REVISTA DE ANALIZĂ NUMERICĂ ŞI TEORIA APROXIMAŢIEI
Volumul 2, Fascicola 1, 1973, pp. 81–87

ASUPRA UNOR SUBSPAŢII CEBIŞEVIENE DIN SPAŢIUL NORMAT AL FUNCŢIILOR LIPSCHITZIENE

de

COSTICĂ MUSTĂŢA
(Cluj)

1. În această lucrare se arată că singurul subspaţiu cebîşevian de forma $Y^{\perp}$ al spaţiului normat $X_0^{\#}$ al funcţiilor lipschitziene cu valori reale, definite pe un spaţiu metric X este subspaţiul $\{\Phi\}$[1], dacă submulţimea nevidă $Y \subseteq X$ satisface anumite condiţii.

Fie X un spaţiu metric care are cel puţin două puncte distincte şi d metrica lui. Pe X definim următoarele mulţimi de funcţii:

$$X^{\#} = \left\{f : X \to R,\ \sup_{\substack{x \neq y \\ x, y \in X}} \frac{|f(x) - f(y)|}{d(x, y)} < \infty\right\} \tag{1}$$

şi

$$X_0^{\#} = \{f \in X^{\#},\ f(o) = 0\}, \tag{2}$$

unde „o" este un anumit element fixat din X.

Mulţimea $X^{\#}$ se poate înzestra cu o structură de spaţiu liniar real, definind suma a două funcţii din $X^{\#}$ şi înmulţirea unei funcţii din $X^{\#}$ cu un scalar real în mod obişnuit. Evident, $X_0^{\#}$ este un subspaţiu liniar al lui $X^{\#}$.

---

[1]) Aici $\{\Phi\}$ este subspaţiul format din funcţia identic nulă pe X,

Dacă $Y \subseteq X$ este nevidă, atunci pentru orice $f \in X^{\#}$ notăm

(3) $$K_Y(f) = \sup_{\substack{x \neq y \\ x, y \in Y}} \frac{|f(x) - f(y)|}{d(x, y)}.$$

Dacă Y este format dintr-un singur punct, punem $K_Y(f) = 0$. În particular, dacă $Y = X$, funcţionala K_X este o normă pe $X_0^{\#}$, de aceea, pentru orice $f \in X_0^{\#}$ notăm

(4) $$K_Y(f) = \|f\|_X.$$

Spaţiul liniar real $X_0^{\#}$, înzestrat cu norma dată de egalitatea (3) îl numim spaţiul normat al funcţiilor lipschitziene care se aulează în $o \in X$.

2. Are loc

TEOREMA 1. *Fie Y o submulţime nevidă a lui X. Atunci există pentru orice $f \in X^{\#}$ o funcţie $F \in X^{\#}$ astfel încît:*

a) $F|_Y = f|_Y$

b) $K_X(F) = K_Y(f)$.

Demonstraţia acestei teoreme se găseşte în lucrarea [1].

Dacă $f \in X_0^{\#}$, în general nu rezultă că funcţia F cu proprietăţile a) şi b) din TEOREMA 1 este tot din $X_0^{\#}$. Următorul exemplu dovedeşte acest fapt:

Fie $X = R$. Definim funcţia:

$$f(x) = \begin{cases} |x| & \text{dacă} \quad -1 \leq x \leq +1 \\ 1 & \text{dacă} \quad x \in R - [-1, +1] \end{cases}$$

Această funcţie este lipschitziană; ea aparţine lui $R_0^{\#}$, unde „o" este originea axei reale R şi $\|f\|_X = 1$. Dacă considerăm submulţimea $Y = [2, 3]$, atunci $\|f\|_Y = K_Y(f) = 0$, deci $F(x) = 1$ pentru orice $x \in R$, de unde rezultă că $F \notin X_0^{\#}$.

O consecinţă imediată a Teoremei 1 este

TEOREMA 2. *Fie $Y \subseteq X$ care conţine $o \in X$. Atunci pentru orice $f \in X_0^{\#}$ există o funcţie $F \in X_0^{\#}$ astfel încît:*

a) $F|_Y = f|_Y$

b) $\|F\|_X = \|f\|_Y$

Funcţia F din teoremele 1 şi 2 se numeşte o prelungire a funcţiei f de pe submulţimea nevidă Y pe întreg spaţiul metric X.

3. Problema de care ne vom ocupa în continuare este problema unicităţii prelungirii în cazul TEOREMEI 2. Problema unicităţii unor prelungiri de funcţii a fost tratată şi în alte lucrări. Astfel în lucrările [2] şi [3] se studiază unicitatea prelungirii în cazul Teoremei lui HAHN-BANACH.

