

SUR UNE GÉNÉRALISATION DES FONCTIONS „SPLINE“

T. Popoviciu

Dédié à M. L. Iliev à l'occasion de son soixantième anniversaire

Résumé. Après avoir rappelé la généralisation que nous avons donnée autrefois aux fonctions "spline" [4], nous donnons quelques nouvelles propriétés de ces fonctions. A titre d'exemple :

Si la fonction f est d'ordre (n/k) sur l'intervalle $[a, b]$ et si $k \leq n$, cette fonction est bornée et si $k \leq n-r-1$, elle a une dérivée continue d'ordre r ($r \geq 0$) sur tout intervalle $[a_1, b_1]$, où $a < a_1 < b_1 < b$.

1. Depuis un certain temps l'attention de plusieurs auteurs s'est portée sur une classe spéciale de fonctions réelles d'une variable réelle. Ce sont les fonctions formées par un nombre fini de morceaux polynômiaux raccordés convenablement. Des cas particuliers sont les fonctions constantes par segments et les fonctions dont la représentation graphique est une ligne polygonale. Ces fonctions ont été rencontrées depuis longtemps dans divers problèmes importants comme celui de l'intégration approximative ou de l'approximation des fonctions quelconques par des fonctions plus simples.

2. Soit $f: [a, b] \rightarrow R$ une fonction continue définie sur l'intervalle $[a, b]$ borné et fermé de l'axe réel R et considérons les points

$$(1) \quad x_v = a + vh, \quad h = \frac{b-a}{m}, \quad v = 0, 1, \dots, m,$$

qui divisent cet intervalle en m parties égales.

Désignons par ψ_m la ligne polygonale (la fonction polygonale) inscrite dans la courbe $y=f(x)$ et dont les sommets sont les points $(x_v, f(x_v))$. On sait que, sur $[a, b]$, la suite (ψ_m) tend uniformément vers la fonction f .

La fonction ψ_m est de la forme

$$(2) \quad \psi_m = f(x_0) + [x_0, x_1; f](x-a) + 2h \sum_{v=0}^{m-2} [x_v, x_{v+1}, x_{v+2}; f] \varphi_{2, x_{v+1}}$$

où λ est un nombre réel et $\varphi_{2, \lambda} = \frac{x-\lambda + |x-\lambda|}{2} = (x-\lambda)_+$ est la partie positive de la fonction $x-\lambda$.

3. Nous désignerons par $[z_1, z_2, \dots, z_{k+1}; f]$ la différence divisée (d'ordre k) de la fonction f sur les $k+1$ points ou nœuds $z_1, z_2, \dots, z_{k+1}$.

Alors les fonctions (2) se généralisent par les fonctions ($m \geq n+1$)

$$(3) \quad Q_m(x) + (n+1)h \sum_{v=0}^{m-n-1} [x_v, x_{v+1}, \dots, x_{v+n+1}; f] \cdot \varphi_{n+1, x_v+n}$$

où n est un nombre naturel, $Q_m(x)$ un polynôme de degré n et les x_v sont toujours les points (1). Enfin nous avons

$$(4) \quad \varphi_{n+1, \lambda} = \left(\frac{x - \lambda + |x - \lambda|}{2} \right)^n = (x - \lambda)_+^n.$$

Les différences divisées de divers ordres, sur des nœuds équidistants ou non, sont définies (par exemple) par la relation de récurrence

$$[z_1, z_2, \dots, z_{k+1}; f] = \frac{[z_2, z_3, \dots, z_{k+1}; f] - [z_1, z_2, \dots, z_k; f]}{z_{k+1} - z_1}$$

et $[z_1; f] = f(z_1)$ et par laquelle on construit la différence divisée d'ordre k à l'aide de celle d'ordre $k-1$.

Dans la suite nous supposons toujours que les nœuds $z_1, z_2, \dots, z_{k+1}$ sont distincts. On sait qu'en admettant l'existence d'un certain nombre de dérivées pour la fonction f , on peut aussi définir des différences divisées sur des nœuds non pas nécessairement distincts. Pour les nœuds équidistants (1) nous avons d'ailleurs,

$$\begin{aligned} [x_v, x_{v+1}, \dots, x_{v+n+1}; f] &= \frac{1}{(n+1)! h^{n+1}} \Delta_h^{n+1} f(a + v h) \\ &= \frac{1}{(n+1)! h^{n+1}} \sum_{\mu=0}^{n+1} (-1)^{n+1-\mu} \binom{n+1}{\mu} f(a + v + \mu h). \end{aligned}$$

La structure de la fonction (3) dépend de deux importantes notions: A. La notion de fonctions convexes d'ordre n . B. La notion de fonctions spline.

