza celor spuse la nr. 23, se mai poate scrie

$$\Gamma^{(j)}_{r_j, n-u}(x_j)=\frac{1}{(n-u+1)!}C^{(j)}_{t_1, t_2, \dots, t_{n-u+1}}\left[\left(\prod_{\nu=1}^{n-u+1}(x_j-t_\nu)^{r_j}\right).V^2(t_1, t_2, \dots, t_{n-u+1})\right]$$

şi dacă ţinem seamă de (44),

$$\Gamma^{(j)}_{r_j, n-u}(x_j)=$$

$$=\frac{1}{(n-u+1)!}A_{t_1, t_2, \dots, t_{n-u+1}}\left[\left(\prod_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{u}\prod_{\nu=1}^{n-u+1}(x_i-t_\nu)^{r_i+1}\right)\left(\prod_{\nu=1}^{n-u+1}(x_j-t_\nu)^{r_j}\right).V^2(t_1, t_2, \dots, t_{n-u+1})\right]$$

Odată nodurile $x_1, x_2, \dots, x_u$ determinate din sistemul indicat, se poate găsi polinomul ρ_{n-u} calculînd din sistemul (47) coeficienţii $d_\nu(x_j)$, $\nu=0,1,\dots,n-u-1$. Se poate scrie acest polinom explicit cu ajutorul momentelor funcţionalei $C[f]$. Avem

$$\rho_{n-u}(x)=\frac{\Gamma_{1, n-u-1}(x)}{\Gamma_{n-u-1}} \tag{49}$$

Dacă $A[f]$ are un ordin de pozitivitate $\geq r_1+r_2+\dots+r_u+n$, putem obţine polinomul ρ_{n-u} şi cu ajutorul unei cunoscute formule a lui Christoffel (vezi de ex. [**11**]). Pentru aceasta să notăm cu $P_m(x)$ polinomul ortogonal de gradul m ataşat funcţionalei $A[f]$. Acest polinom este bine determinat pentru $m \leq n+r_1+r_2+\dots+r_u$.

Atunci polinomul $\rho_{n-u}(x)\prod_{i=1}^{u}(x-x_i)^{r_i+1}$ diferă numai printr-un factor constant de

$$V\left(\begin{matrix} P_{n-u}, & P_{n-u+1}, \ldots, & P_{n+r_1+r_2+\ldots+r_u} \\ \underbrace{x_1, x_1, \ldots, x_1}_{r_1+1}, & \underbrace{x_2, x_2, \ldots, x_2}_{r_2+1}, \ldots, & \underbrace{x_u, x_u, \ldots, x_u}_{r_u+1}, x \end{matrix}\right)$$

26. In particular, dacă $u=1$, funcţionala $C^{(1)}[f]$ se reduce la $A[f]$ şi se deduce că nodul x_1 este o rădăcină a polinomului

$$A_{r_1, n-1}(x) = \begin{vmatrix} \alpha_{r_1,0}(x) & \alpha_{r_1,1}(x) & \ldots & \alpha_{r_1,n-1}(x) \\ \alpha_{r_1,1}(x) & \alpha_{r_1,2}(x) & \ldots & \alpha_{r_1,n}(x) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{r_1,n-1}(x) & \alpha_{r_1,n}(x) & \ldots & \alpha_{r_1,2n-2}(x) \end{vmatrix} =$$

$$\frac{1}{n!} A_{t_1, t_2, \ldots, t_n}\left[\left(\prod_{\nu=1}^{n}(x-t_\nu)\right)^{r_1} V^2(t_1, t_2, \ldots, t_n)\right]$$

care, dacă $r_1=1$, diferă numai printr-un factor constant de polinomul ortogonal de gradul n ataşat funcţionalei $A[f]$.

