

LIGNES POLYGONALES INSCRITES ET CIRCONSCRITES À UN ARC CONVEXE

PAR

TIBERIU POPOVICIU

Roumanie

§ 1. QUESTIONS PRÉLIMINAIRES

1. G. Tzitzéica a été non seulement un savant de prestige par ses recherches remarquables en géométrie, mais aussi un éminent professeur qui a contribué largement à l'éducation de nombreuses générations de mathématiciens de Roumanie. Collaborateur actif à la revue « *Gazeta Matematică* » à laquelle beaucoup d'entre nous devons notre initiation en mathématiques, G. Tzitzéica a écrit plusieurs articles et notes, sur des sujets « élémentaires », mais toujours intéressants et bien inspirés.

2. Dans une petite note G. Tzitzéica propose [5] une démonstration élémentaire de l'inégalité

$$(1) \quad \sin x > \frac{2x}{\pi} \text{ où } 0 < x < \frac{\pi}{2},$$

basée sur la remarque selon laquelle

$$(2) \quad \text{arc } MAM' > \text{arc } MOM'$$

où O est l'origine des arcs sur le cercle trigonométrique C , M , M' sont les extrémités des arcs x , $-x$ respectivement et l'arc MAM' est la longueur du demi-cercle décrit sur MM' comme diamètre (voir fig. 1).

D'après D. S. Mitrinović l'inégalité (1) est due à Jordan [2].

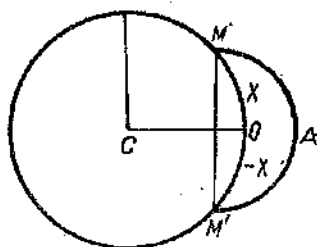


Fig. 1

La démonstration de l'inégalité (2), qui n'est pas donnée par G. Tzitzéica, nous suggère une propriété plus générale relative à deux arcs convexes plans, l'un enveloppant l'autre. En effet, les arcs de cercles MAM' et MOM' sont bien convexes et le premier enveloppe le second. Dans la suite nous mettons en évidence la propriété selon laquelle la longueur de l'arc enveloppant est plus grande que celle de l'arc enveloppé.

3. Nous commencerons par étudier quelques relations entre les éléments d'un triangle, relations que nous utiliserons plus loin.

Considérons un triangle ABC dont les sommets, dans le plan rapporté à deux axes rectangulaires Oxy , sont les points $B(x_1, f(x_1))$, $A(x_2, f(x_2))$, $C(x_3, f(x_3))$. Nous allons supposer que les abscisses sont numérotées dans l'ordre $x_1 < x_2 < x_3$. Les ordonnées sont les valeurs respectives d'une fonction f définie sur les points x_1, x_2, x_3 . Dans la suite interviendrons seulement des triangles dans cette situation, mais il est facile de voir que les résultats que nous obtenons peuvent être transposés à un triangle quelconque du plan, en choisissant convenablement les axes de coordonnées.

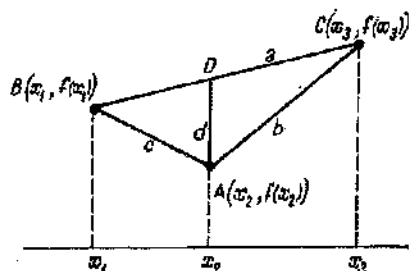


Fig. 2

Désignons par a, b, c , les longueurs des côtés opposés, respectivement aux sommets A, B, C et par d la longueur du segment AD où D est le point où l'ordonnée du point A coupe le côté BC (D est compris entre B et C).

La longueur du segment de droite d'extrémités $(x', f(x'))$, $(x'', f(x''))$ est égale à $\sqrt{(x' - x'')^2 + (f(x') - f(x''))^2} = |x' - x''| \sqrt{1 + [x', x''; f]^2}$ où nous avons désigné par

$$(3) \quad [x', x''; f] = \frac{f(x'') - f(x')}{x'' - x'}$$

la différence divisée (du premier ordre) de la fonction f sur les points (ou nœuds) x', x'' .

Revenons alors au triangle ABC et posons, pour simplifier les notations, $\alpha = [x_1, x_2; f]$, $\beta = [x_2, x_3; f]$, $\gamma = [x_1, x_3; f]$. Nous avons alors

$$(4) \quad \begin{aligned} a &= (x_3 - x_1) \sqrt{1 + \gamma^2}, \quad b = (x_3 - x_2) \sqrt{1 + \beta^2}, \\ c &= (x_2 - x_1) \sqrt{1 + \alpha^2}. \end{aligned}$$

À l'aide de ces formules nous pouvons établir quelques inégalités que nous emploierons plus loin.

4. Les inégalités triangulaires $b - c < a \leq b + c$ sont équivalentes aux inégalités

$$(5) \quad (b - c)^2 < a^2 \leq (b + c)^2$$

et résultent des formules

$$(6) \quad (b+c)^2 - a^2 = 2(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)(\sqrt{1+\alpha^2}\sqrt{1+\beta^2} - 1 - \alpha\beta)$$

$$(7) \quad a^2 - (b-c)^2 = 2(x_2 - x_1)(x_3 - x_2)(\sqrt{1+\alpha^2}\sqrt{1+\beta^2} + 1 + \alpha\beta).$$

Elles s'obtiennent de (4) et de la formule de la moyenne des différences divisées

$$(8) \quad \gamma = \frac{(x_2 - x_1)\alpha + (x_3 - x_2)\beta}{x_3 - x_1}.$$

Si nous remarquons que nous avons l'inégalité $(1+\alpha^2)(1+\beta^2) \geq (1+\alpha\beta)^2$, où l'égalité a lieu si et seulement si $\alpha = \beta$, nous déduisons

$$\sqrt{(1+\alpha^2)(1+\beta^2)} - 1 - \alpha\beta \geq 0, \sqrt{(1+\alpha^2)(1+\beta^2)} + 1 + \alpha\beta \geq 0$$

et compte tenu de (6) et (7) les inégalités (5) en résultent.

