REVISTA DE ANALIZĂ NUMERICĂ ŞI TEORIA APROXIMAŢIEI
Volumul 3, Fascicola 1, 1974, pp. 107–111

O CLASIFICARE A FUNCŢIILOR LIPSCHITZIENE

de
COSTICĂ MUSTĂŢA
(Cluj)

1. Fie X un spaţiu metric cu metrica d. Pe X se defineşte următoarea mulţime de funcţii:

$$X_0^{\#} = \left\{f\colon\ X \to R,\ \sup_{\substack{x \neq y\\ x,y \in X}} \frac{|f(x) - f(y)|}{d(x, y)} < \infty,\ f(o) = 0\right\} \tag{1}$$

unde ,,o'' este un element fixat al spaţiului metric X.

Pentru $Y \subset X$, care conţine cel puţin două puncte distincte se defineşte funcţionala:

$$K_Y(f) = \sup_{\substack{x \neq y\\ x,y \in Y}} \frac{|f(x) - f(y)|}{d(x, y)},\quad f \in X_0^{\#}. \tag{2}$$

Dacă $Y = \{o\}$ punem $K_Y(f) = 0$ pentru orice $f \in X_0^{\#}$.

Mulţimea $X_0^{\#}$, înzestrată cu operaţiile obişnuite de adunare a două funcţii şi înmulţirea unei funcţii cu un scalar real devine un spaţiu vectorial real.

Dacă $Y = X$, atunci funcţionala (2) este o normă pe $X_0^{\#}$ şi pentru orice $f \in X_0^{\#}$ scriem

$$\|f\|_X = \sup_{\substack{x \neq y\\ x,y \in X}} \frac{|f(x) - f(y)|}{d(x, y)}. \tag{3}$$

Spaţiul vectorial $X_0^{\#}$, înzestrat cu norma (3) îl numim spaţiul normat al funcţiilor lipschitziene cu valori reale [2].

Fie $Y \subset X$ cu $o \in Y$. Notăm

$$K_Y(f) = \|f\|_Y \text{ pentru orice } f \in X_0^{\#}, \tag{4}$$

(5) $$Y^{\perp} = \{f \in X_0^{\#},\ f|_Y = 0\},$$

(6) $$d(f, Y^{\perp}) = \inf_{g \in Y^{\perp}} ||f - g||_X.$$

Un element $g_0 \in Y^{\perp}$ pentru care infimumul din (6) este atins se numește element de cea mai bună aproximare a lui $f \in X_0^{\#}$ prin elementele lui $Y^{\perp}$.

În lucrarea [2] sînt demonstrate următoarele:

L e m a 1. *Fie $Y \subset X$ cu $o \in Y$. Atunci pentru orice $f \in X_0^{\#}$ are loc egalitatea:*

(7) $$||f||_Y = d(f, Y^{\perp}).$$

TEOREMA 1. *Fie $Y \subset X$ cu $o \in Y$. Atunci pentru orice $f \in X_0^{\#}$ există cel puțin o funcție $F \in X_0^{\#}$ astfel ca*

(8) $$f|_Y = F|_Y \quad \text{și} \quad ||f||_Y = ||F||_X.$$

O funcție $F \in X_0^{\#}$ cu proprietățile (8) se numește o prelungire a lui $f \in X_0^{\#}$ de pe Y pe X.

Două dintre prelungirile lui $f \in X_0^{\#}$, în condițiile teoremei 1 sînt:

(9) $$F_1(x) = \inf_{y \in Y} [f(y) + ||f||_Y d(x, y)]$$
$$F_2(x) = \sup_{y \in Y} [f(y) - ||f||_Y d(x, y)]$$

și din felul cum sînt construite [1, pag. 214] rezultă că ele sînt respectiv cea mai mare și cea mai mică dintre prelungirile lui f, în sensul că orice altă prelungire F a lui f verifică inegalitatea

(10) $$F_2(x) \leqq F(x) \leqq F_1(x), \qquad x \in X.$$

L e m a 2. *Fie $Y \subset X$ cu $o \in Y$ și $f \in X_0^{\#}$. Atunci orice element de cea mai bună aproximare a lui f prin elementele lui $Y^{\perp}$ este* d e *forma $f - F$, unde F este o prelungire a lui f de pe Y pe X.*

Demonstrație. Oricare ar fi o prelungire F a lui f de pe Y pe X, în baza lemei 1 și a teoremei 1 avem:

$$||f - (f - F)||_X = ||F||_X = ||f||_Y = d(f, Y^{\perp}),$$

deci $f - F \in Y^{\perp}$ este de cea mai bună aproximare pentru f.