Dans la suite nous nous proposons de faire quelques considérations sur ces deux notions.

A. La notion de fonctions convexes d'ordre n

4. La fonction $f: [a, b] \rightarrow R$ est dite convexe, non-concave, polynômiale, non-convexe respectivement concave d'ordre n (sur $[a, b]$) suivant que les différences divisées d'ordre $n+1$ sur tout groupe de $n+2$ points, ou nœuds, distincts, de la fonction f , qui sont toutes $>$, $\geq$, $=$, $\leq$ respectivement < 0 . Une fonction vérifiant l'une de ces propriétés est dite une fonction d'ordre n .

L'entier n est ≥ -1 . Pour $n = -1$ nous avons les fonctions de signe invariable: positive, non-négatives, nulles (la fonction identiquement nulle), non-positives, respectivement négatives. Pour $n = 0$ nous avons les fonctions monotones: croissantes, non-décroissantes, constantes, non-croissantes respectivement décroissantes. En-

fin pour $n=1$ nous avons les fonctions convexes, non-concaves, linéaires, non-convexe respectivement concaves habituelles.

B. La notion de fonction spline

5. Supposons $n \geq 1$. Alors toute combinaison linéaire de polynômes de degré n et d'un nombre fini de fonctions de la forme (4) est ce que nous avons appelé autrefois une fonction élémentaire d'ordre n [5]. Aujourd'hui on les appelle des fonctions spline.

Une fonction spline est donc de la forme

$$(5) \quad P(x) + \sum_{v=1}^m c_v \varphi_{n+1, \lambda_v}(x)$$

où P est un polynôme de degré n , les λ_v sont des points donnés tel que $a < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_m < b$ et les c_v sont des constantes quelconques.

La fonction (5) est continue et à différence divisée d'ordre n bornée. Si $n > 1$ elle a une dérivée continue d'ordre $n-1$ sur $[a, b]$. La fonction spline (5) est formée par un nombre fini de morceaux de polynômes de degré n qui ont un ordre maximum de raccordement sans pour cela se réduire à un polynôme de degré n . Il existe aussi des fonctions formées par de morceaux de polynômes de degré n qui ne se raccordent pas aussi complètement, qui, par exemple, ne sont pas continues ou qui, pour $n > 1$ sont continues mais non pas dérivables, etc. On peut dire que pour un n donné les fonctions (5) sont les splines les plus simples.

6. Les fonctions spline ont été rencontrées depuis longtemps sans être mis explicitement en évidence. Telles sont les sois-dites „noyaux brisés“ ou fonctions de Green qui interviennent dans la résolution de certains problèmes aux limites pour les équations différentielles linéaires. Il est impossible de citer ici tous les auteurs qui, sous une forme ou une autre, ont utilisé les splines. Je me contenterai de citer G. Peano [3], J. Radon [7], G. Kowalewski [1], R. v. Mises [2]. Dans le dernier temps les fonctions spline ont été étudiées systématiquement par I. J. Schoenberg et ses élèves. Ces auteurs ont obtenu entre autres, de nombreux résultats remarquables concernant certains problèmes d'approximation et d'optimisation pour les formules de quadratures. On peut consulter les travaux du Symposium de Wisconsin [8].

7. Entre les fonctions convexes d'ordre supérieur et les fonctions spline de la forme (5) il y a une très étroite liaison. Nous avons la propriété suivante:

Les conditions $c_v \geq 0$, $v=1, 2, \dots, m$, sont nécessaires et suffisantes pour que la fonction (5) soit non-concave d'ordre n .