In ce priveşte calculul polinomului ρ_{n-1}, în acest caz, putem aplica formula (49). Dacă $A[f]$ are un ordin de pozitivitate $\geqq n+r_1$ avem

$$V\left(\begin{matrix} P_{n-1}, P_n, \ldots, P_{n+r_1-1} \\ \underbrace{x_1, x_1, \ldots, x_1}_{r_1+1} \end{matrix}\right) \rho_{n-1}(x)(x-x_1)^{r_1+1} = \tag{50}$$

$$= V\left(\begin{matrix} P_{n-1}, P_n, \ldots, P_{n+r_1} \\ \underbrace{x_1, x_1, \ldots, x_1}_{r_1+1}, x \end{matrix}\right).$$

Din determinantul din membrul al doilea al formulei (50) se poate uşor scoate factorul $(x-x_1)^{r_1+1}$ căci, în prima linie elementul $P_{n+i}(x)$ se poate înlocui, pe baza celorlalte r_1+1 linii cu ($i=-1,0,1,2,\ldots, r_1$)

$$\sum_{\nu=r_1+1}^{n+i} \frac{(x-x_1)^\nu}{\nu!} P^{(\nu)}_{n+i}(x_1) = (x-x_1)^{r_1+1} \sum_{\nu=r_1+1}^{n+i} \frac{(x-x_1)^{\nu-r_1-1}}{\nu!} P^{(\nu)}_{n+i}(x_1)$$

27. Putem calcula pe $R[x^{p+n+1}]$ relativ la restul formulelor de tip Gauss astfel obţinute. Din formulele (36), (44) deducem

$$R[x^{p+n+1}] = C^{(j)}[(x_j-x)^{r_j+1}\rho^2_{n-u}]$$

şi dacă ţinem seama de (46) obţinem

$$R[x^{p+n+1}] = \sum_{\nu=0}^{n-u} d_\nu(x_j)\gamma^{(j)}_{r_j+1+n-u+\nu, 0}(x_j) \tag{51}$$

Eliminînd pe $d_\nu(x_j)$, $\nu=0,1,\ldots, n-u-1$ din ecuaţiile (46), (51), obţinem

$$R[x^{p+n+1}] = \frac{\Gamma^{(j)}_{r_j+1, n-u}(x_j)}{\Gamma^{(j)}_{r_j+1, n-u-1}(x_j)} \tag{52}$$

Bineînţeles, în această formulă trebuie să înlocuim nodurile $x_1, x_2, \ldots, x_u$ cu valorile lor calculate din sistemul care se deduce din (48) dacă facem $j=1,2,\ldots, u$.

In particular dacă $u=1$, avem

$$R[x^{p+n+1}] = \frac{A_{r_1+1, n-1}(x_1)}{A_{r_1+1, n-2}(x_1)}$$

In general calculul lui (51) este complicat. Numai dacă $r_1=r_2=\ldots r_u=1$ (formula de tip Gauss este atunci unică) avem valoarea binecunoscută (în acest caz $p=n-1$)

$$R[x^{2n}] = \frac{A_n}{A_{n-1}}$$

28. Să considerăm cazul particular $n=2$, $r_1=3$, $r_2=1$ şi să presupunem că $A[f]$ are un ordin de pozitivitate $\geqq 3$. Nodul x_1 este o rădăcină a ecuaţiei

$$(\alpha_0\alpha_2-\alpha_1^2)x^6+3(\alpha_1\alpha_2-\alpha_0\alpha_3)x^5+3(\alpha_1\alpha_3+\alpha_0\alpha_4-2\alpha_2^2)x^4+(8\alpha_2\alpha_3- \tag{53}$$
$$-7\alpha_1\alpha_4-\alpha_0\alpha_5)x^3+3(\alpha_2\alpha_4+\alpha_1\alpha_5-2\alpha_3^2)x^2+3(\alpha_3\alpha_4-\alpha_2\alpha_5)x+\alpha_3\alpha_5-\alpha_4^2=0$$

