SUR CERTAINES FORMULES DE LA MOYENNE DU CALCUL DIFFÉRENTIEL

PAR

acad. TIBERIU POPOVICIU

(România)

1. Cette première communication est dédiée à la mémoire de Dimitrie Pompeiu. Notre illustre prédécesseur D. Pompeiu, en dehors de ses résultats pleins d'originalité qu'il a obtenus, savait nous montrer comment des faits, en apparence mineurs, peuvent aboutir à des théories remarquables.

D. Pompeiu a beaucoup insisté sur la célèbre formule des accroissements finis

$$f(b) - f(a) = (b - a) f'(\xi), \ \xi \in]a,b[\tag{1}$$

(f continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$), en suggérant divers problèmes et généralisations dont plusieurs ont été résolus par des mathématiciens roumains ou étrangers.

En particulier, il s'est intéressé à la position du point ξ dans l'intervalle $]a, b[$ lorsque la fonction appartient à certains ensembles particuliers, tels que, par exemple, l'ensemble des polynômes d'un degré donné.

Je ne veux par présenter un historique des problèmes dits de « l'intervalle de contraction », mais seulement signaler un résultat que j'ai obtenu récemment et qui nous montre que les problèmes soulevés par D. Pompeiu peuvent encore être beaucoup généralisés.

2. Considérons une fonctionnelle linéaire (additive et homogène) $R(f)$, définie sur un ensemble linéaire S de fonctions f réelles, définies et continues sur un intervalle (de longueur non nulle) I de l'axe réel. Nous supposerons que S contienne tous les polynômes.

Je rappelle que l'entier $m \geqslant -1$ défini par la propriété que

$$R(1) = R(x) = \ldots = R(x^m) = 0, \ R(x^{m+1}) \neq 0$$

(pour $m = -1$, seulement $R(1) \neq 0$) est appelé le *degré d'exactitude* de $R(f)$ et que la fonctionnelle linéaire $R(f)$ est dite *de la forme simple* si pour tout $f \in S$ on a

$$R(f) = K \ [\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{m+2}; f] \tag{2}$$

où K est un nombre $\neq 0$ et indépendant de la fonction f et ξ_i sont $m + 2$ points *distinct* de I qui dépendent, en général, de la fonction f. D'ailleurs, si $m \geqslant 0$ on peut toujours prendre les points ξ_i, à l'intérieur de I.

Dans le second membre de (2) figure aussi la *différence divisée* de la fonction f sur les nœuds $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{m+2}$ et dont la définition est bien connue.

En particulier, si $m \geqslant 0$, $R(f)$ est de degré d'exactitude m, de la forme simple et si $f \in S$ a une dérivée $f^{(m+1)}$ d'ordre $m+1$ à l'intérieur de I, on a

$$R(f) = R(x^{m+1}) \frac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!} \tag{3}$$

où $\xi \in \operatorname{int} I$.

La formule classique de Cauchy

$$[x_1, x_2, \ldots, x_{m+2}; f] = \frac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!} \tag{4}$$

où $\min_i (x_i) \leqq \xi \leqq \max_i (x_i)$ et qui généralise la formule (1) est à son tour un cas particulier de la formule (3).

3. À propos de la formule (2) on peut obtenir des résultats du « type Pompeiu ».

Supposons que les hypothèses suivantes sont vérifiées.

1. *m est un entier non négatif.*

2. *S est formé par toutes les fonctions f ayant une dérivée continue d'ordre $m+1$ sur l'intervalle borné et fermé $[a, b]$.*

3. *$R(f)$ est une fonctionnelle linéaire définie sur S, de degré d'exactitude m, de la forme simple et bornée par rapport à la norme*

$$\sum_{i=0}^{k} \max_{x \in [a,b]} |f^{(i)}(x)|$$

pour un entier k tel que $0 \leqq k \leqq m+1$.

4. *Le point c est donné par*

$$R(x^{m+2}) - (m+2) R(x^{m+1}) c = 0$$

et on a $a < c < b$.

5. *La fonction f est non concave d'ordre $m+1$ et non concave d'ordre $m+2$.*

Alors la formule de la moyenne (3) *est vérifiée pour un* $\xi \in [c, b]$.

Dans le cas de la formule de Cauchy (4) on a $c = \frac{1}{m+2} \sum_{i=1}^{m+2} x_i$.

Pour la démonstration et autres propriétés analogues voir mes travaux antérieurs [2].

Certaines restrictions imposées à la dérivée $f^{(m+1)}$ et à la position du point ξ proviennent de la méthode de démonstration que nous avons employée et qui certainement peuvent être levées.

4. D. Pompeiu a aussi démontré, par analogie avec la formule classique (1), que nous avons

$$\frac{x_2 f(x_1) - x_1 f(x_2)}{x_2 - x_1} = f(\xi) - \xi f'(\xi) \tag{5}$$

si x_1, x_2, ξ et la fonction f satisfont (pour $n = 1$) aux conditions sous lesquelles la formule (6) a lieu.

Un ancien étudiant, Carol Szász, membre du cercle de l'Analyse à l'Université de Cluj, a étendu le résultat de D. Pompeiu en démontrant la propriété suivante.