Fie $Y \subseteq X$. Notăm

(5) $$Y^{\perp} = \{f \in X_0^{\#},\ f|_Y = 0\}.$$

Evident, $Y^{\perp}$ este un subspaţiu liniar al lui $X_0^{\#}$.

De asemeni notăm

(6) $$\inf_{g \in Y^{\perp}} \|f - g\|_X = d(f, Y^{\perp})$$

pentru orice $f \in X_0^{\#}$ şi

(7) $$\inf_{y \in Y} d(x, y) = d(x, Y)$$

pentru orice $x \in X$.

LEMA 1. *Fie $Y \subseteq X$ cu $o \in Y$. Atunci are loc pentru orice $f \in X_0^{\#}$, următoarea egalitate*

(8) $$\|f\|_Y = d(f, Y^{\perp}).$$

Demonstraţie. Fie $f \in X_0^{\#}$. Pentru orice $g \in Y^{\perp}$ avem

$$\|f\|_Y = \sup_{\substack{x \neq y \\ x, y \in Y}} \frac{|f(x) - f(y)|}{d(x, y)} = \sup_{\substack{x \neq y \\ x, y \in Y}} \frac{|(f-g)(x) - (f-g)(y)|}{d(x, y)} \leq$$

$$\leq \sup_{\substack{x \neq y \\ x, y \in X}} \frac{|(f-g)(x) - (f-g)(y)|}{d(x, y)} = \|f - g\|_X.$$

De aici deducem

(9) $$\|f\|_Y \leq d(f, Y^{\perp}).$$

Pe de altă parte, pentru f există, în baza TEOREMEI 2, o funcţie $F \in X_0^{\#}$ astfel ca $F|_Y = f|_Y$ şi $\|F\|_X = \|f\|_Y$, deci $f - F \in Y^{\perp}$. Atunci $\|f\|_Y = \|f - (f - F)\|_X \geq \inf_{g \in Y^{\perp}} \|f - g\|_X = d(f, Y^{\perp})$.

De aici deducem

$$\|f\|_Y \geqslant d(f, Y^{\perp}) \tag{10}$$

Din (9) și (10) rezultă (8).

D e f i n i ț i a 1. *Un subspațiu liniar G al lui $X_0^{\#}$ se numește cebîșevian, dacă pentru orice $f \in X_0^{\#} \setminus G$ există un singur element $g_0 \in G$ astfel încît* $\inf_{g \in G} \|f - g\|_X = \|f - g_0\|_X$.

LEMA 2. *Fie $Y \subseteq X$ cu $o \in Y$. Atunci următoarele afirmații sînt echivalente:*

1° *$Y^{\perp}$ este cebîșevian*

2° *Oricare ar fi $f \in X_0^{\#}$, există un singur $F \in X_0^{\#}$ cu $F|_Y = f|_Y$ și* $\|F\|_X = \|f\|_Y$.

Demonstrație. Demonstrația este analogă cu cea a TEOREMEI 1.1 din lucrarea [3].

1°$\Rightarrow$2°. Să presupunem că 2° nu are loc, adică există $f \in X_0^{\#}$ și F_1, F_2 din $X_0^{\#}$, $F_1 \neq F_2$ cu $f|_Y = F_1|_Y = F_2|_Y$ și $\|f\|_Y = \|F_1\|_X = \|F_2\|_X$. Atunci $F_1 - F_2 \in Y^{\perp}$ și $\|F_1\|_X = \|F_1 - (F_1 - F_2)\|_X = d(F_1, Y^{\perp}) = \|F_1\|_Y = \|f\|_Y = \|F_1\|_X$. De aici deducem că

$$\|F_1\|_X = \|F_1 - (F_1 - F_2)\|_X = d(F_1, Y^{\perp}),$$

adică F_1 are două cele mai bune aproximante, pe Φ și $F_1 - F_2$, ceea ce contrazice faptul că $Y^{\perp}$ este cebîșevian.

2°$\Rightarrow$1°. Mai întîi observăm că $Y^{\perp}$ este proximinal, adică pentru orice $f \in X_0^{\#}$ există cel puțin un $g \in Y^{\perp}$ astfel încît infimumul din formula (6) să fie atins.