Nodul x_2 este dat de formula

$$x_2 = \frac{\alpha_1 x_1^3-3\alpha_2 x_1^2+3\alpha_3 x_1-\alpha_4}{\alpha_0 x_1^3-3\alpha_1 x_1^2+3\alpha_2 x_1-\alpha_3}$$

iar numărul $R[x^6]$ de

$$R[x^6] = \alpha_2 x_1^4-4\alpha_3 x_1^3+6\alpha_4 x_1^2-4\alpha_5 x_1+\alpha_6-$$
$$-\frac{(\alpha_1 x_1^4-4\alpha_2 x_1^3+6\alpha_3 x_1^2-4\alpha_4 x_1+\alpha_5)^2}{\alpha_0 x_1^4-4\alpha_1 x_1^3+6\alpha_2 x_1^2-4\alpha_3 x_1+\alpha_4}$$

Ecuaţia (53) are cel puţin două rădăcini reale, deoarece, pe baza ipotezelor făcute, ea este de grad par şi are cel puţin o rădăcină reală [10]. Avem deci cel puţin două formule de tip Gauss, dintre care însă în general numai una corespunde sistemului minimizant. Pentru a arăta acest lucru, este suficient să particularizăm în mod convenabil momentele $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$.

Să luăm $\alpha_0=1$, $\alpha_1=0$, $\alpha_2=4$, $\alpha_3=24$, $\alpha_4=200$, $\alpha_5=-408$. Atunci ecuaţia (53) se reduce la $(x^2+2x-8)(x^4-20x^3+174x^2-214x+1556)=0$ care are numai două rădăcini reale, pe 2 şi -4. Acestea sînt valorile nodului x_1 în cele două formule de tip Gauss corespunzătoare. Valorile nodului x_2 sînt -13, 5, iar valorile lui $R[x^6]$ sînt $-12920+\alpha_6$, $-10760+\alpha_6$, respectiv. Cele două formule de tip Gauss se pot scrie

10) Ar fi interesant de arătat că, în condiţiile problemei, această ecuaţie nu are decît două rădăcini reale.

$$A[f] \approx \frac{1}{3375}[(3367f(2) - 6630f'(2) + 12600f''(2) + 8f(-13)]$$

$$A[f] \approx \frac{1}{729}[593f(-4) + 1696f'(-4) + 1782f''(-4) + 136f(5)]$$

Prima formulă singură corespunde unui sistem minimizant.

29. Vom zice că funcţionala $A[f]$ este *simetrică de ordinul* k dacă prin o transformare liniară a variabilei x putem face ca momentele cu indici impari α_{2i-1}, $i = 1, 2, \ldots, k$ să devină nule. Astfel de funcţionale sînt, de ex., acelea de forma $\int_a^b \rho(x)f(x)dx$, unde a, b sînt finiţi iar funcţia $\rho(x)$ verifică proprietatea $\rho(x) = \rho(b + a - x)$. De asemenea funcţionalele de forma $\int_{-\infty}^{\infty} \rho(x)f(x)dx$, unde $\rho(x)$ este o funcţie pară.

Revenind la cazul $n = 2$, $r_1 = 3$, $r_2 = 1$ studiat mai sus, să presupunem că funcţionala $A[f]$ are un ordin de pozitivitate ≥ 3 şi $\alpha_5 = 0$ şi un ordin de simetrie ≥ 3. Putem să presupunem atunci $\alpha_1 = \alpha_3 = \alpha_5 = 0$ şi ecuaţia (53) devine

$$\alpha_0\alpha_2 x^6 + 3(\alpha_0\alpha_4 - 2\alpha_2^2)x^4 + 3\alpha_2\alpha_4 x^2 - \alpha_4^2 = 0 \tag{54}$$

In condiţiile în care sîntem ($\alpha_0 > 0$, $\alpha_2 > 0$, $\alpha_0\alpha_4 - \alpha_2^2 > 0$) se verifică imediat că această ecuaţie nu are decît două rădăcini reale inegale şi egale în valoare absolută [11]. Avem deci două formule de tip Gauss cu acelaşi $R[x^6]$.

