REVISTA DE ANALIZĂ NUMERICĂ ŞI TEORIA APROXIMATIEI
Volumul 3, Fascicola 2, 1974, pp. 153—160

O PROPRIETATE DE MONOTONIE A OPERATORULUI DE CEA MAI BUNĂ APROXIMARE, ÎN SPAȚIUL FUNCȚIILOR LIPSCHITZIENE

de

COSTICĂ MUSTĂȚA

(Cluj)

1. Fie (X,d) un spațiu metric liniar real, cu metrica d invariantă la translații și următoarele mulțimi de funcții definite pe X, ([4], [5]):

$$X_0^{\#} = \{f \mid f: X \to R,\ \sup_{\substack{x \neq y \\ x,y \in X}} \frac{|f(x) - f(y)|}{d(x,y)} < \infty,\ f(\theta) = 0\}, \tag{1}$$

$$C_X = \{f \mid f: X \to R,\ \sup_{\substack{x \neq \theta \\ x \in X}} \frac{|f(x)|}{d(x,\theta)} < \infty,\ f(\theta) = 0 \text{ și pentru orice } x, y \in X,\ f(x+y) \leqslant f(x) + f(y)\}. \tag{2}$$

Mulțimea $X_0^{\#}$ se poate înzestra cu o structură de spațiu vectorial real, în mod obișnuit.

Fie Y un subspațiu liniar nenul al lui X. Definim funcționala $\|\,.\,\|_Y : X_0^{\#} \to R$ prin

$$\|f\|_Y = \sup_{\substack{x \neq y \\ x,y \in Y}} \frac{|f(x) - f(y)|}{d(x,y)},\ f \in X_0^{\#}, \tag{3}$$

care, în particular, pentru $Y = X$ este o normă pe $X_0^{\#}$ și spațiul normat $(X_0^{\#}, \|.\|_X)$ este izomorf și izometric cu dualul unui spațiu Banach ([1],[3]).

Are loc următoarea lemă:

L e m a 1. *Mulțimea C_X este un con convex din $X_0^{\#}$. Dacă f este un element din C_X, atunci*

(4) $$\sup_{\substack{x \neq \theta \\ x \in X}} \frac{|f(x)|}{d(x,\theta)} = ||f||_X.$$

Demonstraţie. Faptul că mulţimea C_X este un con convex este demonstrat în [5]. Să arătăm că $C_X \subset X_0^{\#}$. Fie $f \in C_X$. Atunci, pentru orice $x \in X$, $x \neq \theta$ avem:

$$\frac{|f(x)|}{d(x,\theta)} \leqq \sup_{\substack{x \neq \theta \\ x \in X}} \frac{|f(x)|}{d(x,\theta)} = M(f) < \infty$$

adică $|f(x)| \leq M(f) \cdot d(x,\theta)$. Deoarece $f(x+y) \leqq f(x) + f(y)$ şi metrica d este invariantă la translaţii avem:

$$f(x) - f(y) \leqq f(x-y) \leq |f(x-y)| \leqq M(f) \cdot d(x-y,\theta) = M(f) \cdot d(x,y)$$

şi

$$f(x) - f(y) \geqq -f(y-x) \geqq -|f(y-x)| \geqq -M(f) \cdot d(x,y)$$

de unde deducem că $|f(x) - f(y)| \leqq M(f) \cdot d(x,y)$, de unde, pentru $x \neq y$ avem

$$||f||_X = \sup_{\substack{x \neq y \\ x, y \in X}} \frac{|f(x) - f(y)|}{d(x,y)} \leqq M(f)$$

adică $f \in X_0^{\#}$ şi în plus $||f||_X \leqq \sup\limits_{\substack{x \neq \theta \\ x \in X}} \frac{|f(x)|}{d(x,\theta)}$.

Pe de altă parte, pentru orice $x \in X$, $x \neq \theta$ avem

$$\sup_{\substack{x \neq \theta \\ x \in X}} \frac{|f(x)|}{d(x,\theta)} = \sup_{\substack{x \neq \theta \\ x \in X}} \frac{|f(x) - f(\theta)|}{d(x,\theta)} \leqq \sup_{\substack{x \neq y \\ x, y \in X}} \frac{|f(x) - f(y)|}{d(x,y)} = ||f||_X$$

şi lema este demonstrată.

