REVISTA DE ANALIZĂ NUMERICĂ ȘI TEORIA APROXIMAȚIEI
Volumul 2, Fascicola 2, 1973, pp. 173—177

ASUPRA UNICITĂȚII PRELUNGIRII p-SEMINORMELOR CONTINUE

de

COSTICĂ MUSTĂȚA
(Cluj)

1. Fie X un spațiu liniar real și $p \in (0, 1]$. O funcțională $|||\ |||: X \to R$ se numește o p-normă pe X dacă ea verifică axiomele:

p_1) $|||x||| \geqq 0,\ |||x||| = 0 \Leftrightarrow x = \theta, \quad x \in X$

p_2) $|||x + y|||^p \leqq |||x|||^p + |||y|||^p, \quad x, y \in X$

p_3) $|||\lambda x||| = |\lambda| \cdot |||x|||, \quad x \in X,\ \lambda \in R$

Spațiul liniar real X, înzestrat cu p-norma $|||\ |||$ îl numim spațiu p-normat și îl notăm $(X, |||\ |||)$.

În lucrarea [4], W. RUESS definește conul convex al p-seminormelor continue definite pe spațiul p-normat $(X, |||\ |||)$:

$$C_X^{p\tau} = \{h | h: X \to R^{+,*)}\ \forall x, y \in X,\ \forall \lambda \in R,\ h(x + y) \leqq h(x) + h(y) \ \text{ și } \ h(\lambda x) = |\lambda|^p h(x)\} \tag{1}$$

și spațiul generat de $C_X^{p\tau}$, anume

$$X_\tau^p = C_X^{p\tau} - C_X^{p\tau}. \tag{2}$$

Vom nota cu $X^\#$ spațiul liniar real al funcționalelor lipschitziene definite pe spațiul p-normat $(X, |||\ |||)$ (vezi [2]):

$$\forall f \in X^\#,\ \exists M \geqq 0,\ \forall x, y \in X,\ |f(x) - f(y)| \leqq M \cdot |||x - y||| \tag{3}$$

---

* R+ reprezintă mulțimea numerelor reale nenegative.

Cu Φ vom nota funcționala nulă pe $(X, |||\ |||)$.

$C_X^{p_\tau}$ este un con convex din spațiul liniar $X^{\#}$. Într-adevăr dacă $h \in C_X^{p_\tau}$ atunci pentru orice $x_1, x_2 \in X$ avem $|h(x_1) - h(x_2)| \leqq h(x_1 - x_2)$ de unde, pentru $x_1 \neq x_2$

$$\frac{|h(x_1) - h(x_2)|}{|||x_1 - x_2|||} \leqq \frac{h(x_1 - x_2)}{|||x_1 - x_2|||} \leqq \sup_{\substack{x \neq y \\ x, y \in X}} \frac{h(x - y)}{|||x - y|||}. \tag{4}$$

Pe de altă parte $h \in C_X^{p_\tau}$ dacă și numai dacă $\sup\limits_{x \in X - \{0\}} \frac{h(x)}{|||x|||} < \infty$ (vezi [4] pag. 16, Obs. 2.6) și avînd în vedere (4) rezultă că $h \in X^{\#}$.

Evident X_τ^p este un subspațiu liniar al lui $X^{\#}$.

Pe X_τ^p se definesc următoarele norme (vezi Definiția 2.7 și Lema 2.8 din [4]):

$$\|\ \|_X^1 : X_\tau^p \to R^+ \tag{5}$$

$$\forall f \in X_\tau^p, \ \|f\|_X^1 = \sup_{|||x||| \leqslant 1} |f(x)|,$$

$$\|\ \|_X : X_\tau^p \to R^+ \tag{6}$$

$$\forall f \in X_\tau^p, \ \|f\|_X = q_{(B_1(0,1) \cap C_X^{p_\tau} - B_1(0,1) \cap C_X^{p_\tau})}(f)$$

unde q este funcționala lui Minkowski atașată mulțimii $B_1(0, 1) \cap C_X^{p_\tau} - B_1(0, 1) \cap C_X^{p_\tau}$ iar $B_1(0, 1) = \{f \in X_\tau^p, \|f\|_X^1 \leqq 1\}$.