In particular, pentru funcţionala $J^{(0,0)}[f]$, avem $\alpha_0 = 2$, $\alpha_2 = \frac{2}{3}$, $\alpha_4 = \frac{2}{5}$ şi rădăcinile ecuaţiei (54) sînt $\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}$. Făcînd calculele, obţinem formula de tip Gauss

$$J^{(0,0)}[f] = \frac{1}{128}\left[175f\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) - \frac{40}{\sqrt{5}}f'\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) + \frac{32}{3}f''\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) + 81f\left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)\right] +$$
$$+ \frac{128}{1575}D_6[f]$$

şi o a doua formulă de tip Gauss, cu acelaşi rest, care se deduce din aceasta înlocuind pe $\sqrt{5}$ cu $-\sqrt{5}$.

30. Vom considera şi cazul cînd $n = 3$, $r_1 = 3$, $r_2 = r_3 = 1$, presupunînd că $A[f]$ are un ordin de pozitivitate ≥ 4 şi un ordin de simetrie ≥ 4. Atunci putem presupune $\alpha_1 = \alpha_3 = \alpha_5 = \alpha_7 = 0$ şi nodul x_1 este o rădăcină a ecuaţiei

11) Pentru discuţie este destul să presupunem $\alpha_0 = \alpha_2 = 1$. Atunci dacă $\alpha_4 \geq 2$, proprietatea rezultă din regula semnelor lui Descartes iar dacă $1 < \alpha_4 < 2$ din faptul că derivata ecuaţiei în x^2 nu are rădăcinile reale.

$$\alpha_2(\alpha_0\alpha_4 - \alpha_2^2)x^9 + 3(\alpha_2^2\alpha_4 - 2\alpha_0\alpha_4^2 + \alpha_0\alpha_2\alpha_6)x^7 + 3(3\alpha_2\alpha_4^2 - 4\alpha_2^2\alpha_6 +$$
$$+ \alpha_0\alpha_4\alpha_6)x^5 + (11\alpha_2\alpha_4\alpha_6 - 10\alpha_4^3 - \alpha_0\alpha_6^2)x^3 + 3\alpha_6(\alpha_4^2 - \alpha_2\alpha_6)x = 0. \tag{55}$$

Deoarece $\alpha_2(\alpha_0\alpha_4 - \alpha_2^2) > 0$, $\alpha_6(\alpha_4^2 - \alpha_2\alpha_6) < 0$, această ecuaţie are cel puţin 3 rădăcini reale şi anume rădăcina 0 şi alte două diferite şi egale în valoare absolută [12]. Avem deci cel puţin trei formule de tip Gauss.

Celelalte două noduri sînt rădăcinile polinomului ortogonal de gradul 2 ataşat funcţionalei $C[f]$ corespunzătoare. Afară de un factor constant diferit de zero, acest polinom, pe baza formulei (49), se poate scrie sub forma

$$[(\alpha_0x_1^4 + 6\alpha_2x_1^2 + \alpha_4)x + 4(\alpha_2x_1^3 + \alpha_4x_1)][(\alpha_2x_1^4 + 6\alpha_4x_1^2 + \alpha_6)x + 4(\alpha_4x_1^3 +$$
$$+ \alpha_6x_1)] - [4(\alpha_2x_1^3 + \alpha_4x_1)x + \alpha_2x_1^4 + 6\alpha_4x_1^2 + \alpha_6]^2$$

Numărul $R[x^8]$ relativ la restul formulei este egal cu

$$\frac{\begin{vmatrix} \alpha_0x_1^4 + 6\alpha_2x_1^2 + \alpha_4 & 4\alpha_2x_1^3 + 4\alpha_4x_1 & \alpha_2x_1^4 + 6\alpha_4x_1^2 + \alpha_6 \\ 4\alpha_2x_1^3 + 4\alpha_4x_1 & \alpha_2x_1^4 + 6\alpha_4x_1^2 + \alpha_6 & 4\alpha_4x_1^3 + 4\alpha_6x_1 \\ \alpha_2x_1^4 + 6\alpha_4x_1^2 + \alpha_6 & 4\alpha_4x_1^3 + 4\alpha_6x_1 & \alpha_4x_1^4 + 6\alpha_6x_1^2 + \alpha_8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha_0x_1^4 + 6\alpha_2x_1^2 + \alpha_4 & 4\alpha_2x_1^3 + 4\alpha_4x_1 \\ 4\alpha_2x_1^3 + 4\alpha_4x_1 & \alpha_2x_1^4 + 6\alpha_4x_1^2 + \alpha_6 \end{vmatrix}}$$