2. Vom nota

(5) $$X_0^s = C_X - C_X,$$

spaţiul generat de conul convex C_X, iar dacă Y este un subspaţiu liniar nenul al lui X şi $f \in X_0^{\#}$ vom nota cu $f|_Y$ restricţia lui f pe subspaţiul Y şi

(6) $$Y^{\perp}_{X_0^{\#}} = \{f \mid f \in X_0^{\#},\ f|_Y = 0\},$$

(7) $$Y^{\perp}_{X_0^s} = \{f \mid f \in X_0^s,\ f|_Y = 0\}.$$

Deoarece $X_0^s \subset X_0^{\#}$ rezultă că $Y^{\perp}_{X_0^s} \subset Y^{\perp}_{X_0^{\#}}$.

În lucrarea [5] este demonstrată următoarea teoremă:

TEOREMA 1. *Fie Y un subspațiu nenul al lui X și $f \in X_0^{\#}$. Atunci, pentru $f|_Y$ există $F \in X_0^{\#}$ astfel ca*

a) $f|_Y = F|_Y$

b) $||f||_Y = ||F||_X$.

Două dintre funcțiile care verifică proprietățile a) și b) (vezi [2]) sînt:

$$F_i = \inf_{y \in Y} [f(y) + ||f||_Y \cdot d(., y)],$$

(8)

$$F_s = \sup_{y \in Y} [f(y) - ||f||_Y d(.,y)].$$

Pentru $f \in X_0^{\#}$ și Y subspațiu nenul al lui X, vom nota

(9) $$P_L^Y(f) = \{F | F \in X_0^{\#},\ f|_Y = F|_Y \text{ și } ||f||_Y = ||F||_X\}.$$

Lema 2. *Fie $f \in X_0^{\#}$ și Y subspațiu nenul al lui X. Atunci oricare ar fi $F \in P_L^Y(f)$ au loc inegalitățile:*

(10) $$F_s(x) \leqq F(x) \leqq F_i(x) \text{ pentru orice } x \in X.$$

Demonstrație. Fie $F \in P_L^Y(f)$

Vom arăta că $F(x) \leqq F_i(x)$, pentru orice $x \in X$.

Să presupunem contrariul, adică că există $x_0 \in X$ astfel ca $F(x_0) > F_i(x_0)$. Dacă $x_0 \in Y$ atunci, deoarece $F|_Y = F_i|_Y = f|_Y$ rezultă că $F(x_0) = F_i(x_0)$, deci avem o contradicție. Dacă $x_0 \in \overline{Y}$, aplicînd Teorema 45 din [7] pag. 104 deducem că $F_i(x_0) = F(x_0)$, din nou contradicție.

Fie $x_0 \in X - \overline{Y}$, aceasta înseamnă că oarecare ar fi $y \in Y$, $d(x_0, y) > 0$. Dacă $F_i(x_0) < F(x_0)$, atunci există $y_0 \in \overline{Y}$ astfel ca

$$f(y_0) + ||f||_Y d(x_0, y_0) < F(x_0)$$

de unde deducem că

$$\frac{f(y_0) - F(x_0)}{d(x_0, y_0)} < -||f||_Y$$

sau

$$\frac{F(y_0) - F(x_0)}{d(x_0, y_0)} < -||f||_Y$$

Pe de altă parte $||F||_X = \sup\limits_{\substack{x \neq y \\ x, y \in X}} \dfrac{|F(x) - F(y)|}{d(x,y)} \geqq \dfrac{|F(y_0) - F(x_0)|}{d(x_0, y_0)} \geqq \dfrac{F(x_0) - F(y_0)}{d(x_0, y_0)}$, de unde deducem că

$$-\|F\|_X \leqslant \frac{F(y_0) - F(x_0)}{d(x_0, y_0)} < -\|f\|_Y$$

adică $\|F\|_X > \|f\|_Y$, ceeace contrazice (9).

Analog se arată că $F_s(x) \leqq F(x)$ pentru orice $x \in X$ şi lema e demonstrată.