Conform Lemei 2.8 din [4], $(X_\tau^p, \|\ \|_X)$ este un spațiu Banach și pentru orice $f \in X_\tau^p$, $\|f\|_X^1 \leqq \|f\|_X$. Dacă h este chiar din $C_X^{p_\tau}$ atunci $\|h\|_X = \|h\|_X^1$.

Fie Y un subspațiu liniar al lui $(X, |||\ |||)$. Pentru $h \in C_X^{p_\tau}$ vom nota cu $h|_Y$ restricția lui h pe subspațiul Y.

TEOREMA 1. *(Teorema 2.9 din [4]). Fie Y un subspațiu liniar al lui $(X, |||\ |||)$ și $h \in C_X^{p_\tau}$. Atunci funcționala*

$$H : X \to R^+ \tag{7}$$

$$\forall x \in X \quad H(x) = \inf_{y \in Y} \{h|_Y(y) + \|h|_Y\|_Y \cdot |||x - y|||\}$$

verifică proprietățile:

$$H \in C_X^{p_\tau}; \ H|_Y = h|_Y; \ \|H\|_X = \|h|_Y\|_Y. \tag{8}$$

Funcționala H din TEOREMA 1 se numește o prelungire a restricției lui $h \in C_X^{p_\tau}$ pe Y, de pe Y pe X cu păstrarea normei de pe Y.

2. În general, prelungirea H, cu proprietățile (8) nu este unică. În cele ce urmează vom găsi o condiție necesară și suficientă pentru unicitatea unei astfel de prelungiri. Pentru alte tipuri de funcționale, condiții pentru unicitatea prelungirii se pot găsi în lucrările [1], [2], [3].

Definiția 1. *Fie $(X, \|\ \|)$ un spațiu liniar normat, V o submulțime a sa nevidă și Y un subspațiu liniar al lui X. Vom zice că subspațiul Y este V-cebîșevian dacă dîndu-se $v \in V$ există un singur element $y_0 \in Y$ astfel ca*

$$\|v - y_0\| = \inf_{y \in Y} \|v - y\| = d(v, Y). \tag{9}$$

Fie Y un subspațiu liniar al lui $(X, |||\ |||)$. Vom nota

$$Y^{\perp}_{X_\tau^p} = \{f \in X_\tau^p, \ f(y) = 0 \text{ pentru toți } y \in Y\}. \tag{10}$$

Evident $Y^{\perp}_{X_\tau^p}$ este un subspațiu al lui X_τ^p.

Lema 1. *Fie Y un subspațiu liniar al lui $(X, |||\ |||)$ și $h \in C_X^{p_\tau}$. Atunci are loc următoarea egalitate:*

$$\|h|_Y\|_Y = d(h, Y^{\perp}_{X_\tau^p}). \tag{11}$$

Demonstrație. Conform TEOREMEI 1, dacă $h \in C_X^{p_\tau}$, pentru $h|_Y$ există $H \in C_X^{p_\tau}$ cu proprietățile (8). Conform Lemei 2.8 (d) din [4] avem:

$$\|h|_Y\|_Y = \|h|_Y\|_Y^1 = \sup_{\substack{|||y||| \leqslant 1 \\ y \in Y}} h(y) = \sup_{\substack{|||y||| \leqslant 1 \\ y \in Y}} |h(y)| =$$

$$= \sup_{\substack{|||y||| \leqslant 1 \\ y \in Y \\ g \in Y^{\perp}_{X_\tau^p}}} |(h - g)(y)| \leqq \sup_{\substack{|||x||| \leqslant 1 \\ x \in X \\ g \in Y^{\perp}_{X_\tau^p}}} |(h - g)(x)| =$$

$$= \|h - g\|_X^1 \leqq \|h - g\|_X.$$

De aici rezultă că

$$\|h|_Y\|_Y \leqq \inf_{g \in Y^{\perp}_{X_\tau^p}} \|h - g\|_X = d(h, Y^{\perp}_{X_\tau^p}).$$

Invers, conform TEOREMEI 1 avem:

$$\|h|_Y\|_Y = \|H\|_X = \|h - (h - H)\|_X \geqq d\left(h, Y^{\perp}_{X^p_\tau}\right).$$