Dacă nodul x_1 este egal cu 0, celelalte două noduri sînt

$\sqrt{\frac{\alpha_6}{\alpha_4}}, -\sqrt{\frac{\alpha_6}{\alpha_4}}$, iar $R[x^8] = \frac{\alpha_4\alpha_8 - \alpha_6^2}{\alpha_4}$ şi găsim formula de tip Gauss

$$A[f] \approx \frac{1}{2\alpha_6^2}\left[2(\alpha_0\alpha_6^2 - \alpha_4^3)f(0) + (\alpha_2\alpha_6 - \alpha_4^2)\alpha_6 f''(0) + \alpha_4^3\left[f\left(\sqrt{\frac{\alpha_6}{\alpha_4}}\right) + f\left(-\sqrt{\frac{\alpha_6}{\alpha_4}}\right)\right]\right]$$

In particular avem formulele

$$J^{(\alpha,\alpha)}[f] = \frac{2^{2\alpha+2}\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\alpha+3)}{25\Gamma(2\alpha+6)}\Big[8(\alpha+1)(2\alpha+5)f(0) + 20(\alpha+1)f''(0) +$$
$$+ 3(2\alpha+7)^2\left(f\left(\sqrt{\frac{5}{2\alpha+7}}\right) + f\left(-\sqrt{\frac{5}{2\alpha+7}}\right)\right)\Big] +$$
$$+ 15\frac{2^{2\alpha+7}\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\alpha+5)}{(2\alpha+7)\Gamma(2\alpha+10)}D_8[f] \quad (\alpha > -1)\ ^{13)}$$

$$J^{(0,0)}[f] = \frac{1}{375}\left[456f(0) + 20f''(0) + 147\left(f\left(\sqrt{\frac{5}{7}}\right) + f\left(-\sqrt{\frac{5}{7}}\right)\right)\right] +$$
$$+ \frac{8}{441}D_8[f]$$

12) Ar fi şi aici interesant de demonstrat că, în condiţiile problemei, ecuaţia (55) are numai trei rădăcini reale.

13) In această formulă $\Gamma(x)$ este funcţia euleriană de speţa a doua.

$$H[f] = \frac{\sqrt{\pi}}{50}\left[44f(0) + 5f''(0) + 3\left(f\left(\sqrt{\frac{5}{2}}\right) + f\left(-\sqrt{\frac{5}{2}}\right)\right)\right] + \frac{15\sqrt{\pi}}{8} D_8[f].$$

31. Pentru a arăta că nu toate cele trei formule corespund unui sistem minimizant în sensul de la §2, să considerăm cazul particular cînd $\alpha_0 = 1,\ \alpha_2 = 2,\ \alpha_4 = 8,\ \alpha_6 = \frac{288}{5}$. Ecuaţia (55) devine atunci

$$x(x^2 - 4)(25x^6 + 100x^4 + 400x^2 + 6912) = 0$$

care are rădăcinile reale 0,2 şi — 2. Acestea fiind valorile posibile ale nodului x_1, celelalte două noduri x_2, x_3 sînt respectiv rădăcinile ecuaţiilor $5x^2 - 36 = 0$, $5x^2 + 20x + 16 = 0$, şi $5x^2 - 20x + 16 = 0$. Valorile corespunzătoare ale lui $R[x^8]$ sînt $\alpha_8 - \frac{2^7.81}{5^2}$ pentru $x = 0$ şi $\alpha_8 - \frac{2^7.89}{5^2}$ pentru $x_1 = 2$ şi $x_1 = -2$.

