

ÜBER DIE VERWENDUNG DER TABELLEN SPEZIELLER FUNKTIONEN

von T. Popoviciu in Cluj

1. Gegeben sei eine Tabelle, welche die Werte einer reellen Funktion f der reellen Veränderlichen x für eine endliche Anzahl $m > 1$ von Werten $x_1, x_2, \dots, x_m$ der unabhängigen Veränderlichen enthält.

Die Aufgabe besteht darin, die Tabelle durch Interpolation für andere Werte von x zu ergänzen. Um diese Aufgabe zu lösen, beginnt man gewöhnlich mit einer linearen Interpolation in den aufeinanderfolgenden Intervallen, welche durch die Punkte x_i , $i = 1, 2, \dots, m$ bestimmt sind. Wird vorausgesetzt, daß $x_1 < x_2 < \dots < x_m$ gilt, so besteht die lineare Interpolation darin, daß man statt der Funktion f im abgeschlossenen Intervall $[x_1, x_m]$ die Polygonalfunktion P verwendet, welche in die Kurve $y = f(x)$ eingeschrieben ist und die Ecken $(x_i, f(x_i))$, $i = 1, 2, \dots, m$ besitzt. Analytisch ausgedrückt bedeutet das, daß die Funktion f in jedem Intervall $[x_i, x_{i+1}]$ durch das Lagrangesche Polynom ersten Grades $L(x_i, x_{i+1}; f)$ ersetzt wird, welches in den Endpunkten x_i, x_{i+1} dieselben Werte wie die Funktion f annimmt.

Da wir angenommen haben, daß die Werte der Funktion f außerhalb der Punkte x_i , $i = 1, 2, \dots, m$ nicht bekannt sind, können wir im allgemeinen nichts aussagen über die Güte der Approximation

$$(1) \quad f(x) \approx L(x_i, x_{i+1}; f)(x),$$

wobei x ein Punkt ist, der zwischen den Punkten x_i und x_{i+1} liegt.

Ganz anders behandelt man die anfangs gestellte Aufgabe, wenn zusätzlich bekannt ist, daß die Funktion f ein bestimmtes Verhalten aufweist; z. B., wenn die Funktion f positiv ist, dann sind auch die Approximationsfunktionen $L(x_i, x_{i+1}; f)$, im Intervall

$[x_i, x_{i+1}]$ für jedes $i = 1, 2, \dots, m-1$ positiv. Wenn die Funktion f zunehmend ist, so sind auch die obigen Approximationsfunktionen (für alle x), und auch die oben erwähnte Polygonalfunktion P , zunehmend u. s. w.

Wir werden im folgenden einen anderen wichtigen Spezialfall eines solchen Verhaltens untersuchen.

Es sei bemerkt, daß in den Tabellen, die man im allgemeinen benützt, nicht die genauen Werte der dargestellten Funktion enthalten sind, sondern Näherungswerte. Das ist z. B. bei den Logarithmentafeln der Fall. Wir werden diese Tatsache weiter im Auge behalten.

2. Wir wollen nun das Interpolationsproblem für den Fall einer Funktion f betrachten, welche in einem die Punkte x_i , $i = 1, 2, \dots, m$, enthaltenden Intervall stetig und konkav ist. Für eine solche Funktion sind die dividierten Differenzen 2-ter Ordnung negativ. Das ist z. B. bei einer Funktion, deren zweite Ableitung negativ ist, der Fall. Dieser Fall liegt z. B. bei der Funktion $\ln x$ vor, die (für $x > 0$) konkav ist, so daß das Folgende auf die Logarithmentafeln angewendet werden kann.

Das zu untersuchende Problem kann dann wie folgt formuliert werden:

Es sei eine stetige konkave Funktion f in einem Intervall gegeben, das die Punkte a, b ($a < b$) enthält. Es soll die Approximation dieser Funktion durch ein Polynom 1-ten Grades im Intervall $[a, b]$ untersucht werden.

Das Lagrangesche Polynom $L = L(a, b; f)$, das die Werte von f in den Endpunkten a, b annimmt, ergibt eine solche Näherung. Die Approximation von $f(x)$ durch $L(a, b; f)(x)$ ist für jedes $x \in [a, b]$ eine Näherung von unten. Um eine bessere Approximation zu erhalten, versucht man das Polynom L durch ein anderes Approximationspolynom zu ersetzen.