En reprenant les fonctions spline de la forme (3), où les x_v sont les points équidistants (1) et en choisissant convenablement le polynôme $Q_m(x)$ pour chaque valeur de m , nous obtenons le théorème d'approximation [5, 6]:

Pour $n \geq 1$, toute fonction $f: [a, b] \rightarrow R$ continue et d'ordre n est indéfiniment et uniformément approximable par des fonctions spline de la forme (3), d'ordre n . Autrement: Toute fonction $f: [a, b] \rightarrow R$, continue et non-concave d'ordre n est la limite d'une suite uniformément convergente de fonctions de la forme (5), avec des coefficients c_v non-négatifs.

Ce théorème a de nombreuses applications. Il peut fournir, par exemple, un critère pour la simplicité du reste de certaines formules linéaires d'approximation de l'Analyse.

C. Généralisation des fonctions spline

8. Ceci étant, nous avons proposé une généralisation des fonctions spline.

Définition 1. Si $E \subseteq R$, la fonction $f: E \rightarrow R$ est dite d'ordre n par segments (sur E) si on peut décomposer l'ensemble E en un nombre fini de sous-ensembles consécutifs

$$(6) \quad E_1, E_2, \dots, E_s$$

de manière que sur chacun la fonction f soit d'ordre n .

On dit que (6) est une décomposition de E en sous-ensembles consécutifs si:

$$8.1. \Delta \subset E_\nu \subseteq E, \nu = 1, 2, \dots, s \ (\Delta = \text{l'ensemble vide})$$

$$8.2. \bigcup_{\nu=1}^s E_\nu = E$$

$$8.3. \forall_{\nu} \forall_{x', x''} x' \in E_\nu, x'' \in E_{\nu+1} \Rightarrow x' < x''.$$

L'entier n est ≥ -1 .

Pour une telle fonction il peut exister plusieurs décompositions (6) vérifiant la propriété de la définition précédente.

Le nombre s de ces décompositions a un minimum h qui s'appelle la caractéristique de la fonction f , d'ordre n par segments. Lorsque $h=1$ la fonction se réduit à une fonction d'ordre n . En général si la caractéristique est h on peut dire que la fonction f change $(h-1)$ -fois d'allure de convexité d'ordre n (sur E). En particulier, si $n=-1$ cela signifie que la fonction change $(h-1)$ -fois de signe sur E .

9. Soit maintenant n un entier ≥ -1 et

$$(7) \quad (x_\nu)_{\nu=1}^m \quad (m \geq n+2)$$

une suite croissante de E (les x_ν ne sont pas nécessairement équidistants). Considérons la suite correspondante

$$(8) \quad ([x_\nu, x_{\nu+1}, \dots, x_{\nu+n+1}; f])_{\nu=1}^{m-n-1}$$

des différences divisées d'ordre $n+1$ de f sur des points consécutifs de la suite (7).

Les fonctions d'ordre $(n|k)$ sont alors définies de la manière suivante:

Définition 2. La fonction $f: E \rightarrow R$ est dite d'ordre $(n|k)$ si pour toutes les suites (finies) croissantes (7) de E , le nombre maximum des variations de signes des suites correspondantes (8) est égal à k .

n et k sont des entiers, $k \geq 0$, $n \geq -1$.

On a $k=0$ si et seulement si la fonction f est d'ordre n .

Pour plus de détails voir mes travaux antérieurs [4].

10. L'ensemble des fonctions d'ordre n par segments et l'ensemble des fonctions d'ordre $(n|k)$ pour les diverses valeurs possibles de k , coïncident. En effet [4];

Une fonction d'ordre $(n|k)$ est une fonction d'ordre n par segments et une fonction d'ordre n par segments est une fonction d'ordre $(n|k)$ pour un k convenable.

Si une fonction d'ordre n par segments a sa caractéristique égale à h , alors elle est une fonction d'ordre $(n|k)$ où $h-1 \leq k \leq (h-1)(n+2)$.

La propriété bien simple que toute fonction monotone change de signe au plus une fois et que toute fonction convexe habituelle change de signe au plus deux fois se trouve généralisée par la propriété suivante:

Toute fonction d'ordre $(n|k)$ est au plus d'ordre $(n-i|k+i)$ pour $i=1, 2, \dots, n+1$.

On dit que la fonction est au plus d'ordre $(n|k)$ si elle est d'ordre $(n|k')$ avec $k' \leq k$.

11. Toutes les propriétés des fonctions d'ordre n par segments et des fonctions d'ordre $(n|k)$ n'ont pas encore été étudiées.