Remarquons, en passant, que nous avons aussi $(1+\alpha^2)(1+\beta^2) \geq (1-\alpha\beta)^2$ où l'égalité a lieu si, et seulement si, $\alpha + \beta = 0$. Il en résulte que

$$(9) \quad \sqrt{(1+\alpha^2)(1+\beta^2)} + 1 + \alpha\beta \geq 2,$$

inégalité qui sera utilisée plus loin.

Des inégalités (5) il résulte aussi

$$(10) \quad (b+c)^2 \leq \left(1 + \frac{(b+c)^2 - a^2}{a^2 - (b-c)^2}\right) a^2$$

dont la vérification peut être laissée au lecteur*.

Tenant compte de (6), (7) et (9) nous déduisons

$$\begin{aligned} \frac{(b+c)^2 - a^2}{a^2 - (b-c)^2} &= \frac{\sqrt{(1+\alpha^2)(1+\beta^2)} - 1 - \alpha\beta}{\sqrt{(1+\alpha^2)(1+\beta^2)} + 1 + \alpha\beta} = \\ &= \frac{(\alpha - \beta)^2}{(\sqrt{(1+\alpha^2)(1+\beta^2)} + 1 + \alpha\beta)^2} \leq \frac{(\alpha - \beta)^2}{4}. \end{aligned}$$

* L'inégalité revient à $b+c \leq \frac{a}{\sin \frac{A}{2}}$, dont la démonstration trigonométrique

est immédiate et revient à son tour à $\cos \frac{B-C}{2} \leq 1$.

Remarquons que $1 + \frac{(\alpha - \beta)^2}{4} \leq \left(1 + \frac{|\alpha - \beta|}{2}\right)^2$ et alors de (10) nous déduisons l'inégalité

$$(11) \quad b + c \leq \left(1 + \frac{|\alpha - \beta|}{2}\right)a.$$

5. Nous avons

$$(12) \quad a^2 - b^2 - c^2 = 2(x_2 - x_1)(x_3 - x_2)(1 + \alpha\beta).$$

Si nous remarquons que l'ordonnée du point D est égale à $f(x_1) + (x_2 - x_1)\gamma$ ou $f(x_3) + (x_3 - x_2)\gamma$ et si nous tenons compte de (8) nous obtenons

$$d^2 = \frac{(x_2 - x_1)^2 (x_3 - x_2)^2}{(x_3 - x_1)^2} (\alpha - \beta)^2.$$

Compte tenu de (4) et (8) nous en déduisons

$$(13) \quad d^2 + \frac{(x_2 - x_1)(x_3 - x_2)}{(x_3 - x_1)^2} a^2 = \frac{(x_3 - x_1)b^2 + (x_2 - x_2)c^2}{x_3 - x_1}.$$

Le second membre est une moyenne arithmétique (pondérée) de b^2 et de c^2 et il en résulte que

$$(14) \quad d < \max(b, c).$$

Si $|\alpha - \beta| \leq \sqrt{2}$ nous avons $1 + \alpha\beta \geq 1 - \frac{(\alpha - \beta)^2}{2} = \left(1 - \frac{|\alpha - \beta|}{\sqrt{2}}\right)\left(1 + \frac{|\alpha - \beta|}{\sqrt{2}}\right) \geq 1 - \frac{|\alpha - \beta|}{\sqrt{2}} \geq 0$ donc $1 + \alpha\beta \geq 0$ et alors de (12) on déduit que $b^2 + c^2 \leq a^2$ d'où $\max(b, c) \leq a$. Compte tenu de (14) nous déduisons le

LEMME 1. Si nous avons $|\alpha - \beta| \leq \sqrt{2}$ on a l'inégalité $d < a$.
Nous utiliserons dans le § 4 de ce travail cette propriété.

Remarque 1. La condition $1 + \alpha\beta \geq 0$ est équivalente au fait que l'angle A du triangle ABC n'est pas aigu, donc que $A \geq 90^\circ$.

Remarque 2. Si nous considérons aussi les différences divisées du second ordre de la fonction f , définies par

$$(15) \quad [w', w'', w'''; f] = \frac{[w'', w'''; f] - [w', w''; f]}{w''' - w'},$$

la longueur d du segment AD est égale $(x_2 - x_1)(x_3 - x_2) \cdot |[x_1, x_2, x_3; f]|$ ou bien est donnée par la formule $d = \frac{2S}{\omega_3 - \omega_1}$, S étant l'aire du triangle ABC .

§ 2. QUELQUES PROPRIÉTÉS DES FONCTIONS POLYGONALES

6. Considérons un intervalle borné et fermé $[a, b]$ ($a < b$) sur l'axe réel. Soit $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ ($n \geq 1$) une division de l'intervalle $[a, b]$. Une fonction $P : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ qui est continue et se réduit sur chacun des intervalles partiels $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \dots, n$ à un polynôme de degré 1 s'appelle une *fonction polygonale* et son graphique est une *ligne polygonale*. Les points x_i , $i = 0, 1, \dots, n$ sont les *nœuds* et les points $P_i(x_i, P(x_i))$ sont les *sommets* de cette fonction ou ligne polygonale. Dans la suite nous emploierons, selon les circonstances, la dénomination de fonction polygonale ou de ligne polygonale dans le sens de fonction polygonale. La fonction polygonale P est complètement déterminée par ses valeurs aux nœuds x_i . Si ces valeurs sont les valeurs prises par une fonction f , nous désignerons la fonction polygonale par

$$(16) \quad P = P(x_0, x_1, \dots, x_n; f)$$

en mettant en évidence les nœuds et la fonction f . La fonction polygonale (16) est une fonction interpolatrice sur les nœuds x_i et relative à la fonction f , puisqu'on a

$$P(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Les segments de droites $P_{i-1} P_i$ qui relient deux sommets consécutifs et qui sont les graphiques des restrictions sur les intervalles $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \dots, n$ de P sont les *côtés* de la fonction ou de la ligne polygonale P . La longueur du côté $P_{i-1} P_i$ est bien déterminée et est égale à

$$\sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2} = (x_i - x_{i-1}) \sqrt{1 + [x_{i-1}, x_i; f]^2}.$$

Nous désignerons par $l(P)$ la longueur de la fonction polygonale P , qui est, par définition, égale à la somme des longueurs de ses côtés.