Gemäß einer Idee von E. V. VORONOVSKAIA [3] kann man statt L das Polynom 1-ten Grades nehmen, das die Funktion am besten im Sinne von Tschebyscheff approximiert. Diese Wahl ist dadurch gerechtfertigt, daß dieses Polynom wegen des speziellen Verhaltens (Konkavität) der Funktion f sich vom Polynom L nur durch eine positive Konstante unterscheidet. Genauer gesagt: das betrachtete Tschebyscheffsche Polynom ist gleich $L + \rho$, wobei

$$(2) \quad 2\rho = \max_{[a, b]} (f-L) = f(\xi) - L(\xi)$$

gilt. Der Punkt $\xi \in]a, b[$ ($a < \xi < b$) ist eindeutig bestimmt. Ist die Funktion f differenzierbar, so ist er die einzige Wurzel der Gleichung

$$f'(x) - L'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0.$$

Die Berechnung der Zahl ρ ist aber i. A. zu kompliziert, um bei numerischen Berechnungen verwendet werden zu können. Nehmen wir z. B. an, wir hätten eine Tafel, welche die Werte der Funktion $\ln x$ für die natürlichen Zahlen bis zu einer genügend großen Zahl enthält, und setzen wir $a = n$, $b = n+1$, wobei n eine natürliche Zahl bezeichnet, dann ist

$$(3) \quad \xi = \frac{1}{\ln(1 + \frac{1}{n})}.$$

Die entsprechende Zahl 2ρ :

$$\ln(1 + \frac{1}{n})^n - \ln \ln(1 + \frac{1}{n})^{n-1}$$

kann nicht durch rationale Operationen aus den Daten der Tabelle erhalten werden.

Es ist also sinnvoller, eine Abänderung des Approximationspolynoms $L+\rho$ zu suchen. Es gibt mehrere Möglichkeiten, eine solche Änderung vorzunehmen. Die von uns im folgenden behandelten scheinen die einfachsten zu sein.

3. Nehmen wir als Approximationspolynom das Polynom $L+\lambda$ an, wobei λ eine positive Konstante ist, die durch die Gleichung

$$(4) \quad 2\lambda = f(c) - L(c)$$

bestimmt ist. Dabei ist c eine vorgegebene Zahl mit $a < c < b$. Es gilt dann $0 < \lambda \leq \rho$. Die Gleichheit $\lambda = \rho$ tritt nur im Falle $c = \xi$ ein. Ist eine positive Zahl λ vorgegeben, die kleiner als ρ ist, so gibt es zwei Punkte c , für welche die Gleichung (4) besteht. ρ und ξ haben die im vorhergehenden Abschnitt angegebene Bedeutung.

Die zur Sehne $y = L(x)$ parallele Gerade $y = L(x) + \lambda$ schneidet den Bogen $y = f(x)$ in zwei Punkten $(a_1, f(a_1))$, $(b_1, f(b_1))$, wobei $a < a_1 < b_1 < b$. Die Abszissen a_1 und b_1 kann man jedoch nicht einmal für einfache Funktionen f genau bestimmen.

Beispiel 1. Die Funktion $x(1-x)$ ist im Intervall $[0, 1]$ konkav. Wir wählen $a = 0$,

Es seien nun $(a_2, f(a_2))$, $(b_2, f(b_2))$, wobei $a < a_2 < b_2 < b$ ist, die Schnittpunkte der Geraden $y = L(x) + \frac{1}{2}\lambda$ mit dem Bogen $y = f(x)$, und a'' bzw. b'' die Abszisse des Schnittpunktes dieser Geraden und der Geraden $y = L(a, c; f)(x)$ bzw. $y = L(c, b; f)(x)$. Wie im Falle von a_1, b_1 können die Abszissen a_2, b_2 im allgemeinen nicht explizit durch rationale Operationen aus den Daten des Problems berechnet werden.

Beispiel 2. Für die im Beispiel 1 betrachtete Funktion $x(I-x)$ ist

$$a_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4}, \quad b_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Es gilt $a'' = \frac{3a+c}{4}$, $b'' = \frac{c+3b}{4}$. Weiterhin ist $a < a_2 < a_1 < b_1 < b_2 < b$ und $a < a'' < a' < c < b' < b'' < b$. Beachtet man einerseits, daß $a_1 < \xi < b_1$ ist, wobei ξ der durch (2) bestimmte Punkt ist, und andererseits bekannte Eigenschaften der konkaven Funktionen, so ergibt sich, daß die Funktion f auf dem Intervall $[a, \xi]$ steigend und auf dem Intervall $[\xi, b]$ fallend ist. Die gleichen Monotonieeigenschaften besitzt diese Funktion auch auf dem Intervall $[a, a_1]$ bzw. $[b_1, b]$. Hieraus folgt:

II. Im Intervall $[a'', b'']$, das die Länge $\frac{3}{4}(b-a)$ besitzt, ergibt die Approximation von $f(x)$ durch $L(x) + \lambda$ einen Absolutfehler, der kleiner ist als der bei der Approximation von $f(x)$ durch $L(x)$.

Diese Eigenschaft gilt auch für $x \in]a_2, b_2[$, doch muß bezüglich der Endpunkte a_2, b_2 die gleiche Bemerkung wie die über a_1 und b_1 gemacht werden.