Formulele de tip Gauss astfel obţinute sînt

$$A[f] \approx \frac{1}{324}\left[274f(0) + 144f''(0) + 25\left(f\left(\frac{6}{\sqrt{5}}\right) + f\left(-\frac{6}{\sqrt{5}}\right)\right)\right]$$

$$A[f] \approx \frac{1}{2.19^8}\Bigg[6443f(2) - 3686f'(2) + 1444f''(2) +$$

$$+ \frac{25}{2}(291 + 107\sqrt{5})f\left(\frac{-10 + 2\sqrt{5}}{5}\right) + \frac{25}{2}(291 - 107\sqrt{5})f\left(\frac{-10 - 2\sqrt{5}}{5}\right)\Bigg]$$

$$A[f] \approx \frac{1}{2.19^8}\Bigg[6443f(-2) + 3686f'(-2) + 1444f''(-2) +$$

$$+ \frac{25}{2}(291 - 107\sqrt{5})f\left(\frac{10 + 2\sqrt{5}}{5}\right) + \frac{25}{2}(291 + 107\sqrt{5})f\left(\frac{10 - 2\sqrt{5}}{5}\right)\Bigg]$$

32. Pentru cazul cînd toate ordinele de multiplicitate sînt egale între ele, avem următoarea proprietate datorită lui P. T u r á n [12].

Teorema 7. *Pentru orice funcţională liniară $A[f]$ care are ordinul de pozitivitate k, relativ la orice număr natural n şi la orice sistem de n ordine de multiplicitate, toate egale cu un acelaşi număr impar r astfel ca $k \geq \frac{1}{2} n(r+1)$, există o formulă (8) de tip Gauss şi una singură.*

Demonstraţia lui P. T u r á n constă în a observa că dacă, în acest caz, condiţia de ortogonalitate (10) este verificată, polinomul $\pi = (x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n)$ este minimizant. Într-adevăr, fie $Q \in P_n$ un polinom diferit de π. Avem atunci

$$Q^{r+1} - \pi^{r+1} = (r+1)(Q - \pi)\pi^r + \frac{r+1}{2}\left[(Q - \pi)\pi^{\frac{r-1}{2}}\right]^2 +$$

$$+ \sum_{\nu=1}^{\frac{r-1}{2}} \nu\left[(Q^2 - \pi^2)Q^{\frac{r-3}{2} - \nu + 1}\pi^{\nu - 1}\right]^2$$

şi ţinînd seamă de ortogonalitate, de faptul că $Q - \pi$ este un polinom de gradul $n - 1$, iar

$$(Q - \pi)^{\frac{r-1}{2}},\ (Q^2 - \pi^2)Q^{\frac{r-3}{2} - \nu + 1}\pi^{\nu - 1},\ \nu = 1, 2, \ldots, \frac{r-1}{2}$$

sînt polinoame de gradul $\frac{1}{2}n(r+1) - 1 \leq k - 1$, deducem

$$A[Q^{r+1}] - A[\pi^{r+1}] = \frac{r+1}{2} A\left[\left((Q - \pi)\pi^{\frac{r-1}{2}}\right)^2\right] +$$

$$+ \sum_{\nu=1}^{\frac{r-1}{2}} \nu A\left[\left((Q^2 - \pi^2)Q^{\frac{r-3}{2} - \nu + 1}\pi^{\nu - 1}\right)^2\right]$$

$$\geq \frac{r+1}{2} A\left[\left((Q - \pi)\pi^{\frac{r-1}{2}}\right)^2\right] > 0,$$

deci $A[Q^{r+1}] > A[\pi^{r+1}]$, ceea ce demonstrează teorema. Se vede că demonstraţia rămîne valabilă şi pentru $r = 1$.

