

T. P O P O V I C I U
SUR CERTAINES FORMULES
DE QUADRATURE DE DEGRÉ
D'EXACTITUDE MAXIMUM

1. Considérons la formule de quadrature

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \sum_{i=1}^p \sum_{j=0}^{k_i-1} c_{i,j} f^{(j)}(z_i) + R(f) \quad (1)$$

où $z_1, z_2, \dots, z_p$ sont p (> 0) points distincts de l'axe réel. Ces sont les noeuds de la formule et $k_1, k_2, \dots, k_p$ sont p nombres naturels, les ordres de multiplicité des noeuds $z_1, z_2, \dots, z_p$ respectifs. Nous pouvons supposer que k_i noeuds sont confondus dans le point z_i , donc que z_i est un noeud d'ordre k_i de multiplicité. Le nombre total des noeuds distincts ou non est égal à $k_1 + k_2 + \dots + k_p = m$, où m est donc un nombre naturel tel que $m \geq p \geq 1$.

En ce qui concerne la fonction f nous pouvons supposer qu'elle est définie et continue sur un intervalle contenant les points $-1, 1$ et les noeuds $z_i, i=1, 2, \dots, p$. De plus, f admet un certain nombre de dérivées, pour que le second membre de la formule (1), où les accents signifient des dérivations successives, ait un sens. Les $c_{i,j}$ sont des coefficients indépendants de la fonction f , les coefficients de la formule (1) et $R(f)$ est le reste de la formule de quadrature considérée. De nombreux auteurs dont nous-même avons étudié [3, 4] la structure de ce reste.

2. La formule (1), ou bien le reste $R(f)$ de cette formule, ont un degré d'exactitude. C'est le nombre entier $n \geq -1$ complètement déterminé par la condition que $R(P)$ soit nul sur tout polynome P de degré n^* et que $R(x^{n+1}) \neq 0$. On dit aussi que la formule (1), ou le reste $R(f)$ de cette formule, est de degré d'exactitude n . $R(f)$ est, d'ailleurs, comme les deux autres termes de la formule (1), une fonctionnelle linéaire (additive et homogène) définie sur un certain ensemble linéaire des fonctions f . Dans la suite on peut toujours supposer $n \geq 0$, le cas $n = -1$ n'intervenant pas. La condition $n \geq 0$ est,

d'ailleurs, équivalente à l'égalité $2 = \sum_{i=0}^p c_{i,0}$.

3. Les noeuds z_i et leurs ordres de multiplicité $k_i, i=1, 2, \dots, p$, étant donnés, mais quelconques, la condition $n \geq m-1$ détermine complètement la formule de quadrature (1), donc les coefficients $c_{i,j}, j=0, 1, \dots, k_i-1$,

* Un polynome de degré g est un polynome de degré effectif $\leq g$. Le polynome unique de degré -1 est le polynome nul.

$i=1, 2, \dots, p$, de cette formule. On peut alors obtenir facilement ces coefficients, en appliquant la formule (1) au polynôme d'interpolation de Lagrange—Hermite de degré $m-1$ de la fonction f correspondant aux noeuds z_i , comptés avec leurs ordres de multiplicité respectifs. Il est inutile d'écrire ici ce polynôme et les valeurs des coefficients $c_{i,j}$ qu'on en déduit. Dans quelques cas particuliers considérés plus loin nous donnerons leurs valeurs explicites.

Dans la suite nous supposons toujours qu'il s'agit d'une telle formule de quadrature (1).

4. Le degré d'exactitude de la formule est alors égal à $n=m+q-1$, où l'entier non-négatif q est caractérisé par la propriété que le polynôme

$$l(x) = \prod_{i=1}^p (x - z_i)^{k_i} \quad (2)$$

est orthogonal à tout polynôme de degré $q-1$, donc que

$$\int_{-1}^1 Q(x) l(x) dx = 0 \quad (3)$$

pour tout polynôme Q de degré $q-1$ et que

$$\int_{-1}^1 x^q l(x) dx \neq 0.$$

Pour la démonstration voir, par exemple, l'un des nos travaux cités [4]. Retenons la propriété exprimée par le

L e m m e 1. *Si la formule de quadrature (1) est de degré d'exactitude $n=m+q-1$, où $q \geq 0$, le polynôme (2) change de signe, à l'intérieur de l'intervalle $[-1, 1]$, au moins q fois.*

C'est une conséquence immédiate de l'orthogonalité.