Într-adevăr, conform TEOREMEI 2 și LEMEI 1, pentru orice $f \in X_0^{\#}$. există $F \in X$ astfel ca

$$\|f - (f - F)\|_X = \|f\|_Y = d(f, Y^{\perp}).$$

Să presupunem acum că $Y^{\perp}$ nu este cebîșevian. Atunci există $f \in X_0^{\#}$ și există $g_1, g_2 \in Y^{\perp}$, $g_1 \neq g_2$ astfel încît să avem $\|f - g_1\|_X = \|f - g_2\|_X = d(f, Y^{\perp})$. Ținînd seama de LEMA 1 și de faptul că $(f - g_1)|_Y = (f - g_2)|_Y = f|_Y$ rezultă atunci că prelungirea lui f nu este unică.

4. COROLARUL 1. *Fie $Y \subset X$ cu $o \in Y$. Dacă $Y^{\perp}$ este cebîșevian atunci pentru orice $f \in X_0^{\#}$ are loc egalitatea*

$$\sup_{y \in Y} [f(y) - \|f\|_Y \cdot d(x, y)] = \inf_{y \in Y} [f(y) + \|f\|_Y \cdot d(x, y)], \tag{11}$$

oricare ar fi $x \in X$.

Demonstrație. În lucrarea [1] se arată că, fiind dată o funcție $f \in X^{\#}$, funcțiile

$$F_1(x) = \inf_{y \in Y} [f(y) + K_Y(f) d(x, y)],$$

$$F_2(x) = \sup_{y \in Y} [f(y) - K_Y(f) d(x, y)]$$

sînt prelungiri ale lui f. În particular, dacă $f \in X_0^{\#}$, atunci aceste două prelungiri se scriu

$$\begin{aligned} F_1(x) &= \inf_{y \in Y} [f(y) + \|f\|_Y \cdot d(x, y)] \\ F_2(x) &= \sup_{y \in Y} [f(y) - \|f\|_Y \cdot d(x, y)]. \end{aligned} \tag{12}$$

În baza LEMEI 2 are loc relația (11).

COROLARUL 2. *Fie $Y \subseteq X$ cu $o \in Y$. Dacă $Y^{\perp}$ este cebîșevian, atunci oricare ar fi $f \in X_0^{\#}$, $f \neq \Phi$ și oricare ar fi $x \in X$ are loc inegalitatea*

$$d(x, Y) \leqq \frac{\sup_{y \in Y} f(y) - \inf_{y \in Y} f(y)}{2 \|f\|_Y}. \tag{13}$$

Demonstrație. Avem

$$\sup_{y \in Y} [f(y) - \|f\|_Y d(x, y)] \leqq \sup_{y \in Y} f(y) - \|f\|_Y \inf_{y \in Y} d(x, y)$$

și

$$\inf_{y \in Y} [f(y) + \|f\|_Y d(x, y)] \geqq \inf_{y \in Y} f(y) + \|f\|_Y \inf_{y \in Y} d(x, y).$$

Avînd în vedere egalitățile (7) și (11) rezultă (13).

5. D e f i n i ț i a 2. *Spunem că o submulțime $Y \subseteq X$ are* PROPRIETATEA *C dacă ea are cel puțin un punct de acumulare și conține pe $o \in X$.*

COROLARUL 3. *Dacă $Y \subseteq X$ are* PROPRIETATEA *C și $Y^{\perp}$ este cebîșevian, atunci $\bar{Y} = X$.*

Demonstrație. Fie $x_0 \in X$ un punct de acumulare al lui Y. Atunci există un șir (x_n) de puncte din Y, convergent către x_0 și cu $x_n \neq x_0$ pentru orice $n \in N$. Definim funcția $f: X \to R$ prin

$$f(x) = d(x, x_0) - d(o, x_0).$$

Această funcţie este lipschitziană şi aparţine lui $X_0^{\#}$. Cînd n tinde la infinit avem

$$f(x_n) = d(x_n, x_0) - d(o, x_0) \to -d(o, x_0) = f(x_0).$$

Putem presupune de la început că pentru toţi $n \in N$ avem $f(x_n) < 0$; în caz contrar găsim $n_0 \in N$ astfel ca pentru toţi $n > n_0$ să avem $f(x_n) < 0$.