5. Um eine Anwendung anzuführen, kehren wir zur natürlichen Logarithmentafel zurück, welche Werte für eine genügend große Zahl von aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen enthält.

Um den Wert von $\ln(n+r)$ (mit $0 < r < 1$) zu berechnen, interpoliert man gewöhnlich linear zwischen n und $n+1$ mittels des Lagrangeschen Polynoms. Man erhält dann

$$(5) \quad \ln(n+r) \approx (1-r)\ln n + r\ln(n+1).$$

Wenn wir die in den vorhergehenden Abschnitten dargelegte Theorie anwenden und $c = \frac{2n+1}{2}$ setzen (also c als den Mittelpunkt des Intervalls $[n, n+1]$ wählen), so erhalten wir die Näherung

$$(6) \quad \ln(n+r) \approx (1-r)\ln n + r\ln(n+1) + \lambda_1,$$

wobei

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} \ln \frac{2n+1}{2} - \frac{1}{4} (\ln n + \ln(n+1)) = \frac{1}{4} \ln \frac{(2n+1)^2}{4n(n+1)} =$$

(7)

$$= \frac{1}{4} \ln \left(1 + \frac{1}{4n(n+1)}\right) = \frac{1}{16n(n+1)} \ln \left(1 + \frac{1}{4n(n+1)}\right)^{4n(n+1)}.$$

In diesem Fall ist $a' = n + \frac{1}{4}$, $b' = n + \frac{3}{4}$, $a'' = n + \frac{1}{8}$, $b'' = n + \frac{7}{8}$.

Die Näherung (6) ist eine Näherung von unten, die für $\frac{1}{4} \leq r \leq \frac{3}{4}$ besser ist als (5) und für $\frac{1}{8} \leq r \leq \frac{7}{8}$ eine Näherung mit einem kleineren Absolutfehler als (5).

Man beachte, daß sich für eine rationale Zahl r der in (6) angegebene Näherungswert mittels elementarer Operationen berechnen läßt und zwar aus $\ln n$, $\ln(n+1)$ und $\ln \frac{2n+1}{2} = \ln(2n+1) - \ln 2$, Werte, die entweder in der Tafel angegeben sind, beziehungsweise sich aus den Daten der Tafel sofort bestimmen lassen.

Aus (7) ergibt sich, daß der Wert von λ_1 bei wachsendem n fällt und für $n \rightarrow +\infty$ gegen Null strebt. Weiterhin ergibt sich

$$(8) \quad \lambda_1 < \frac{1}{16n(n+1)}$$

und $n(n+1)\lambda_1 \rightarrow \frac{1}{16}$ für $n \rightarrow +\infty$, also ist λ_1 asymptotisch gleich $\frac{1}{16n(n+1)}$.

Beispiel 3. Es sei $n = 2$, $r = \frac{3}{8} = 0,375$. Einer Logarithmentafel mit 10 Dezimalstellen entnehmen wir die Werte

$$\ln 2 = 0,693\ 147\ 180\ 6; \quad \ln 3 = 1,098\ 612\ 288\ 7; \quad \ln 5 = 1,609\ 437\ 912\ 4.$$

Man erhält dann

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} \ln 5 - \frac{3}{4} \ln 2 - \frac{1}{4} \ln 3 = 0,010\ 205\ 498\ 6$$

und

$$(1-r) \ln 2 + r \ln 3 = \frac{5}{8} \ln 2 + \frac{3}{8} \ln 3 = 0,837\ 696\ 596\ 1.$$

Demnach ist

$$\ln 2,375 \approx 0,837\ 696\ 596\ 1 + 0,010\ 205\ 498\ 6 = 0,847\ 902\ 094\ 7.$$

In der gleichen Tabelle finden wir den Wert $\ln 2,375 = 0,864\ 997\ 537\ 4$; also haben wir eine genaue Dezimalstelle für $\ln 2,375$ erhalten.

6. Eine der Formel (6) ähnliche Formel kann man wie folgt erhalten. Wir gehen aus von der Interpolationsformel

$$(9) \quad f(x) - L(x) = (x-a)(x-b) [a, b, x; f] \quad (a < x < b)$$

wobei $[a, b, x; f]$ die dividierte Differenz zweiter Ordnung der auf dem Intervall $[a, b]$ konkaven Funktion f bezüglich der Punkte a, b, x bezeichnet. Ist f zweimal differenzierbar und die zweite Ableitung (negativ) $\leq -M$ auf dem Intervall $[a, b]$, wobei M eine positive Konstante ist, so erhält man aus (2)

$$(10) \quad 2\rho > (\xi-a)(b-\xi) \frac{M}{2}.$$

Im Fall der Funktion $\ln x$ ist $M = \frac{1}{(n+1)^2}$, wenn man $a = n$, $b = n+1$ wählt, während der Wert von ξ durch (3) angegeben ist. Beachtet man Aufgabe I-168 aus der bekannten Aufgabensammlung von G. PÓLYA und G. SZEGÖ[1], so ergibt sich, daß die Folge