L e m a 3. *Fie Y un subspaţiu liniar nenul al lui X şi $f \in C_X$, Atunci, pentru $f|_Y$ există $F \in C_X$ astfel ca*

a') $f|_Y = F|_Y$

b') $\|f\|_Y = \|F\|_X$

Demonstraţie. Deoarece $C_X \subset X_0^{\#}$ (conform lemei 1) rezultă că pentru $f|_Y$ există cel puţin o prelungire cu proprietăţile a') şi b') (conform Teoremei 1). Să arătăm că există cel puţin o prelungire care este chiar din C_X. Intradevăr

$$F_i = \inf_{y \in Y} [f(y) + \|f\|_Y \cdot d(., y)]$$

este din C_X; pentru orice $x_1, x_2 \in X$ şi orice $y_1, y_2 \in Y$ avem

$$\begin{aligned} F(x_1 + x_2) &\leqq f(y_1 + y_2) + \|f\|_Y \cdot d(x_1 + x_2, y_1 + y_2) \leqq \\ &f(y_1) + f(y_2) + \|f\|_Y \cdot d(x_1 - y_1, y_2 - x_2) \leqq \\ &f(y_1) + f(y_2) + \|f\|_Y \cdot (d(x_1 - y_1, \theta) + d(\theta, y_2 - x_2)) = \\ &f(y_1) + f(y_2) + \|f\|_Y \cdot d(x_1, y_1) + \|f\|_Y \cdot d(x_2, y_2), \end{aligned}$$

de unde deducem că

$$F(x_1 + x_2) \leqq F(x_1) + F(x_2).$$

Pentru $f \in X_0^{\#}$ şi Y subspaţiu liniar nenul al lui X vom nota

(11) $$P_S^Y(f) = \{F \mid F \in C_X, f|_Y = F|_Y \text{ şi } \|F\|_X = \|f\|_Y\}.$$

Dacă $f \in C_X$, atunci cu siguranţă că $P_S^Y(f) \neq \emptyset$

În plus, din demonstraţia Lemei 3, se vede că este suficient ca restricţia $f|_Y$ a lui $f \in X_0^{\#}$ să fie subaditivă pe Y şi atunci $P_S^Y(f) \neq \emptyset$. De asemeni avem

(12) $$P_S^Y(f) \subset P_L^Y(f).$$

3. Fie G un subspaţiu liniar nenul al lui $X_0^{\#}$ şi $f \in X_0^{\#}$
Vom nota

(13) $$\inf_{g \in G} \|f - g\|_X = d(f, G).$$

Dacă pentru orice $f \in X_0^{\#}$, infimumul din (13) este atins vom spune că G este un subspaţiu proximinal al lui $X_0^{\#}$; dacă G este un subspaţiu proximinal numai pentru elementele unei anumite submulţimi V a lui X, vom spune că G este V-proximinal. Un element $g \in G$, pentru care infimumul din (13) este atins se numeşte element de cea mai bună aproximare a lui f prin elementele lui G.

L e m a 4. *Fie Y un subspaţiu liniar nenul al lui X şi $f \in C_X$. Atunci are loc egalitatea:*

(14) $$d(f, Y^{\perp}_{X_0^{\#}}) = d(f, Y^{\perp}_{X_0^{s}}).$$

Demonstraţie. Dacă $f \in C_X$, atunci oricare ar fi $g \in Y^{\perp}_{X_0^s}$ avem:

$$\|f\|_Y = \sup_{\substack{x \neq y \\ x, y \in Y}} \frac{|f(x) - f(y)|}{d(x,y)} = \sup_{\substack{x \neq y \\ x, y \in Y}} \frac{|(f-g)(x) - (f-g)(y)|}{d(x,y)} \leqq$$

$$\sup_{\substack{x \neq y \\ x, y \in X}} \frac{|(f-g)(x) - (f-g)(y)|}{d(x,y)} = \|f - g\|_X,$$

de unde deducem că

$$\|f\|_Y \leqq \inf_{g \in Y^{\perp}_{X_0^s}} \|f - g\|_X = d(f, Y^{\perp}_{X_0^s}).$$

Pe de altă parte, conform Lemei 3, avem

$$\|f\|_Y = \|f - (f - F)\|_X \geqq \inf_{g \in Y^{\perp}_{X_0^s}} \|f - g\|_X = d(f, Y^{\perp}_{X_0^s}),$$

unde F verifică proprietăţile a') şi b') din Lema 3. Un raţionament cu totul analog, folosind teorema 1, conduce la $\|f\|_Y = d(f, Y^{\perp}_{X_0^{\#}})$ şi lema este demonstrată.