Remarquons que la restriction de la fonction polygonale P sur un sous-intervalle fermé de $[a, b]$ est encore une fonction polygonale. En particulier, si c est un point intérieur de $[a, b]$, la restriction Q de P sur $[a, c]$ et la restriction R de P sur $[c, b]$ sont des fonctions polygonales, le dernier nœud de la première coïncidant avec le premier nœud de la seconde. Nous avons alors la propriété de l'*additivité de la longueur*

$$(17) \quad l(P) = l(Q) + l(R).$$

Réciproquement, si $Q : [a, c] \rightarrow \mathbb{R}$, $R : [c, b] \rightarrow \mathbb{R}$, où $a < c < b$, sont des fonctions polygonales et si $Q(c) = R(c)$, alors la fonction $P : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, où

$$(18) \quad P(x) = \begin{cases} Q(x) & \text{pour } x \in [a, c] \\ R(x) & \text{pour } x \in [c, b] \end{cases}$$

est une fonction polygonale pour laquelle la formule d'additivité (17) est vérifiée.

Il existe d'ailleurs d'autres formules d'additivité. Nous utiliserons celles qu'on déduit de (17) en la répétant un nombre fini de fois.

Rappelons encore que nous avons appelé autrefois les fonctions polygonales des fonctions élémentaires d'ordre $n=1$ [3]. Aujourd'hui on les appelle des fonctions « spline ». Nous pouvons généraliser les fonctions polygonales de diverses manières. Ou bien en prenant un ensemble de définition plus général qu'un intervalle ou bien en définissant des fonctions polygonales ayant une infinité de nœuds (voir par exemple [4]). Nous n'utiliserons pas ici de telles fonctions.

7. Nous supposons qu'on connaît les propriétés des fonctions convexes et des fonctions non concaves (d'ordre 1). Une fonction $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ réelle, d'une variable réelle est dite *convexe* respectivement *non concave* si sa différence divisée d'ordre 2 est positive, respectivement non négative, donc si l'expression (15) est > 0 , respectivement ≥ 0 pour tout groupe de 3 points distincts x', x'', x''' de E . Pour d'autres définitions et propriétés de ces fonctions on peut consulter mon cours d'Analyse [4].

La définition et les propriétés des différences divisées (d'ordre 1 et 2) (3) et (15) sont bien connues. Dans ce travail nous utiliserons certaines de ces propriétés, le plus souvent, sans les spécifier expressément.

8. Rappelons tout d'abord la propriété exprimée par le

LEMME 2. *Pour que la fonction polygonale (16), définie sur l'intervalle $[a, b]$ soit non concave, il faut et il suffit que sa restriction sur l'ensemble $\{x_i\}_{i=0}^n$ de ses nœuds soit non concave.*

La propriété résulte immédiatement de la formule

$$(19) \quad P(x_0, x_1, \dots, x_n; f) = f(x_0) + [x_0, x_1; f](x - x_0) + \\ + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{x_{i+1} - x_{i-1}}{2} [x_{i-1}, x_i, x_{i+1}; f] (|x - x_i| + x - x_i).$$

La condition du lemme 2 est équivalente à la propriété selon laquelle la suite $([x_{i-1}, x_i; f])_{i=1}^n$ (des pentes) est non décroissante et à la propriété (si $n > 1$) selon laquelle la suite $([x_{i-1}, x_i, x_{i+1}; f])_{i=1}^{n-1}$ des différences divisées successives du second ordre est non négative.

Si $n = 1$, au second membre de la formule (19) ne figurent que les deux premiers termes.

Désignons par α_i l'angle du vecteur $P_{i-1}P_i$ avec l'axe Ox . Nous avons alors $\alpha_i = \arctg [x_{i-1}, x_i; f]$, $-\frac{\pi}{2} < \alpha_i < \frac{\pi}{2}$, $i = 1, 2, \dots, n$. La

différence $\alpha_{i+1} - \alpha_i$ ($1 \leq i \leq n-1$) est l'angle extérieur du sommet P_i de la ligne polygonale P . La condition du lemme 2 est alors équivalente à la propriété selon laquelle la suite $(\alpha_i)_{i=1}^n$ (des angles) est non décroissante et à la propriété (si $n > 1$) selon laquelle la suite $(\alpha_{i+1} - \alpha_i)_{i=1}^{n-1}$ des angles extérieurs est non négative.

9. Nous allons maintenant démontrer le

LEMME 3. *Soient P, Q deux fonctions polygonales définies sur le même intervalle $[a, b]$ ($a < b$) et qui vérifient les conditions suivantes :*

1. $P(a) = Q(a)$, $P(b) = Q(b)$.
2. P, Q sont non concaves.
3. On a

$$(20) \quad P \neq Q \text{ et } \forall x Q(x) \leq P(x).$$

Alors, entre les longueurs de P et Q nous avons l'inégalité

$$(21) \quad l(P) < l(Q).$$

Si les conditions 1, 2, 3 du lemme 3 sont vérifiées et si x', x'' , ou $x' < x''$ sont deux nœuds consécutifs de la fonction Q , de $P(x') = Q(x')$, $P(x'') = Q(x'')$ il résulte nécessairement que $P(x) = Q(x)$ sur tout l'intervalle $[x', x'']$. Des conditions 1, 2, 3 il résulte donc que sur au moins l'un des nœuds x' de Q on a $Q(x') < P(x')$. Ceci étant, on peut remarquer que du lemme 3 il résulte aussi le

LEMME 3'. Si P, Q sont deux fonctions polygonales définies sur le même intervalle $[a, b]$ ($a < b$) et qui vérifient les conditions 1, 2 du lemme 3 ainsi que la condition 3', on a

$$(20') \quad \forall x \quad Q(x) \leq P(x).$$

Alors, nous avons l'inégalité

$$(21') \quad l(P) \leq l(Q).$$

Dans la démonstration du lemme 3 nous utiliserons aussi le lemme 3'. Il nous reste à démontrer le lemme 3.

Soient $n + 1$ le nombre des nœuds de P et $m + 1$ celui de Q . n et m sont des nombres naturels quelconques et nous allons procéder par induction complète.