BIBLIOGRAFIE

1. C a u c h y A., Sur les fonctions interpolaires. Comptes rendus Ac. Sci. Paris, 11, pp. 775-789, 1840.
2. J a c k s o n D., The theory of approximation, 1930.
3. Idem On the method of least m[th] powers for a set of simultaneous equations. Annals of Mathem., (2), 25, pp. 184-152, 1924.
4. M a r k o v A. A., Differenzenrechnung, 1896.
5. P o l y a G., Sur un algorithme toujours convergent pour obtenir les polynomes de meilleure approximation de Tchebycheff pour une fonction continue, quelconque. Comptes rendus Ac. Sci. Paris, 157, pp. 840-843, 1913.
6. P o p o v i c i u T., Discriminantul unei ecuaţii algebrice, Bul. Soc. Studenţilor în matematici, Bucureşti, 1926, pp. 35-38.
7. Idem Sur la distribution des zéros de certains polynomes minimisants. Bull. Acad. Roumaine, XVI, pp. 214-217, 1934.
8. Idem Asupra formei restului în unele formule de aproximaţie ale analizei, Lucrările ses. şt., Acad R.P.R., 1950, pp. 183-186.
9. Idem Asupra restului în unele formule de derivare numerică. Studii şi Cerc. Matem., III, pp. 53-122, 1952.
10. Idem Folytonos függvények középértékteleiről, A Magy. Tud. Akad. III oszt. Közleményeiből, IV, pp. 353-356, 1954.
11. S z e g o G., Orthogonal polynomials, 1939.
12. T u r á n P., On the theory of the mechanical quadrature, Acta Scient. Mathem., XII, pp. 30-37, 1950.
13. V a l l é e-P o u s s i n C., de la, Leçons sur l'approximation des fonctions d'une variable réelle, 1919.

„О НЕКОТОРОМ ОБОБЩЕНИИ ГАУССОВОЙ ФОРМУЛЫ ЧИСЛЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ“

Краткое содержание

В настоящей работе исследуются некоторые формулы приближенного вычисления вида (3) где: 1° A [f] является линейным функционалом (адитивным и однородным) определенным на некотором векторном множестве вещественных и непрерывных функции $f(x)$, вещественной переменной x, определенных в интервале I. Допускается что $f(x)$ имеет производные до некоторого порядка. по крайней мере в точках где это является необходимым и что, в частности, A[f] определен для всякого многочлена. 2° (2) являются n различными точками I, 3° значения (1) $f(x)$ и её первых производных в точках (2) являются заданными, 4° $a_{i,j}$ заданные числа. Формула (3) гауссового типа если она является точной т. е. имеет остаток равный нулю, для всякого многочлена степени $p+n$, где $p=r_1+r_2+\dots r_n-1$, а r_i кратности узлов (2). Всякая гауссовая формула есть необходимо вида (8) происходящего от замены $f(x)$ соответствующим многочленом Лагранж-Гермита, имеющим узлы (2) с их соответствующими кратностями.

Необходимое и достаточное условие для того чтобы формула (8) была гауссового типа выражается условием (10) ортогональности многочлена (7) со всяким многочленом Q степени $n-1$.

В § 3 доказывается что для всякого функционала A[f] порядка положительности k и для заданных кратностей $r_1, r_2, \dots, r_n$, и всех нечетных, имеется по крайней мере одна формула (8) гауссого типа, если $k \geqq \frac{1}{2}(p+n+1)$. Функционал A[$f$] имеет порядок положительности k, если он является >0 для квадрата любого многочлена степени $k-1$ нетождественного нулю. В частности, некоторый положительный функционал, на пример, классические функционалы (32), (33), (34), являются порядка положительности k, для каждого значения k. Этот результат получается посредством приведения задачи к исследованию формул гауссового типа для линейного функционала вида (16), где точки y_i являются различными все коэффициенты λ_i положительны. Для функционала вида (16) свойство вытекает из известной задачи теории ортогональных многочленов. В § 2 исследуется этот вопрос в несколько более общей форме. Указывается что достигается нижняя граница выражения $A\left[\prod_{i=1}^{t} |\pi_i|^{s_i}\right]$ где s_i заданные положительные числа, и где Π_i пробегает можество многочленов заданной степени n_i вида $x^{n_i}+\dots$.