Fie $h \in Y^{\perp}$ un element de cea mai bună aproximare a lui f și să presupunem că $h \neq f - F$ pentru orice prelungire F. Aceasta înseamnă că

$||f - h||_X = d(f, Y^{\perp}) = ||f||_Y$ și deoarece $h \in Y^{\perp}$, $(f - h)|_Y = f|_Y$. Prin urmare sînt îndeplinite condițiile (8) din Teorema 1, adică $f - h$ este o prelungire a lui f de pe Y pe X. Deoarece $h \neq f - F$ pentru orice F, atunci există cel puțin un punct $x_0 \in X$ pentru care, de exemplu

$$h(x_0) > (f - F)(x_0)$$

adică

$$(f - h)(x_0) < F(x_0) \text{ pentru orice } F.$$

În particular

$$(f - h)(x_0) < F_2(x_0)$$

ceea ce contrazice inegalitatea (10).

Analog, dacă $h(x_0) < (f - F)(x_0)$ pentru orice F, atunci în particular

$$(f - h)(x_0) > F_1(x_0)$$

ceea ce, din nou contrazice inegalitatea (10). Deci pentru orice $x \in X$ avem $h(x) = (f - F)(x)$.

2. În cele ce urmează vom da o clasificare a funcțiilor din $X_0^{\#}$, în raport cu comportarea unei astfel de funcții față de prelungirile ei, în ipoteza că X este un spațiu metric liniar real. Drept element fixat ,,o'' luăm aici elementul nul θ al spațiului liniar X.

Fie $Y \subset X$ cu $\theta \in Y$. Fie $x \in Y$. Notăm

(11) $$C_x = [-x, x] = \{y \in X \colon y = -\lambda x + (1 - \lambda)x,\ \lambda \in [0, 1]\},$$

(12) $$\Gamma_x = Y \cap C_x.$$

D e f i n i ț i a 1. *Fie $Y \subset X$ cu $\theta \in Y$ și $f \in X_0^{\#}$. Spunem că f este inferior prelungibilă ((IP)) (respectiv superior prelungibilă ((SP))) pe Y, dacă pentru orice $x \in Y$ și pentru orice prelungire F a lui f de pe C_x pe X are loc inegalitatea:*

(13) $$f(y) \geqq F(y) \text{ (respectiv } f(y) \leqq F(y)),$$

pentru orice $y \in \Gamma_x$.

Următoarea teoremă dă o caracterizare a funcțiilor (IP) ((SP)) pe $Y \subset X$ cu $\theta \in Y$.

TEOREMA 2. *Fie* $Y \subset X$ *cu* $\theta \in Y$ *şi* $f \in X_0^{\#}$. *Funcţia* f *este* (IP) $((SP))$ *pe* Y *dacă şi numai dacă pentru orice* $x \in Y$, *mulţimea elementelor de cea mai bună aproximare ale lui* f *prin elementele lui* $C_x^{\perp}$ *este formată din elemente nenegative (nepozitive) pe* Y.

D e m o n s t r a ţ i e. Rezultă din definiţia 1 şi lema 2.

O proprietate a funcţiilor (IP) ((SP)) este cuprinsă în

L e m a 3. *Fie* $Y \subset X$, $\theta \in Y$ *şi* $Y \neq \{\theta\}$. *Dacă* $f \in X_0^{\#}$ *este* (IP) $((SP))$ *pe* Y, *atunci* $f \geqq \Phi$ $(f \leqq \Phi)$ *pe* Y, *unde* Φ *este elementul nul al spaţiului* $X_0^{\#}$.