Deci

$$\|h|_Y\|_Y = d\left(h, Y^{\perp}_{X^p_\tau}\right).$$

TEOREMA 2. *Fie Y un subspaţiu liniar al lui $(X, |||\ |||)$ şi $h \in C^{p_\tau}_X$. Următoarele două afirmaţii sînt echivalente:*

a) *Oricare ar fi $h \in C^{p_\tau}_X$, $h|_Y$ are o prelungire H, care verifică proprietăţile* (8) *unică.*

b) *$Y^{\perp}_{X^p_\tau}$ este $C^{p_\tau}_X$ — cebîşevian.*

Demonstraţie. a) $\Rightarrow$ b). Mai întîi observăm că pentru orice $h \in C^{p_\tau}_X$ există un element $g_0 \in Y^{\perp}_{X^p_\tau}$ astfel ca $\|h - g_0\|_X = d\left(h, Y^{\perp}_{X^p_\tau}\right)$. Într-adevăr, conform TEOREMEI 1 şi LEMEI 1, $h|_Y$ are o prelungire $H \in C^{p_\tau}_X$ astfel ca

$$\|h|_Y\|_Y = d\left(h, Y^{\perp}_{X^p_\tau}\right) = \|h - (h - H)\|_X.$$

Deci $g_0 = h - H$.

Să presupunem acum că $Y^{\perp}_{X^p_\tau}$ nu este C^p_X — cevîşevian; atunci există $h \in C^{p_\tau}_X$ şi există g_1, g_2 din $Y^{\perp}_{X^p_\tau}$, $g_1 \neq g_2$ astfel ca

$$\|h - g_1\|_X = \|h - g_2\|_X = d\left(h, Y^{\perp}_{X^p_\tau}\right) = \|h|_Y\|_Y. \tag{12}$$

Dar atunci, avînd în vedere şi egalităţile (12) rezultă că $h - g_1$ şi $h - g_2$ sînt două prelungiri diferite ale lui $h|_Y$.

b) $\Rightarrow$ a). Să presupunem că există $h \in C^{p_\tau}_X$ astfel ca $h|_Y$ să aibă prelungirile $H_1, H_2 \in C^{p_\tau}_X$, $H_1 \neq H_2$ cu proprietăţile (8). Atunci din LEMA 1 rezultă că:

$$\|H_1\|_X = \|H_1 - (H_1 - H_2)\|_X = \|h|_Y\|_Y = \|H_1|_Y\|_Y = d\left(H_1, Y^{\perp}_{X^p_\tau}\right).$$

Dar aceasta înseamnă că pentru H_1 există două elemente din $Y^{\perp}_{X^p_\tau}$ pentru care are loc (9) şi anume Φ şi $H_1 - H_2 \neq \Phi$, deci $Y^{\perp}_{X^p_\tau}$ nu este $C^{p_\tau}_X$-cebîşevian.

SUR L'UNICITÉ DU PROLONGEMENT DES p-SÉMINORMES CONTINUES

RÉSUMÉ

Soit $(X, |||\ |||)$ un espace p-normé réel ($p \in (0, 1]$), Y un sousespace de $(X, |||\ |||)$ et soit $C^{p_\tau}_X$ le cône des p-séminormes continues sur $(X, |||\ |||)$. Soit $h \in C^{p_\tau}_X$ et H un prolongement de $h|_Y$ de Y sur X qui conserve la norme de Y. On montre que H est un prolongement unique si et seulement si $Y^{\perp}_{C^{p_\tau}_X - C^{p_\tau}_X}$ est un sousespace de Tchébycheff pour les éléments de $C^{p_\tau}_X$.

BIBLIOGRAFIE

[1] Kolumban I., *Ob edinstvenosti prodoljenia lineinîh functionalov*, Mathematica, vol. 4 (24), 2, (1962), 267—270.

[2] Mustăţa C., *Asupra unor subspaţii cebîşeviene din spaţiul normat al funcţiilor lipschitziene*, „Revista de analiză numerică şi teoria aproximaţiei", vol. 2, fasc. 1, (1973), 81-87.

[3] Phelps R. R., *Uniqueness of Hahn-Banach extension and unique best approximation*, Trans. Amer. Math. Soc., **95**, (1960), 238—255.

[4] Ruess W., *Ein Dualkegel für p-konvexe topologische lineare Räume*, Gesellschaft für Mathematik und Datenverarbeitung, Bonn, Nr. 60, (1973).

Institutul de calcul din Cluj
al Academiei Republicii Socialiste
România

Primit la 28. V. 1973.