Pentru Y subspaţiu liniar nenul al lui X şi $f \in C_X$, vom nota cu $A_{Y^{\perp}_{X_0^{\#}}}(f)$ şi $A_{Y^{\perp}_{X_0^s}}(f)$ mulţimile elementelor de cea mai bună aproximaţie ale lui f prin elementele subspaţiilor $Y^{\perp}_{X_0^{\#}}$ şi $Y^{\perp}_{X_0^s}$, respectiv.

L e m a 5. *Fie Y un subspaţiu liniar nenul al lui X. Atunci subspaţiile $Y^{\perp}_{X_0^{\#}}$ şi $Y^{\perp}_{X_0^s}$ sînt C_X — proximinale. In plus dacă $f \in C_X$, atunci oricare ar fi $g \in A_{Y^{\perp}_{X_0^s}}(f)$, g este de forma $g = f - F$ cu $F \in P_S^Y(f)$ şi oricare ar fi $h \in A_{Y^{\perp}_{X_0^{\#}}}(f)$, $h = f - F$ cu $F \in P_L^Y(f)$.*

Demonstrație. Fie $f \in C_X$. Atunci, din Lema 4 deducem că

$$||f||_Y = ||f - (f - F)||_X = d(f, Y^{\perp}_{X_0^s}) = d(f, Y^{\perp}_{X_0^{\#}}).$$

și deoarece $f - F \in Y^{\perp}_{X_0^s} \subset Y^{\perp}_{X_0^{\#}}$, rezultă că cele două subspații sînt C_X- proximinale.

Să presupunem acum că $g \in A_{Y^{\perp}_{X_0^s}}(f)$. Atunci avem

$$||f - g||_X = d(f, Y^{\perp}_{X_0^s}) = ||f||_Y$$

și

$$f|_Y = (f - g)|_Y$$

ceea ce înseamnă că $f - g$ verifică proprietățile $a')$ și $b')$ din Lema 3, deci $f - g = F$, $F \in P_S^Y(f)$ de unde $g = f - F$.

La fel se arată că dacă $h \in A_{Y^{\perp}_{X_0^{\#}}}(f)$, atunci $h = f - F$ cu $F \in P_L^Y(f)$. Pentru aceasta se folosește Teorema 1.

TEOREMA 2. *Fie Y un subspațiu nenul al lui X și $f \in C_X$. Atunci*

(15) $$A_{Y^{\perp}_{X_0^s}}(f) \subset A_{Y^{\perp}_{X_0^{\#}}}(f).$$

Demonstrație. Dacă $f \in C_X$ atunci are loc inclusiunea

$$P_S^Y(f) \subset P_L^Y(f),$$

și folosind Lema 5 se deduce (15).

3. Fie acum $(X, |||\cdot|||)$, un spațiu p-normat real ($p \in (0,1]$) ([5], [6]). Pe X definim aceleași mulțimi de funcții $X_0^{\#}$ și C_X, adică

$$X_0^{\#} = \{f: X \to R, \sup_{\substack{x \neq y \\ x, y \in X}} \frac{|f(x) - f(y)|}{|||x - y|||} < \infty, f(\theta) = 0\}.$$

$$C_X = \{f: X \to R, \sup_{\substack{x \neq \theta \\ x \in X}} \frac{|f(x)|}{|||x|||} < \infty, f(\theta) = 0 \text{ și pentru orice } x, y \in X,$$
$$f(x + y) < f(x) + f(y)\}.$$

și în plus, conul

(16) $$C_X^p = \{f | f \in C_X, \forall \lambda \in R, f(\lambda x) = |\lambda|^p \cdot f(x)\}.$$

Conul C_X^p este numit de W. RUESS ([6]), conul p-seminormelor continue pe spațiul p-normat $(X, |||\cdot|||)$.