Remarquons d'abord que, en vertu de la non-concavité de P , nous pouvons exclure le cas $m = 1$. En effet, si $m = 1$, les conditions 1, 2 étant vérifiées, la condition (20') ne peut avoir lieu que si $P = Q$ et alors $l(P) = l(Q)$, la condition 3 n'étant pas vérifiée.

Nous ferons la démonstration en deux étapes.

1. *Première étape.* Nous démontrerons la propriété pour $n = 1$ et pour $m > 1$ quelconque. La propriété est vraie pour $m = 2$. Soit, en effet) dans ce cas, y_1 le nœud différent de a et de b de Q . Nous avons alors $Q(y_1) < P(y_1)$, et le triangle $P_0 Q_1 P_2$ est non dégénéré. D'après les remarques faites plus haut, de l'inégalité triangulaire il résulte que $l(P) < l(Q)$.

Soit maintenant k un nombre naturel > 1 et supposons que la propriété soit vraie pour tout m tel que $1 \leq m \leq k$. Démontrons qu'elle sera vraie aussi pour $m = k + 1$. Soit donc $m = k + 1$ ($k > 1$) et soit y_i un nœud de Q tel que l'on ait $Q(y_i) < P(y_i)$ *. Désignons par Q' la restriction de Q sur $[a, y_i]$ et par Q'' sa restriction sur $[y_i, b]$. Désignons aussi par P' la fonction polygonale $P(a, y_i; Q)$ et par P'' la fonction polygonale $P(y_i, b; Q)$. Alors, d'après le résultat relatif au cas $m = 2$, on a

$$(22) \quad l(P) < l(P') + l(P'').$$

Remarquons maintenant que P' et Q' sont des fonctions polygonales ayant respectivement 2 et un nombre $< m$ de nœuds. Il en est de même

* Dans notre cas d'ailleurs cette inégalité est vérifiée pour tout nœud de Q différent de a et de b .

pour les fonctions polygonales P'' et Q'' . D'après le lemme 3', qui par hypothèse s'applique dans ce cas, nous avons

$$(23) \quad \mathcal{U}(P') \leq \mathcal{U}(Q'), \quad \mathcal{U}(P'') \leq \mathcal{U}(Q'').$$

Mais, d'après l'additivité de la longueur des lignes polygonales, on a $\mathcal{U}(Q') + \mathcal{U}(Q'') = \mathcal{U}(Q)$. Compte tenu de (21), (22) on déduit que $\mathcal{U}(P) < \mathcal{U}(Q)$. Ce qu'il fallait démontrer.

2. *Deuxième étape.* Démontrons maintenant que pour tout n donné et quel que soit m la propriété est vraie. Pour $n = 1$ la propriété a été démontrée plus haut. Soit maintenant k un nombre naturel > 1 et supposons que la propriété soit vraie pour tout n tel que $1 \leq n \leq k$. Il suffit de démontrer que la propriété est vraie aussi pour $n = k + 1$. Supposons donc que P ait $k + 2$ nœuds et soit x_1 son deuxième nœud (on a $a < x_1 < b$). Nous devons examiner deux cas :

Cas 1. $Q(x_1) = P(x_1)$. Soient alors P', P'' et Q', Q'' les restrictions de P et Q sur $[a, x_1]$, $[x_1, b]$ respectivement. Alors P', Q' d'une part et P'', Q'' d'autre part vérifient les conditions du lemme 3' et de plus P' et P'' sont des fonctions polygonales à un nombre $< n$ de nœuds. Avec ces notations, les inégalités (22) sont encore, par hypothèse, vérifiées. Il en résulte que $\mathcal{U}(P) \leq \mathcal{U}(Q)$. Mais ici l'égalité n'est possible que si nous avons l'égalité dans les deux relations (23), ce qui exige

$P' = Q', P'' = Q''$ et donc $P = Q$. Il en résulte que $\mathcal{U}(P) < \mathcal{U}(Q)$ et le lemme 3 est encore démontré.

Cas 2. $Q(x_1) < P(x_1)$. Dans ce cas, la non-concavité des fonctions P, Q nous montre que la fonction Q et la fonction linéaire $y = \frac{x-a}{x_1-a} P(x_1) + \frac{x-x_1}{a-x_1} P(a)$ coïncident sur l'intervalle $[a, b]$, en dehors du point x_1 sur un seul point α qui est à droite de x_1 et à gauche de b (voir la fig. 3).

Nous désignons maintenant par P', P'' les restrictions de P sur $[a, x_1]$, $[x_1, b]$ respectivement et par Q', Q'' les restrictions de Q sur $[a, \alpha]$, $[\alpha, b]$ respectivement. Enfin désignons par P^* la fonction polygonale définie sur $[a, \alpha]$ par

$$P^*(x) = \begin{cases} P'(x) & \text{pour } x \in [a, x_1] \\ y(x) & \text{pour } x \in [x_1, \alpha], \end{cases}$$

par Q^* la fonction polygonale définie sur $[x_1, b]$ par

$$Q^*(x) = \begin{cases} y(x) & \text{pour } x \in [x_1, \alpha] \\ Q''(x) & \text{pour } x \in [\alpha, b] \end{cases}$$

et enfin par y la ligne polygonale restriction de la fonction y sur $[x_1, \alpha]$. Remarquons que P^* est une fonction polygonale à 2 nœuds (est une ligne

droite) et P'' une fonction polygonale à $< n$ nœuds. Nous avons donc, par hypothèse,

$$(24) \quad l(P^*) < l(Q'), \quad l(P'') \leq l(Q^*).$$

Mais l'additivité de la longueur nous donne $l(P) = l(P') + l(P'')$, $l(Q) = l(Q') + l(Q'')$ et $l(P^*) = l(P') + l(y)$, $l(Q^*) = l(y) + l(Q'')$. Compte tenu aussi de (23) il en résulte que $l(P) < l(Q)$. De cette manière le lemme 3 est encore démontré.

Je dois remarquer qu'un cas particulier du lemme 3 a été démontré par le procédé indiqué ici par E. Hille dans son intéressant livre d'analyse [1].