5. Nous pouvons chercher à imposer aux noeuds z_i des conditions supplémentaires pour obtenir un ordre d'exactitude le plus grand possible. L'entier non-négatif q est au plus égal à p [4] et le maximum p de q peut être atteint. Nous dirons alors (donc si $q=p$) que la formule de quadrature (1) est de degré d'exactitude maximum ou encore qu'elle est du type Gauss. De telles formules ont été étudiées par plusieurs auteurs parmi lesquels nous signalons L. Tchakaloff [5], P. Turán [6], A. Ossicini [1, 2], nous les avons considérées dans nos travaux cités [3, 4]. Nous remarquons, en passant, qu'on a aussi considéré des problèmes analogues pour des fonctionnelles linéaires plus générales que le premier membre de la formule (1).

Retenons, en particulier, la propriété exprimée par le

T h é o r è m e 1. *Pour qu'il existe au moins une formule du type Gauss, de la forme indiquée plus haut, il faut et il suffit que les ordres de multiplicité $k_1, k_2, \dots, k_p$, supposés donnés, des noeuds $z_1, z_2, \dots, z_p$ soient tous impairs.*

Nous pouvons résumer la démonstration de la façon suivante:

La condition est nécessaire d'après le lemme 1.

La condition est aussi suffisante. En effet, si les nombres k_i sont tous impairs, le polynôme de p variables $z_1, z_2, \dots, z_p$,

$$\Phi(z_1, z_2, \dots, z_p) = \int_{-1}^1 l(x) \prod_{i=1}^p (x - z_i) dx$$

est positif sur tout l'espace à p dimensions. Il a donc un minimum positif qui est atteint sur un point de minimum relatif. On peut voir facilement que pour un point de minimum (absolu) $(z_1, z_2, \dots, z_p)$ les coordonnées $z_1, z_2, \dots, z_p$ sont distinctes.

Sur un tel point on a

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, p. \quad (4)$$

Il suffit alors de remarquer que le système (4) est équivalent à l'orthogonalité du polynôme (2) avec tout polynôme de degré $p-1$.

6. Il résulte de ce qui précède, que les nombres $k_i, i=1, 2, \dots, p$ étant supposés toujours impairs, dans toute formule (1) du type Gauss, les noeuds $z_1, z_2, \dots, z_p$ sont distincts et à l'intérieur de l'intervalle $[-1, 1]$.

Mais, à ma connaissance, on ne sait pas encore quel est le nombre exact de formules distinctes du type Gauss, pour un système donné d'ordres de multiplicité (impairs). Il semble que ce nombre est égal au nombre des permutations distinctes des nombres $k_1, k_2, \dots, k_p$, à toute permutation correspondant une formule du type Gauss bien déterminée. Ceci est vrai si $k_1 = k_2 = \dots = k_p$. Il y a alors une seule formule du type Gauss.

Deux formules sont, d'ailleurs, distinctes si et seulement si les polynômes (2) correspondants sont différents.

Le but de ce petit travail est de résoudre complètement ce problème dans quelques cas particuliers, différents de celui où les ordres de multiplicité sont tous égaux. Nous complétons ainsi certains de nos résultats antérieurs [3].

7. Considérons le cas $p=2, k_1=k, k_2=1$. Le cas $k=3$ a été considéré antérieurement [3]. Supposons maintenant que k soit impair quelconque. Les noeuds z_1, z_2 sont alors donnés par le système

$$\int_{-1}^1 (x - z_1)^{k+i} (x - z_2) dx = 0, \quad i = 0, 1.$$

Si nous posons

$$\frac{1 - z_1}{1 + z_1} = y \quad (5)$$

le système peut s'écrire

$$\begin{aligned} \frac{y^{k+2} + 1}{k+2} + \frac{z_1 - z_2}{1 + z_1} \cdot \frac{y^{k+1} - 1}{k+1} &= 0, \\ \frac{y^{k+3} - 1}{k+3} + \frac{z_1 - z_2}{1 + z_1} \cdot \frac{y^{k+2} + 1}{k+2} &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

En éliminant z_2 , le noeud z_1 est donné par (5) et par l'équation réciproque en y

$$\begin{aligned} (k+2)^2 (y^{k+1} - 1) (y^{k+3} - 1) - (k+1) (k+3) (y^{k+2} + 1)^2 = \\ = y^{2k+4} - (k+2)^2 y^{k+3} - 2(k+1)(k+3) y^{k+2} - (k+2)^2 y^{k+1} + 1 = 0, \end{aligned} \quad (7)$$

qui a exactement 2 racines réelles positives et distinctes (séparées par 1).