$((1 + \frac{1}{n})^{n+\frac{1}{2}})_{n=1}^{+\infty}$ fallend ist¹⁾. Um diese Behauptung zu beweisen, kann man die Funktion $y = (x + \frac{1}{2}) \ln(1 + \frac{1}{x})$ benutzen, für die $y' = \ln(1 + \frac{1}{x}) - \frac{2x+1}{x(x+1)}$ und $y'' = \frac{1}{2x^2(x+1)^2} > 0$ ist.

Daraus ergibt sich $\lim_{x \rightarrow +\infty} y' = 0$; also ist $y' < 0$ für $x > 0$.

Vermittels der Funktion $y = (x + \frac{1}{3}) \ln(1 + \frac{1}{x})$ kann man zeigen, daß die Folge

$((1 + \frac{1}{n})^{n+\frac{1}{3}})_{n=1}^{+\infty}$ steigend ist. Beide Folgen haben die Zahl e als Grenzwert. Wir erhalten also

$$n + \frac{1}{3} < \xi < n + \frac{1}{2} < n + \frac{2}{3}.$$

Demnach gilt

$$(\xi-n)(n+1-\xi) = (\xi-n-\frac{1}{3})(n+\frac{2}{3}-\xi) + \frac{2}{9} \geq \frac{2}{9}$$

und (10) ergibt

$$(11) \quad 2\rho > \frac{1}{9(n+1)^2}.$$

Statt Formel (6) kann man also auch die Formel

$$(12) \quad \ln(n+r) \approx (1-r) \ln n + r \ln(n+1) + \lambda_2 \quad (0 < r < 1)$$

benutzen, wobei

$$(13) \quad \lambda_2 = \frac{1}{18(n+1)^2}$$

ist.

Beispiel 4. Kehren wir zum Beispiel 3 zurück, so erhalten wir

$$\lambda_2 = \frac{1}{162} = 0,006\,172\,839\,50 \dots$$

und

$$\ln 2,375 \approx 0,843\,869\,435\,6.$$

Dieser Wert unterscheidet sich nur um $0,004\,1 < \frac{1}{200}$ von dem mit Hilfe von Formel (6) berechneten Wert.

Abschließend sei noch bemerkt, daß man zeigen kann, daß für eine vorgegebene Zahl $k > 16$ in (12) statt des durch (13) angegebenen Wertes von λ_2 der Wert $\frac{1}{k(n+1)^2}$ benutzt werden kann, wenn n hinreichend groß ist.

7. In einer vorhergehenden Arbeit [2] haben wir ein Verfahren zur Berechnung der natürlichen Logarithmen durch quadratische Interpolation angegeben. Die auf diesem Weg erhaltenen Ergebnisse können besser sein als die durch die in dieser Arbeit behandelte lineare Interpolation erhaltenen.

Beispiel 5. Berechnen wir $\ln 2,5$ mit Hilfe von Formel (6), so erhalten wir

$$\ln 2,5 \approx \frac{1}{2} \ln 5 + \frac{1}{4} (\ln 3 - \ln 2).$$

Eine Tafel mit 10 Dezimalstellen ergibt dann

$$\ln 2,5 \approx 0,906\,085\,233\,2.$$

Durch das in [2] beschriebene Verfahren erhält man hingegen $\ln 2,5 \approx 0,916\,713\,067\,9$; ein Wert, der den in der gleichen Tafel angegebenen Wert $0,916\,290\,731\,9$ weitaus besser annähert.

* * *

FUSSNOTE

1) In unseren weiteren Ausführungen benötigen wir eigentlich nur die Bemerkung, daß die Folge $((1 + \frac{1}{n})^{n+\frac{2}{3}})_{n=1}^{+\infty}$ fallend ist.

Beachtet man hingegen die Monotonie der Folge $((1 + \frac{1}{n})^{n+\frac{1}{2}})_{n=1}^{+\infty}$, so erhält man eine genauere obere Abschätzung für ξ .

LITERATUR

1. PÓLYA, G. und G. SZEGÖ: Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis I. Berlin 1925.
2. POPOVICIU, T.: Über die Approximation der Funktionen und der Lösungen einer Gleichung durch quadratische Interpolation. Methoden der Approximationstheorie, Bd. 1 (1972), 155-163.
3. VORONOVSKAIA, E. V.: O vidoizmenenii metoda Ciaplighina dlia differentialnih uravnenii pervovo poriadka. Prikladnaia matematika i mehanika, XIX, (1955), 121-126.