§ 3. SUR LA LONGUEUR DES LIGNES POLYGONALES INSCRITES OU CIRCONSCRITES À UN ARC CONVEXE

10. Soit f une fonction convexe définie sur l'intervalle borné et fermé $[a, b]$ où $a < b$. On sait que f est alors continue et a une dérivée à gauche et une dérivée à droite sur tout point de l'intérieur $]a, b[$ de l'intervalle $[a, b]^*$.

Nous considérons d'abord seulement des fonctions convexes $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ qui vérifient les deux propriétés suivantes :

1. f est continue (sur $[a, b]$),
2. f admet une dérivée à gauche (finie), $f'_g(x)$ sur tout $x \in [a, b]$ et une dérivée à droite $f'_d(x)$ (finie) sur tout $x \in [a, b[$.

Pour simplifier nous dirons qu'une telle fonction est une fonction (C). Les propriétés de monotonie des fonctions f'_g, f'_d sont bien connues et il est inutile de les rappeler. Nous les emploierons d'ailleurs plus loin. Remarquons seulement ici que si f est une fonction (C) sur l'intervalle $[a, b]$, sa restriction sur un sous-intervalle fermé quelconque (de longueur non nulle) de $[a, b]$ est aussi une fonction (C). La restriction imposée à la fonction f restreint un peu, mais plutôt en apparence, la généralité des propriétés que nous voulons établir. Nous verrons d'ailleurs que les propriétés relatives aux arcs de la frontière d'un ensemble convexe du plan en résultent facilement.

Pour une fonction (C) l'ensemble des différences divisées $[w', w''; f]$ pour $w', w'' \in [a, b]$, ($w' \neq w''$) est borné et nous avons

$$\inf [w', w''; f] = \lim [w', w''; f] = f'_g(a),$$

$$\sup [w', w''; f] = \overline{\lim} [w', w''; f] = f'_d(b).$$

11. DÉFINITION 1. La fonction polygonale $P(x_0, x_1, \dots, x_n; f)$ ayant ses sommets ($x_0 = a, x_n = b$) sur le graphique de la fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est dite inscrite dans cette fonction.

On voit tout de suite que si f est une fonction (C) toute fonction polygonale inscrite dans cette fonction est une fonction non concave.

* Les dérivées unilatérales existent d'ailleurs, au sens propre, ou impropre, aussi sur a et sur b .

Nous avons maintenant le

LEMME 4. Les demi-droites d'appui de pentes finies p, q , où $p \leq f'_a(a) f'_b(b) \leq q$ respectivement aux points $(a, f(a)), (b, f(b))$, se coupent en un point $A(\alpha, \beta)$ dont l'abscisse α est strictement comprise entre a et b .

La démonstration est immédiate. Nous avons

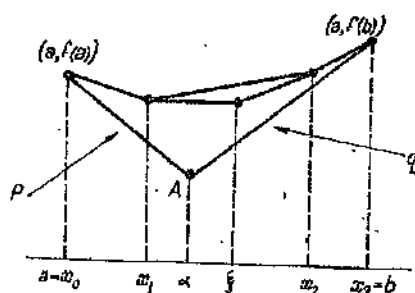


Fig. 4

$$p \leq f'_a(a) < [a, b; f] < f'_b(b) \leq q$$

et alors α , qui est l'unique racine de l'équation en x , $-q(x-b) + p(x-a) = f(b) - f(a)$ est strictement comprise entre a et b . Désignons par Q la fonction polygonale ayant pour sommets les points $(a, f(a)), A$ et $(b, f(b))$ et soit P une fonction polygonale inscrite dans la fonction f . Les conditions du lemme 3 sont alors vérifiées et nous avons

done $l(P) < l(Q)$. On en déduit que la longueur des fonctions polygonales inscrites est bornée supérieurement. Il en résulte le fait bien connu que l'arc convexe $y = f(x)$, pour une fonction (C) , est rectifiable. Désignons par $l(f)$ la longueur de cet arc, que nous appelons plus simplement la longueur de la fonction f . Nous avons alors, par définition, $l(f) = \sup_{P \in \mathcal{Z}_f} l(P)$, $\mathcal{Z}_f$ étant l'ensemble des lignes polygonales inscrites dans la fonction f . Remarquons que $l(f)$ est toujours un nombre positif. Il en est de même d'ailleurs de la longueur d'une ligne polygonale.

On a aussi

$$(25) \quad l(f) = \overline{\lim}_{(24)} l(P)$$

puis que f ne peut coïncider avec une fonction polygonale inscrite dans f .

Remarque 1. Si f est une fonction (C) , nous avons $l(P) < l(f)$ pour tout $P \in \mathcal{Z}_f$. En effet, si $P = P(x_0, x_1, \dots, x_n; f)$ et si nous considérons le point ξ tel que $x_i < \xi < x_{i+1}$, pour la fonction polygonale $P^* = P^*(x_0, x_1, \dots, x_i, \xi, x_{i+1}, \dots, x_n; f)$ nous avons $l(P) < l(P^*) \leq l(f)$, donc $l(P) < l(f)$.

Remarque 2. Soit, en particulier, Q^* la ligne polygonale qui s'obtient en prenant $p = f'_a(a)$, $q = f'_b(b)$. On voit alors facilement que les hypothèses du lemme 3' sont vérifiées par Q et Q^* et nous en déduisons $l(Q^*) \leq l(Q)$, l'égalité ayant lieu si, et seulement si, Q coïncide avec Q^* . Nous emploierons plus loin cette remarque.

La fonction polygonale Q construite plus haut, vérifiant la condition 3 du lemme 3 est une fonction polygonale circonscrite à la fonction f . Nous allons généraliser plus loin cette notion de fonction polygonale circonscrite.

Remarque 3. La longueur $l(f)$ de l'arc d'une fonction (C) jouit encore d'une propriété d'additivité. Cette propriété peut se formuler de diverses manières et se réduit à l'égalité

$$(26) \quad l(f) = l(g) + l(h),$$

où f est une fonction (O) définie sur l'intervalle $[a, b]$ et g, h sont ses restrictions sur les sous-intervalles $[a, c], [c, b]$ respectivement où $a < c < b$. Remarquons d'abord que g, h sont également des fonctions (O).

Soit maintenant ε un nombre positif quelconque.