Pour donner des exemples voici quelques nouvelles propriétés de ces fonctions.

Si la fonction f est d'ordre $(n|k)$ sur l'intervalle $[a, b]$ et si $k \leq n$, cette fonction est bornée sur tout intervalle $[a_1, b_1]$ ou $a < a_1 < b_1 < b$.

La démonstration est bien simple. Soit $x \in [a_1, b_1]$ et les points fixes $x_v, x'_v, v=1, 2, \dots, n+1$ tel que $x_1 < x_2 < \dots < x_{n+1} < a_1 < b_1 < x'_1 < x'_2 < \dots < x'_{n+1}$. Alors on peut trouver deux termes consécutifs de la suite

$$([x'_1, x'_2, \dots, x'_{v-1}, x_v, x_{v+1}, \dots, x_{n+1}, x; f])_{v=1}^{n+2}$$

qui soient du même signe. Si, pour fixer les idées, les différences divisées

$$\begin{aligned} & [x'_1, x'_2, \dots, x'_{v-1}, x_v, x_{v+1}, \dots, x_{n+1}, x; f] \\ &= \frac{f(x)}{(x-x'_1)(x-x'_2) \dots (x-x'_{v-1})(x-x_v)(x-x_{v+1}) \dots (x-x_{n+1})} \\ &+ \left[x'_1, x'_2, \dots, x'_{v-1}, x_v, x_{v+1}, \dots, x_{n+1}; \frac{f(t)}{t-x} \right], \\ & [x'_1, x'_2, \dots, x'_v, x_{v+1}, x_{v+2}, \dots, x_{n+1}, x; f] \\ &= \frac{f(x)}{(x-x'_1)(x-x'_2) \dots (x-x'_v)(x-x_{v+1})(x-x_{v+2}) \dots (x-x_{n+1})} \\ &+ \left[x'_1, x'_2, \dots, x'_v, x_{v+1}, x_{v+2}, \dots, x_{n+1}; \frac{f(t)}{t-x} \right] \end{aligned}$$

sont du même signe, une délimitation convenable de $|f(x)|$ sur $[a_1, b_1]$ s'en suit. Dans les égalités précédentes on a désigné par t la variable de la fonction dont on considère les différences divisées.

On peut aussi démontrer de la même manière que:

Si la fonction f est d'ordre $(n|k)$ sur l'intervalle $[a, b]$ et si $k \leq n-r-1$, cette fonction a une dérivée continue d'ordre r (≥ 0) sur tout intervalle $[a_1, b_1]$ où $a < a_1 < b_1 < b$.

La démonstration consiste à montrer que la fonction est à $(r+1)$ -ième différence divisée, bornée sur $[a_1, b_1]$.

Pour $r=0$ la propriété est équivalente à la continuité de la fonction f .

LITTERATURE

1. G. Kowalewski. Interpolation und genäherte Quadratur. Leipzig, 1932.
2. R. v. Mises. Über allgemeine Quadraturformeln. *J. reine u. angew. Math.*, 174, 1935, 56—67.
3. G. Peano. Resto nelle formule di quadratura, espresso con un integrale definite. *Rend. Lincei*, 22, 1913, 562—569.
4. T. Popoviciu. Notes sur les généralisations des fonctions convexes d'ordre supérieur. Première note: *Disquisitiones Math. et Phys.*, 1, 1940, 35—42. Seconde note: *Bull Acad. Roumaine*, 22, 1940, 473—477. Troisième note: *ibid.*, 24, 1942, 409—416.
5. T. Popoviciu. Notes sur les fonctions convexes d'ordre supérieur (IX). *Bull Math. Soc. Roumaine sci.*, 43, 1942, 85—141.
6. T. Popoviciu. Sur le reste dans certaines formules linéaire d'approximation de l'analyse. *Mathematica*, 1 (24), 1959, 95—142.
7. I. Radon. Restausdrücke bei Interpolations- und Quadraturformeln durch bestimmte Integrale. *Monatshefte f. Math. u. Phys.*, 42, 1935, 389—396.
8. I. J. Schoenberg. (Ed.) Approximation with Special Emphasis on Spline Functions, 1969.

Institutul de Calcul
Cluj Roumanie

Reçu le 28. 4. 1973