Fie $\varphi_n : R \to [0, 1]$ dată de

$$\varphi_n(t) = \begin{cases} 1 & t < f(x_0) \\ \dfrac{f(x_n) - t}{f(x_n) - f(x_0)} & t \in [f(x_0), f(x_n)] \\ 0 & t > f(x_n) \end{cases} \tag{14}$$

Pentru fiecare $n \in N$, funcţia φ_n este lipschitziană pe X şi $\varphi_n(o) = 0$ deci $\varphi_n \in X_0^{\#}$. Avem

$$\|\varphi_n\|_Y \geq \frac{|\varphi_n(f(x_n)) - (\varphi_n(f(x_0))|}{d(x_n, x_0)} = \frac{1}{d(x_n, x_0)} \tag{15}$$

Pe de altă parte, conform COROLARULUI 2 are loc inegalitatea

$$d(x, Y) \leq \frac{\sup\limits_{y\in Y} \varphi_n(y) - \inf\limits_{y\in Y} \varphi_n(y)}{2\, \|\varphi_n\|_Y} = \frac{1}{2\, \|\varphi_n\|_Y}$$

pentru orice $n \in N$. În baza relaţiei (15) rezultă că

$$d(x, Y) \leq \frac{d(x_n, x_0)}{2}$$

pentru orice $n \in N$ şi pentru orice $x \in X$. Trecînd la limită găsim $d(x, Y) = 0$ pentru orice $x \in X$. Deci $X \subseteq \overline{Y}$. Deoarece $\overline{Y} \subseteq X$ rezultă că $\overline{Y} = X$.

TEOREMA 3. *Fie $Y \subseteq X$ cu $o \in Y$. Pentru ca pentru orice $f \in X_0^{\#}$ să existe o singură prelungire $F \in X_0^{\#}$ cu proprietăţile a) şi b) din* TEOREMA 2 *este suficient, iar dacă Y are* PROPRIETATEA *C şi necesar ca $Y^{\perp} = \{\Phi\}$, sau, echivalent $\overline{Y} = X$.*

Demonstraţie. Necesitate. Să presupunem că prelungirea oricărui $f \in X_0^{\#}$ în sensul TEOREMEI 2 este unică. Atunci, conform LEMEI 2, $Y^{\perp}$ este cebîşevian. Dacă Y are PROPRIETATEA C, conform COROLARUL 3 avem $\overline{Y} = X$ sau, echivalent $Y^{\perp} = \{\Phi\}$.

Suficienţa. Să presupunem că $\overline{Y} = X$. Fie $f \in X_0^{\#}$. Funcţia f fiind lipschitziană, ea este uniform continuă şi o putem prelungi în mod unic de pe Y pe $\overline{Y}$ prin uniform continuitate. Fie F această prelungire a lui f pe $\overline{Y} = X$. Este un fapt banal că $\|F\|_X = \|f\|_Y$.

TEOREMA 4. *Fie $Y \subseteq X$ cu $o \in Y$. Dacă pentru orice $f \in X_0^{\#}$ există unic $F \in X_0^{\#}$ astfel ca $F|_Y = f|_Y$ şi $\|F\|_X = \|f\|_Y$, atunci pentru orice $h \in X^{\#}$ există unic $H \in X^{\#}$ astfel ca $H|_Y = h|_Y$ şi $K_X(H) = K_Y(h)$.*

Demonstraţie. Să presupunem că există $h \in X^{\#}$ astfel încît H_1 şi H_2, $H_1 \neq H_2$ din $X^{\#}$ să fie prelungiri ale lui h în sensul TEOREMEI 1. Atunci funcţiile $H_1 - h(o)$ şi $H_2 - h(o)$ sînt prelungiri ale lui $h - h(o) \in X_0^{\#}$. Cum prelungirea lui $h - h(o)$ este unică, rezultă că $H_1 - h(o) = H_2 - h(o)$ pe X, adică $H_1 = H_2$ pe X.

În consecinţă rezultă că afirmaţiile TEOREMEI 3 rămîn valabile şi pentru funcţiile din $X^{\#}$, cînd prelungirea unui $f \in X^{\#}$ se face de pe $Y \ni o$ pe X.

ON THE CHEBYSHEV SUBSPACES OF THE SPACES OF REAL-VALUED LIPSCHITZ FUNCTIONS

SUMMARY

In this paper is shown that the subspace $\{\Phi\}$ (Φ is the zero function on X) is the only Chebyshev subspace of the form $Y^{\perp}$ of the space $X_0^{\#}$ of the real-valued Lipschitz functions defined on the metric space X, if the subset $Y \subset X$ has a cluster point.

BIBLIOGRAFIE

[1] Czipser J. şi Gehér L., *Extension of functions satisfiyng a Lipschitz condition*, Acta Math. Acad. Sci. Hungar **6**, 213–220 (1955).
[2] Kolumban I. *Ob edinstvenosti prodoljenia lineinîh funcţionalov*, Mathematica, Cluj, **4** (27), 267–270 (1962).
[3] Phelps R. P., *Uniqueness of Hanh-Banach extension and unique best approximation*, Trans. Amer. Math. Soc. **95**, 238–255, (1960).

Primit la 27. X. 1972.

Institutul de Calcul din Cluj al Academiei Republicii Socialiste România