Il en résulte que dans le cas étudié nous avons exactement deux formules du type Gauss qui sont confondues pour $k=1$ dans la formule classique de Gauss, mais sont bien distinctes pour $k > 1$. En effet, le noeud z_2 s'obtient de l'une des équations (6) et la théorie précédente nous montre qu'il sera complètement déterminé, différent de z_1 et compris strictement entre -1 et 1 .

Pour $k=3$ nous avons déjà donné la valeur explicite de z_1 (donc aussi de z_2) et de la formule (1) correspondante. z_1 et z_2 sont alors des irrationalités quadratiques. Pour $k > 3$ la nature arithmétique de z_1 et z_2 semble être plus compliquée.

8. Pour calculer z_1 il faut résoudre d'abord l'équation réciproque (7). Pour cela nous posons

$$y + \frac{1}{y} = t. \quad (8)$$

Alors $y^s + 1/y^s$ est égal à un polynôme $P_s(t)$ en t , de degré s , donné par la relation de récurrence

$$P_{s+1} = tP_s - P_{s-1}, \quad s = 1, 2, \dots \quad (P_0 = 2, P_1 = t).$$

L'équation en t est donc

$$P_{k+2}(t) - (k+2)^2 t - 2(k+1)(k+3) = 0. \quad (9)$$

De ce qui précède il résulte que cette équation en t a une racine réelle > 2 . On vérifie facilement qu'elle a aussi la racine double -2 .

Pour $k=1$ et $k=3$ le premier membre de (9) est

$$t^3 - 12t - 16 = (t+2)^2(t-4),$$

$$t^5 - 5t^3 + 5t^2 - 25t - 48 = (t+2)^2(t-3)(t^2 - t + 4)$$

respectivement, ce qui donne les résultats signalés bien connus.

Pour $k=5$ l'équation (9) devient

$$t^7 - 7t^5 + 14t^3 - 56t - 96 = (t+2)^2(t^5 - 4t^4 + 5t^3 - 4t^2 + 10t - 24) = 0$$

et on vérifie que cette équation n'a plus de racines positives rationnelles.

9. Considérons encore le cas $p=3$, $k_1=k$, $k_2=k_3=1$. Le cas $k=3$ a déjà été considéré antérieurement [3]. Supposons que k soit impair quelconque. Les noeuds z_1, z_2, z_3 sont donnés par le système

$$\int_{-1}^1 (x - z_1)^{k+i} (x - z_2)(x - z_3) dx = 0, \quad i = 0, 1, 2. \quad (10)$$

En écrivant (5) et en éliminant z_2 et z_3 , on trouve que y est donné par l'équation

$$\begin{vmatrix} \frac{y^{k+3}-1}{k+3} & \frac{y^{k+2}+1}{k+2} & \frac{y^{k+1}-1}{k+1} \\ \frac{y^{k+4}+1}{k+4} & \frac{y^{k+3}-1}{k+3} & \frac{y^{k+2}+1}{k+2} \\ \frac{y^{k+5}-1}{k+5} & \frac{y^{k+4}+1}{k+4} & \frac{y^{k+3}-1}{k+3} \end{vmatrix} = 0$$

ou, en faisant les calculs,

$$4y^{3k+9} - Ay^{2k+8} - By^{2k+7} - Cy^{2k+6} - Dy^{2k+5} - Ey^{2k+4} + \\ + Ey^{k+5} + Dy^{k+4} + Cy^{k+3} + By^{k+2} + Ay^{k+1} - 4 = 0. \quad (11)$$

avec

$$\begin{aligned} A &= (k+2)^2(k+3)^2, & B &= 4(k+1)(k+3)^2(k+4), \\ C &= 6(k+2)(k+4)(k^2+6k+7), & D &= 4(k+2)(k+3)^2(k+5), \\ E &= (k+3)^2(k+4)^2. \end{aligned}$$

Remarquons que A, B, C, D, E sont positifs.

Si nous désignons par $\varphi(y)$ le premier membre de l'équation, nous avons $\varphi(0) < 0$ et $\varphi'(1) = 12(k+3) - (k+7)A - (k+5)B - (k+3)C - (k+1)D - (k-1)E < 0$. La règle des signes de Descartes nous montre alors que l'équation réciproque (11) a exactement 3 racines réelles et positives qui sont distinctes, dont l'une est égale à 1.

De l'orthogonalité et du lemme 1 il résulte que pour un z_1 déterminé le polynome $(x-z_2)(x-z_3)$ est déterminé complètement, z_2, z_3 étant distincts, compris strictement entre -1 et 1 et étant différents de z_1 .