Si Q, R sont des fonctions polygonale inscrites dans les fonctions g, h telles que $U(g) - \frac{\varepsilon}{2} < U(Q), U(h) - \frac{\varepsilon}{2} < U(R)$, donc $U(g) + U(h) - \varepsilon < U(Q) + U(R)$, si P est la fonction polygonale prolongée sur $[a, b]$ par la formule (18) et si l'on tient compte de (17), il en résulte que

$$(27) \quad U(g) + U(h) - \varepsilon < U(f).$$

D'autre part, soit P une fonction polygonale inscrite dans la fonction f telle que $U(f) - \varepsilon < U(P)$ et soit P^* la fonction polygonale inscrite qu'on obtient de P en ajoutant éventuellement le nœud c (lorsqu'il n'est pas un nœud de P). Alors si Q^*, R^* sont les restrictions de P^* sur $[a, c], [c, b]$ respectivement on a $U(f) - \varepsilon < U(P) \leq U(P^*) = U(Q^*) + U(R^*) < U(g) + U(h)$, d'où

$$(28) \quad U(f) - \varepsilon < U(g) + U(h).$$

De (27) et (28) il résulte l'égalité (26), donc justement l'additivité que nous voulions démontrer.

Enfin remarquons que le lemme 4 et les remarques qui en résultent s'appliquent à toute restriction de la fonction f sur un sous-ensemble fermé de $[a, b]$.

12. Nous pouvons donner maintenant la définition d'une fonction ou ligne polygonale circonscrite.

DÉFINITION 2. f étant une fonction (O), une fonction polygonale P ayant un nombre impair $2n + 1$ ($n > 0$) de nœuds $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{2n} = b$ et dont les sommets correspondants seront encore désignés par $P_i, i = 0, 1, \dots, 2n$, est dite circonscrite à la fonction f si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

1. Les sommets P_{2i} correspondant aux nœuds d'indice pair $x_{2i}, i = 0, 1, \dots, n$ sont sur la courbe $y = f(x)$.

2. Chaque côté $P_i P_{i+1}, i = 0, 1, \dots, 2n - 1$ est segment d'une droite d'appui de la fonction f (de la courbe $y = f(x)$.)

La condition 1 implique $P(x_{2i}) = f(x_{2i}), i = 0, 1, \dots, n$. La fonction polygonale circonscrite est donc une fonction interpolatrice de la fonction f , mais seulement sur les nœuds $x_{2i}, i = 0, 1, \dots, n$.

La condition 2 implique les inégalités

$$(29) \quad \begin{cases} [a, x_1; P] \leq f'_a(a), f'_b(b) \leq [x_{2n-1}, b; P] \\ f'_c(x_{2i}) \leq [x_{2i-1}, x_{2i}; P], [x_{2i}, x_{2i+1}; P] \leq f'_d(x_{2i}) \end{cases}$$

$$i = 1, 2, \dots, n - 1 \ (n > 1).$$

* Il ne faut pas confondre la fonction polygonale circonscrite P avec la fonction polygonale inscrite $P(x_0, x_1, \dots, x_{2n}; f)$.

Pour faciliter le langage nous dirons que les nœuds x_{2i} et les sommets respectifs P_{2i} d'indice pair sont de la *première espèce*. Les autres nœuds et sommets sont de la *seconde espèce*.

$$(30) \quad f'(x_{2i-2}) < f'(x_{2i}), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$
$$(31) \quad [x_{2i-2}, x_{2i-1}; P] < [x_{2i-1}, x_{2i}; P], \quad i = 1, 2, \dots, n.$$
$$(32) \quad [x_{2i-1}, x_{2i}; P] \leq [x_{2i}, x_{2i+1}; P], \quad i = 1, 2, \dots, n-1$$

En supposant toujours $n > 1$, parmi ces fonctions polygonales celles pour lesquelles l'égalité a lieu dans toutes les relations (32) sont particulièrement remarquables. Alors les côtés $P_{2i-1}, P_{2i}, P_{2i}P_{2i+1}$, forment ensemble pour tout i un segment d'une droite d'appui au point $(x_{2i}, f(x_{2i}))$ de la fonction f .

Il est facile de construire de telles fonctions polygonales circonscrites ayant les nœuds de première espèce quelconques donnés d'avance. Prenons, en effet, les points x_i tels que $a = x_0 < x_2 < x_4 < \dots < x_{2n-2} < x_{2n} = b$, mais par ailleurs quelconques et menons des droites d'appui d_i aux points $P_{2i}(x_{2i}, f(x_{2i}))$, $i = 1, 2, \dots, n-1$ (si $n > 1$) et soient encore d_0, d_n des droites d'appui non verticales aux points $(a, f(a)), (b, f(b))$.

La construction précédente est basée d'abord sur le fait que, si f est une fonction (C), en chaque point du graphique de f il existe au moins une droite d'appui non verticale. Ensuite, la pente d'une droite d'appui

au point $(x', f(x'))$ est toujours plus petite que la pente d'une droite d'appui en un point $(x'', f(x''))$ ayant l'abscisse x'' plus grande que x' .

14. La construction précédente permet d'éclaircir la notion de fonctions polygonales circonscrites consécutives.

Nous dirons que deux fonctions polygonales P, Q circonscrites à la même fonction $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sont *consécutives* (l'une à l'autre) si la suite de nœuds de la première espèce de l'une d'elles est une suite partielle de la suite des nœuds de la première espèce de l'autre. Dans ce travail nous nous intéressons seulement à la manière dont on peut déduire d'une fonction polygonale circonscrite donnée P une certaine autre fonction polygonale circonscrite Q , consécutive à P .

Nous avons le

LEMME 5. Si P est une fonction polygonale circonscrite à la fonction f , ayant la suite des nœuds $(x_i)_{i=0}^{2n}$, il existe toujours une autre fonction polygonale Q circonscrite à f dont les nœuds de première espèce forment une suite croissante quelconque $(\xi_i)_{i=0}^n$ ($\xi_0 = a, \xi_n = b$) dont $(x_{2i})_{i=0}^n$ est une suite partielle.

Il suffit de montrer comment on peut construire une fonction polygonale Q vérifiant les conditions du lemme énoncé.