Soit C le coefficient de x^r dans le polynôme d'interpolation de Lagrange-Hermite $L(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; f)$ $(n > 0,\ 0 \leqq r \leqq n)$ sur les nœuds $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ supposés non tous confondus et relatif à la fonction f. Si f est une fonction continue sur l'intervalle positif I $(x \in I \Rightarrow x > 0)$ et a une dérivée $f^{(n)}$ d'ordre n sur int I,

alors nous avons

$$C = \frac{1}{r!} \sum_{i=r}^{n} \frac{(-\xi)^{i-r}}{(i-r)!} f^{(i)}(\xi) \tag{6}$$

où ξ appartient à l'intérieur du plus petit intervalle contenant les points $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$.

On considère le polynôme de Lagrange-Hermite ordonné suivant les puissances successives de x et l'intervalle I est de longueur non nulle.

5. La propriété précédente peut être généralisée de la manière suivante.

Si les conditions suivantes sont vérifiées :

1. *$x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ sont $n + 1$ $(n > 0)$ points non tous confondus de l'intervalle I.*

2. *f est une fonction continue sur I et a une dérivée $n^{\text{ième}}$ $f^{(n)}$ sur int I.*

3. *Nous désignons, pour simplifier, par L le polynôme d'interpolation $L(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; f)$ et par*

$$L_\xi = L(\underbrace{\xi, \xi, \ldots, \xi}_{n+1}; f) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(x-\xi)^i}{i!} f^{(i)}(\xi)$$

le même polynôme pour $x_1 = x_2 = \ldots = x_{n+1} = \xi$.

4. *$y_1, y_2, \ldots, y_{r+1}$ $(0 \leqq r \leqq n)$ sont $r + 1$ points de l'axe réel vérifiant les inégalités*

$$\max(y_1, y_2, \ldots, y_{r+1}) < \min(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) \tag{7}$$

$$(\text{ou } \max(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) < \min(y_1, y_2, \ldots, y_{r+1})).$$

Alors il existe un point ξ à l'intérieur du plus petit intervalle qui contient les points $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$, tel que l'on ait

$$[y_1, y_2, \ldots, y_{r+1}; L] = [y_1, y_2, \ldots, y_{r+1}; L_\xi]. \tag{8}$$

Les points $y_1, y_2, \ldots, y_{r+1}$ ne sont pas nécessairement distincts.

Pour $y_1 = y_2 = \ldots = y_{r+1} = 0$ la formule (8) revient à la formule (6) et pour $r = n$ à la formule (4) de Cauchy.

6. Quoique les formules (6) et (8) soient des cas particuliers d'autres formules beaucoup plus générales dues à E. Popoviciu [1], elles présentent de l'intérêt étant liées à divers développements du polynôme de Lagrange-Hermite. On peut donner une démonstration élémentaire directe de la formule (8). Nous pouvons suivre la méthode qui nous à permis autrefois d'établir diverses formules de la moyenne des différences divisées.

On peut supposer $x_1 < x_2 < \ldots < x_{n+1}$. Il existe alors un $\xi \in]x_1, x_{n+1}[$ tel que tout voisinage de ξ contienne les points $x_1' < x_2' < \ldots < x_{n+1}'$ tels que

$$[y_1, y_2, \ldots, y_{r+1}; L(x_1', x_2', \ldots, x_{n+1}'; f)] =$$

$$= [y_1, y_2, \ldots, y_{r+1}; L(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; f)].$$

La propriété résulte de la formule de la moyenne

$$[y_1, y_2, \ldots, y_{r+1}; L(x_1, x_2, \ldots, x_{s-1}, x_{s+1}, \ldots, x_{n+2}; f)] =$$

$$= A\,[y_1, y_2, \ldots, y_{r+1}; L(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; f)] +$$

$$+ B\,[y_1, y_2, \ldots, y_{r+1}; L(x_2, x_3, \ldots, x_{n+2}; f)]$$

où $x_1 < x_2 < \ldots < x_{n+2}$, $1 < s < n + 2$ et A, B sont des coefficients positifs, indépendants de la fonction f et $A + B = 1$.

La positivité des coefficients A, B et la formule $A + B = 1$ résultent de leurs valeurs explicites,

$$A = \frac{\left[y_1, y_2, \ldots, y_{r+1}; \dfrac{(x_r - x_1)\,\omega(x)}{(x - x_1)(x - x_r)}\right]}{\left[y_1, y_2, \ldots, y_{r+1}; \dfrac{(x_{n+2} - x_1)\,\omega(x)}{(x - x_1)(x - x_{n+2})}\right]}$$

$$B = \frac{\left[y_1, y_2, \ldots, y_{r+1}; \dfrac{(x_{n+2} - x_r)\,\omega(x)}{(x - x_r)(x - x_{n+2})}\right]}{\left[y_1, y_2, \ldots, y_{r+1}; \dfrac{(x_{n+2} - x_1)\,\omega(x)}{(x - x_1)(x - x_{n+2})}\right]}$$

où $\omega(x) = \prod_{i=1}^{n+2} (x - x_i)$.

À cause de l'hypothèse (7) les quatre différences divisées qui interviennent ici sont différentes de 0 et du même signe (à cause de la convexité où la concavité d'ordre $r - 1$ des fonctions qui interviennent.

BIBLIOGRAPHIE

1. Popoviciu, Elena, *Teoreme de medie din analiza matematică şi legătura lor cu teoria interpolării*, 1972.
2. Popoviciu, Tiberiu, *Asupra unor formule de medie*. Revista de analiză numerică şi teoria aproximaţiei, 1972, **1**, 97–107.