Cu $X_0^{sp} = C_X^p - C_X^p$ vom nota spaţiul generat de conul C_X^p, iar dacă Y este un subspaţiu liniar nenul al lui $(X, |||\cdot|||)$ punem

$$Y^{\perp}_{X_0^{sp}} = \{f |\ f \in X_0^{sp},\ f|_Y = 0\}. \tag{17}$$

Lema 6. *Fie Y un subspaţiu liniar nenul al lui $(X, |||\cdot|||)$ şi $f \in C_X^p$. Atunci, pentru $f|_Y$ există $F \in C_X^p$ astfel ca*

a'') $$f|_Y = F|_Y$$

b'') $$||f||_Y = ||f||_X.$$

Demonstraţie. Deoarece $C_X^p \subset C_X \subset X_0^{\#}$, existenţa unui $F \in C_X$ cu proprietăţile a''), b'') este asigurată prin Lema 3, care rămîne evident adevărată pentru cazul cînd $(X, |||\cdot|||)$ este un spaţiu p-normat. Mai mult

$$F_i = \inf\ [f(y) + ||f||_Y \cdot ||| \cdot - y |||]$$

este chiar din C_X^p. Intr-adevăr

$$\begin{aligned} F_i(\lambda x) &= \inf_{y\in Y} [f(y) + ||f||_Y \cdot ||| \lambda x - y |||] = \\ &= \inf_{y\in Y} [f(\lambda y) + ||f||_Y \cdot ||| \lambda x - \lambda y |||] = \\ &= \inf_{y\in Y} [|\lambda|^p f(y) + ||f||_Y \cdot |\lambda|^p \cdot ||| x - y |||] = \\ &= |\lambda|^p \cdot \inf_{y\in Y} [f(y) + ||f||_Y \cdot ||| x - y|||] = |\lambda|^p F_i(x) \end{aligned}$$

şi lema e demonstrată.

Evident, avem:

$$Y^{\perp}_{X_0^{sp}} \subset Y^{\perp}_{X_0^{s}} \subset Y^{\perp}_{X_0^{\#}} \tag{18}$$

deoarece $X_0^{sp} \subset X_0^{s} \subset X_0^{\#}$.

Are loc următoarea teoremă:

TEOREMA 3. Fie Y un subspaţiu liniar nenul al spaţiului p-normat $(X, |||\cdot|||)$ şi $f \in C_X^p$. Atunci

$$A_{Y^{\perp}_{X_0^{sp}}}(f) \subset A_{Y^{\perp}_{X_0^{s}}}(f) \subset A_{Y^{\perp}_{X_0^{\#}}}(f). \tag{19}$$

Demonstraţie. Este analogă cu demonstraţia teoremei 2.

A MONOTONY PROPERTY OF THE OPERATOR OF BEST APPROXIMATION IN THE SPACE OF LIPSCHITZ FUNCTIONS

SUMMARY

In the normed space of Lipschitz functions are given subspace Y_1, Y_2 and a convex cone C, such that $Y_1 \subset Y_2$ implies $A_{Y_1}(f) \subset A_{Y_2}(f)$, for every function $f \in C$, where $A_{Y_1}(f)$ and $A_{Y_2}(f)$ are the sets of best approximation of f by elements of Y_1 and respectively Y_2.

BIBLIOGRAFIE

[1] Arens, R. F., Eells, J. Jr., *On embedding uniform and topological spaces*. Pacific J. of Math., **6**, *3*, 397–405 (1956).
[2] Czipser, J., Gehér, L., *Extension of functions satisfiyng a Lipschitz condition*. Acta Math. Acad. Sci. Hungar, **6**, 213–220 (1955).
[3] Johnson, J. A., *Banach spaces of Lipschitz functions and vector-valued Lipschitz functions*. Trans. Amer. Math. Soc., **148**, *1*, 147–171 (1970).
[4] Mustăţa, C., *Asupra unor subspaţii cebişeviene din spaţiul normat al funcţiilor lipschitziene*. Revista de de analiză numerică şi teoria aproximaţiei, **2**, *1*, 81–87 (1973).
[5] Pantelidis, G., *Approximationstheorie für metrische lineare Räume*. Math. Ann., **184**, 30–48 (1969).
[6] Ruess, W., *Ein Dualkegel für p-konvexe topologische lineare Räume*. Gesellschaft für Math. und Datenverarbeitung, Bonn, **60**, (1972).
[7] Schwartz, L., *Analiz. I*, Moskva, (1972).

Institutul de calcul din Cluj
al Academiei Republicii Socialiste România

Primit la 17. XI. 1974.