Si $m = n$ on peut prendre pour Q la fonction polygonale P elle-même.

Supposons $m > n$ et soit $\xi_i = x_{2i}, i = 0, 1, \dots, n$. Nous avons $k_0 = 0, k_n = m$ et $k_0 < k_1 < \dots < k_n$, mais l'une au moins des différences $k_i - k_{i-1}$ est plus grande que 1. Si $k_r - k_{r-1} > 1$ nous modifions la fonction polygonale P dans l'intervalle $[x_{2r-2}, x_{2r}]$ en faisant la construction du n° précédent. On prend alors $[x_{2r-2}, x_{2r}]$ comme intervalle $[a, b]$ et on emploie des droites d'appui aux points d'abscisses $\xi_{r-1+j}, j = 1, 2, \dots, k_r - k_{r-1} - 1$ et en prenant, pour fixer les idées, les pentes des droites d'appui aux extrémités x_{2r-2} et x_{2r} respectivement égales à $[x_{2r-2}, x_{2r-1}; P]$ et $[x_{2r-1}, x_{2r}; P]^*$. En faisant cette construction pour toutes les différences $k_r - k_{r-1}$ qui sont > 1 on obtient finalement une fonction polygonale Q qui vérifie les conditions du lemme 5.

Remarquons encore que la fonction polygonale Q ainsi construite jouit de la propriété que si P est une fonction non concave il en est de même de Q et on a toujours $k(Q) < k(P)$ lorsque $m > n$.

Nous rappelons encore une fois qu'on pourrait étudier d'autres fonctions polygonales circonscrites à la fonction f et consécutives à P , mais ce qui précède sera suffisant pour la suite.

15. Parmi toutes les lignes polygonales circonscrites à la fonction f , de la forme (O), et ayant les mêmes nœuds de la première espèce $x_0, x_{2i}, \dots, x_{2n}$, il y en a une, désignée pour le moment par P^* , pour laquelle

$$[x_{2i-2}, x_{2i-1}; P^*] = f'_a(x_{2i-2}), [x_{2i-1}, x_{2i}; P^*] = f'_a(x_{2i})$$

$$i = 1, 2, \dots, n,$$

$x_1, x_3, \dots, x_{2n-1}$ étant (par ordre de grandeur croissante) les nœuds de P^* de la seconde espèce. Puisque nous avons (30) et aussi (si $n > 1$), $f'_a(x_{2i}) \leq$

* Ceci n'est pas nécessaire, mais permet de définir avec précision une fonction polygonale Q jouissant des propriétés désirées.

$\leq f'_a(x_i)$, $i = 1, 2, \dots, n-1$, on voit que la fonction polygonale circonscrite P^* est non concave.

Enfin, si nous tenons compte de la remarque 2 qui suit le lemme 4, nous voyons que si P est une fonction polygonale circonscrite ayant les nœuds de la première espèce $x_0, x_2, \dots, x_{2n}$, nous avons $l(P^*) \leq l(P)$ où l'égalité n'a lieu que si P coïncide avec P^* . La fonction polygonale P^* est donc parmi toutes les fonctions polygonales circonscrites à la fonction f et qui ont les mêmes nœuds de la seconde espèce $x_0, x_2, \dots, x_{2n}$, celle dont la longueur est la plus petite et elle est unique.

16. Si f est une fonction (O), parallèlement à toute droite non verticale il existe une droite d'appui qui a un seul point de contact avec la fonction (avec la courbe $y = f(x)$) et l'abscisse de ce point appartient, bien entendu, à l'intervalle $[a, b]$. Si le coefficient angulaire de la droite est $\leq f'_a(a)$ ce point de contact coïncide avec a et si ce coefficient angulaire est $\geq f'_a(b)$ il coïncide avec l'extrémité b de l'intervalle. Enfin si ce coefficient angulaire est strictement compris entre $f'_a(a)$ et $f'_a(b)$, le point de contact est strictement compris entre a et b .

Nous allons maintenant construire une fonction polynomiale circonscrite de la manière suivante.

Considérons une suite croissante $(p_i)_{i=0}^m$ ($m > 0$) de nombres réels (finis) de manière que $p_0 \leq f'_a(a)$ et $f'_a(b) \leq p_m$. Désignons par d_i la droite d'appui dont le coefficient angulaire est p_i et soit y_i l'abscisse du point de contact de d_i avec la courbe $y = f(x)$. La suite $(y_i)_{i=0}^m$ est non décroissante et, par construction on a $y_0 = a$, $y_m = b$. Parmi les points y_i , il y en a au moins 2 distincts (les points y_0 et y_m en tout cas). Désignons alors par $(x_i)_{i=0}^n$ ($= b$) la suite croissante des points de $[a, b]$ avec lesquels coïncident les points y_i . Pour tout j il existe un i tel que $y_i = x_{2j}$ et pour tout i au moins un j tel que $x_{2j} = y_i$. Désignons alors par s_i le nombre des points y_i qui coïncident avec x_{2i} . Alors s_i sont positifs et leur somme est égale à $m+1$. Nous avons $y_k = x_{2i}$ pour $s_0 + s_1 + \dots + s_{i-1} \leq k \leq s_0 + s_1 + \dots + s_i - 1$, $i = 0, 1, \dots, n$ ($s_0 + s_1 + \dots + s_{i-1}$ étant remplacé par 0 si $i = 0$). Pour simplifier l'écriture posons encore

$$(33) \quad \begin{cases} d'_0 = d_{s_0-1}, d'_{2n-1} = d_{s_0+s_1+\dots+s_{n-1}} \\ d'_{2i-1} = d_{s_0+s_1+\dots+s_{i-1}}, d'_{2i} = d_{s_0+s_1+\dots+s_i-1} \end{cases}$$

$$i = 1, 2, \dots, n-1$$

(où on retient seulement les deux premières égalités si $n = 1$).