Dans ce cas nous avons donc exactement 3 formules du type Gauss. Si $k=1$ ces trois formules sont confondues avec la formule classique de Gauss avec 3 noeuds. Mais si $k > 1$ les trois formules sont distinctes. L'une correspond à la valeur 0 de z_1 et les deux autres à deux valeurs de z_1 symétriques par rapport à l'origine.

Remarquons que, dans ce cas, le nombre des permutations distinctes des nombres k_1, k_2, k_3 est bien égale à 3.

10. Toujours dans le cas particulier considéré, la formule du type Gauss correspondant au noeud $z_1=0$ peut être obtenue explicitement sous une forme assez simple.

En posant $z_1=0$ dans le système (10) on obtient $(x-z_2)(x-z_3) = x^2 - \lambda^2$, où $\lambda = \sqrt{(k+2)/(k+4)}$. Nous avons donc $z_2 = \sqrt{(k+2)/(k+4)}$, $z_3 = -\sqrt{(k+2)/(k+4)}$.

Écrivons la formule de quadrature sous la forme

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \sum_{j=0}^{k-1} c_j f^{(j)}(0) + cf(\lambda) + df(-\lambda) + R(f).$$

La formule est de degré $k+4$ d'exactitude.

Pour trouver les coefficients c, d prenons successivement $f=x^k, f=x^{k+1}$. Compte tenu du fait que k est impair, nous en déduisons

$$c = d = \frac{1}{(k+2)\lambda^{k+1}}. \quad (12)$$

En prenant $f=x^i$ où i est impair nous trouvons ($k > 1$)

$$c_1 = c_3 = \dots = c_{k-2} = 0. \quad (13)$$

Enfin si nous prenons $f = x^{2j}(x^{k-2j+1} - \lambda^{k-2j+1})$, $j = 0, 1, \dots, \frac{k-1}{2}$, nous obtenons

$$c_{2j} = \frac{2}{(2j+1)!} - \frac{2}{(2j)! (k+2)\lambda^{k-2j+1}}, \quad j = 0, 1, \dots, \frac{k-1}{2}. \quad (14)$$

La formule de quadrature cherchée s'écrit donc

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 f(x) dx = \sum_{j=0}^{\frac{k-1}{2}} \left(\frac{2}{(2j+1)!} - \frac{2}{(2j)! (k+2)\lambda^{k-2j+1}} \right) f^{(2j)}(0) + \\ + \frac{1}{(k+2)\lambda^{k+1}} (f(\lambda) + f(-\lambda)) + R(f). \end{aligned} \quad (15)$$

Le reste $R(f)$ est donné par la formule (voir [3]),

$$R(f) = R(x^{k+5})[\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{k+6}; f]$$

ou $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{k+6}$ sont $k+6$ points distincts de l'intérieur de l'intervalle $[-1, 1]$ et qui dépendent, en général, de la fonction (continue) $f(x)$. $[\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{k+6}; f]$ est la différence divisée de la fonction f sur les noeuds ξ_i , $i = 1, 2, \dots, k+6$.

On peut obtenir le coefficient $R(x^{k+5})$ en prenant dans la formule (15) $f = x^{k+3}(x^2 - \lambda^2)$. On obtient ainsi

$$R(x^{k+5}) = R(x^{k+3}(x^2 - \lambda^2)) = 2\left(\frac{1}{k+6} - \frac{\lambda^2}{k+4}\right) = \frac{8}{(k+4)^2(k+6)}.$$

B I B L I O G R A P H I E

1. A. Ossicini. Construzione di formule di quadratura di tipo Gaussiano. — Ann. Mat. (IV), 1966, 72, 213—238.
2. A. Ossicini. Le funzioni di influenza nel problema di Gauss sulle formule di quadratura. — Le Matematiche, 1968, 23, 7—30.
3. T. Popoviciu. Asupra unei generalizări a formulei de integrare numerică a lui Gauss. — Studii și Cercetări științ. Iași. Anul 6 (1955), 29—57.
4. T. Popoviciu. La simplicité du reste dans certaines formules de quadrature. — Mathematica, 1964, 6 (29), 157—184.
5. L. Tchakaloff. Über eine allgemeine Quadraturformel. — Compt. rend. Acad. Bulgare sci, 1948, t. 1, 9—12.
6. P. Turàn. On the theory of the mechanical quadrature. — Acta Sci. Math., 1950, 12, 29—37.