В § 4 даются некоторые указания по поводу определения формул гауссового типа. Указывается на примерах что для заданных кратностей может существовать много формул гауссового типа и что такие формулы не всегда соответствуют решению некоторой минимальной задаче которой мы пользовались для установления существования такой формулы. Этот результат дополняет свойство установленное П. Тураном [12], по которому, в частном случае когда все кратности равны, формула гауссового типа является единственной.

SUR UNE GENERALISATION DE LA FORMULE D'INTEGRATION NUMERIQUE DU TYPE GAUSS

Résumé

Dans ce travail on examine quelques formules d'approximation de la forme (3) où: 1° A[f] est une fonctionnelle linéaire (additive et homogène), définie sur un ensemble vectoriel de fonctions réelles et continues $f(x)$, de la variable réelle x, définies sur un intervalle I; On suppose que $f(x)$ a des dérivées jusqu'à un certain ordre, tout au moins sur les points où ces dérivées interviennent effectivement et que, en particulier, A[f] est défini sur tout polynome; 2° (2) sont n points *distincts* de I; 3° les valeurs (1) de $f(x)$ et de ses dérivées succesives sur les points (2) sont données; 4° les $a_{i,j}$ sont des constantes données. La formule (3) est *du type Gauss* si elle est exacte, donc a un reste identiquement nul, sur tout polynome du degré $p+n$, où $p = r_1 + r_2 + \dots + r_n - 1$, les r_i étant les *ordres de multiplicité* des *noeuds* (2). Toute formule du type Gauss est nécessairement de la forme (8) qui s'obtient en remplaçant $f(x)$ par le polynome de Lagrange-Hermite correspondant, ayant les noeuds (2) avec leurs ordres de multiplicité respectifs.

La condition nécessaire et suffisante pour que la formule (8) soit du type Gauss est que la condition d'orthogonalité (10) du polynome (7) avec tout polynome Q du degré $n-1$ soit vérifiée.

Au § 3 on démontre que relativement á toute fonctionnelle linéaire A[f] de *l'ordre de positivité* k et pour tout système d'ordres de multiplicité $r_1, r_2, \dots, r_n$ données et formés seulement par des nombres impaires, il existe au moins une formule du type Gauss si $k \geq \frac{1}{2}(p+n+1)$. La fonctionnelle a l'ordre de positivité k si elle est >0 pour le carré d'un polynome quelconque, non identiquement nul, et du degré $k-1$. En particulier une fonctionnelle *positive*, par ex., les fonctionnelles classiques (32), (33), (34), a un ordre de positivité k pour tout k. Ce résultat s'obtient en réduisant le problème à la recherche des formules du type Gauss, pour une fonctionnelle linéaire de la forme (16), où les points y_i sont distincts et les coefficients λ_i tous positifs. Pour une fonctionnelle de la forme (16), la propriété résulte de la généralisation d'un problème de minimum bien connu de la théorie des polynomes orthogonaux.

Dans le § 2 on examine ce problème sous une forme un peu plus générale. On démontre que la borne inférieure de l'expression $A\left[\prod_{i=1}^{t} |\pi_i|^{s_i}\right]$ où s_i sont des nombres positifs donnés et π_i parcourt l'ensemble des polynomes du degré donné n_i, et de la forme $x^{n_i} + \dots$, est atteinte.

Dans le § 4 on donne des indications sur la détermination effective des formules du type Gauss. Les exemples donnés montrent que pour un système d'ordres de multiplicité donnés ils peuvent exister plusieurs formules du type Gauss et qu'une formule du type Gauss ne correspond pas nécessairement à une solution du problème de minimum qui a servi à la démonstration de l'existence d'une telle formule. Ce résultat complète ce de P. Turan, qui a démontré [12] que si tous les ordres de multiplicité sont égaux, la formule du type Gauss est unique.