D e m o n s t r a ţ i e. Dacă $f \in X_0^{\#}$ este (IP) pe $Y \subset X$ cu proprietăţile din enunţ, luînd $C_0 = \{\theta\}$, deoarece $f|_{\{\theta\}} = \Phi|_{\{\theta\}}$, rezultă că $||f||_{C_0} = 0$. În acest caz, prelungirea lui f de pe $\{\theta\}$ pe X este unică şi anume este Φ; deoarece f este (IP) pe Y avem $f|_Y \geqq \Phi|_Y$. Pentru funcţiile (SP) pe Y, demonstraţia este analogă.

TEOREMA 3. *Fie* $Y \subset X$ *închisă*, $Y \neq \{\theta\}$, $\theta \in Y$ *şi* $f \in X_0^{\#}$, (IP) *pe* Y. *Dacă există* $x_0 \in Y$, $x_0 \neq \theta$, *astfel ca* $f(x_0) = 0$, *atunci* $f = \Phi$ *pe* $[-x_0, x_0] \cap Y$.

D e m o n s t r a ţ i e. Dacă $f \in X_0^{\#}$ este (IP) pe Y, conform lemei 3 avem că $f \geqq \Phi$ pe Y. Fie $x_0 \in Y$, $x_0 \neq \theta$ şi astfel că $f(x_0) = 0$. Considerăm mulţimea $H = [-x_0, x_0] \cap Y$. Deoarece Y este o mulţime închisă şi $[-x_0, x_0]$ este o mulţime compactă, rezultă că mulţimea H este compactă; atunci funcţia $f|_H$ îşi atinge marginile pe H. Fie $y_0 \in H$ astfel că

$$f(y_0) = \max_{y \in H} f(y) \geqq 0$$

Dacă $f(y_0) = 0$ atunci, evident $f \equiv \Phi$ pe H. Să presupunem deci că $f(y_0) > 0$. Atunci considerăm segmentul $C_{y_0} = [-y_0, y_0]$. Evident

$$||f||_{C_{y_0}} \geqq \frac{|f(0) - f(y_0)|}{d(0, y_0)} > 0$$

În punctul x_0 avem

$$f(x_0) - \inf_{z \in C_{y_0}} [f(z) + ||f||_{C_{y_0}} d(x_0, z)] \leqq$$

$$\leqq - \min_{z \in C_{y_0}} f(z) - ||f||_{C_{y_0}} \cdot \inf_{z \in C_{y_0}} d(x_0, z) =$$

$$= - ||f||_{C_{y_0}} \cdot \inf_{z \in C_{x_0}} d(x_0, z) < 0$$

Deci $0 = f(x_0) < F_1(x_0)$, ceea ce contrazice faptul că f este (IP) pe Y.

Pentru funcţiile (SP) pe Y demonstraţia este analogă.

UNE CLASSIFICATION DES FONCTIONS LIPSCHITZIENNES

RÉSUMÉ

Dans cette note on présente une classification des fonctions lipschitziennes à valeurs réelles définies sur un espace métrique linéaire réel, par rapport au comportement d'une telle fonction envers ses prolongements. On définit les fonctions prolongeables inférieurement (IP) et prolongeables supérieurement (SP) sur un sousensemble Y de X avec $\theta \in Y$. On présente un théorème de caractérisation des fonctions (IP) ((SP)) et deux propriétés dont ces fonctions jouissent.

B I B L I O G R A F I E

[1] C z i p s e r J. şi G e h é r L., *Extension of functions satisfying a Lipschitz condition.* Acta Math. Acad. Sci. Hungar, **6**, 213–220 (1955).

[2] M u s t ă ţ a C., *Asupra unor subspaţii cebîşeviene din spaţiul normat al funcţiilor lipschitziene,* Revista de analiză numerică şi teoria aproximaţiei, **2**, *1*, 81–87 (1973).

Primit la 2. IV. 1973.

Institutul de calcul din Cluj
al Academiei Republicii Socialiste România