Alors d'_0, d'_{2n-1} sont des droites d'appui respectivement aux points $(a, f(a)), (b, f(b))$ et d'_{2i-1}, d'_{2i} sont toutes les deux des droites d'appui au point $(x_{2i}, f(x_{2i}))$, $i = 1, 2, \dots, n-1$ (lorsque $n > 1$). Désignons encore par P_{2i} le point $(x_{2i}, f(x_{2i}))$, $i = 0, 1, \dots, n$ et par p_{2i-1} l'intersection des droites d'appui d'_{2i-2}, d'_{2i-1} , $i = 1, 2, \dots, n$. Alors d'après la définition 2, la fonction polygonale P ayant pour sommets les points P_i , $i = 0, 1, \dots, \dots, 2n$ et dont les nœuds forment la suite croissante $(x_i)_{i=0}^{2n}$, est circon-

scrite à la fonction f et est bien une fonction non concave. Remarquons que pour cette fonction polygonale nous avons

$$0 < [x_{2i-1}, x_{2i}; P] - [x_{2i-2}, x_{2i-1}; P] = \\ = p_{s_0+s_1+\dots+s_{i-1}} - p_{s_0+s_1+\dots+s_{i-1}-1}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

d'où il résulte aussi que

$$(34) \quad 0 < [x_{2i-1}, x_{2i}; P] - [x_{2i-2}, x_{2i-1}; P] \leq \max_{j=1,2,\dots,m} (p_j - p_{j-1}) \\ i = 1, 2, \dots, n.$$

17. Nous pouvons maintenant démontrer le *

LEMME 6. *Étant donnés deux nombres positifs quelconques ϵ_1, ϵ_2 , on peut toujours trouver une fonction polygonale P circonscrite à la fonction f (qui est une fonction (C)) et dont les nœuds forment la suite croissante $(x_i)_{i=0}^{2n}$, de manière que les deux conditions suivantes soient vérifiées :*

1. On a

$$(35) \quad 0 < [x_{2i-1}, x_{2i}; P] - [x_{2i-2}, x_{2i-1}; P] < \epsilon_1, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

2. La différence $x_j - x_{j-1}$ de deux nœuds consécutifs est $< \epsilon_2$, donc on a l'inégalité

$$(36) \quad \max_{j=1,2,\dots,2n} (x_j - x_{j-1}) < \epsilon_2.$$

En modifiant un peu, pour les nécessités de la démonstration, les notations, on voit que d'après la construction qui nous a mené aux inégalités (34), on peut d'abord construire une fonction polygonale circonscrite P' , dont la suite des nœuds est $(x'_i)_{i=0}^{2k}$ et pour laquelle

$$0 < [x'_{2i-1}, x'_{2i}; P'] - [x'_{2i-2}, x'_{2i-1}; P'] < \epsilon_1, \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

Si maintenant $x'_{j+1} - x'_j < \epsilon_2$, $j = 0, 1, \dots, 2k-1$ il suffit de prendre comme P cette fonction polygonale P' et les conditions (35), (36) du lemme 6 sont vérifiées.

Dans le cas contraire on peut, d'après le lemme 5, construire la ligne polygonale circonscrite P consécutive à P' de manière que les conditions (35), (36) soient vérifiées. Pour arriver à ce résultat il suffit d'insérer entre deux nœuds de la première espèce consécutifs x'_{2i-2}, x'_{2i} de P' un nombre suffisant et convenablement distribués de nœuds de la première espèce de P . Par exemple nous pouvons insérer entre x'_{2i-2} et x'_{2i} comme nœuds de

* C'est pour réaliser les conditions de ce lemme que nous nous sommes d'abord limité aux fonctions (C).

la première espèce les points qui divisent l'intervalle $[x'_{2i-2}, x'_{2i}]$ en r parties égales, r étant un nombre naturel $> \frac{x'_{2i} - x'_{2i-2}}{\varepsilon_2}$ et en faisant cette construction pour $i = 1, 2, \dots, k$.

Le lemme 6 est ainsi démontré.

13. Nous pouvons maintenant démontrer le :

THÉORÈME 1. Si f est une fonction (C) et $\mathcal{Q}_\varepsilon$ est l'ensemble des fonctions polygonales circonscrites à f , on a

$$(37) \quad \inf_{P \in \mathcal{Q}_\varepsilon} U(P) = U(f).$$

Nous ferons la démonstration en deux étapes.

Première étape. Nous allons démontrer d'abord que

$$(38) \quad \inf_{P \in \mathcal{Q}_\varepsilon} U(P) \geq U(f).$$

Soit $P \in \mathcal{Q}_\varepsilon$ et $(x_{2i})_{i=0}^n$ la suite des nœuds de la première espèce de P . Si ε est un nombre positif quelconque nous pouvons construire une suite croissante $(y_i)_{i=0}^n$, où $y_0 = a$, $y_n = b$, dont $(x_{2i})_{i=0}^n$ est une suite partielle telle que si $P^{(i)}$ est la restriction sur l'intervalle $[x_{2i-2}, x_{2i}]$ de la ligne polygonale inscrite P^* $(y_0, y_1, \dots, y_n; f)$ et si $f^{(i)}$ est la restriction sur le même intervalle de f , on ait

$$(39) \quad U(f^{(i)}) - \frac{\varepsilon}{n} < U(P^{(i)}), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Ceci résulte de la définition de la longueur d'une fonction (C). Compte tenu de la propriété d'additivité des longueurs des fonctions polygonales et des fonctions (C), on a

$$\sum_{i=1}^n U(f^{(i)}) = U(f), \quad \sum_{i=1}^n U(P^{(i)}) = U(P^*).$$

De (39) il résulte alors $U(f) - \varepsilon < U(P^*)$. Mais, en appliquant le lemme 3, on a $U(P^*) < U(P)$ et il résulte que $U(f) - \varepsilon < U(P)$, d'où l'inégalité (38).

Deuxième étape. Nous allons démontrer que

$$(40) \quad \inf_{P \in \mathcal{Q}_\varepsilon} U(P) \leq U(f).$$

Soit encore ε un nombre positif quelconque et soit P une fonction polygonale circonscrite à f vérifiant la condition 1 du lemme avec $\varepsilon_1 = \frac{2\varepsilon}{U(f)}$. $(x_i)_{i=0}^{2n}$ étant la suite des nœuds de P , désignons par P^* la fonction polygonale inscrite $P^*(x_0, x_2, \dots, x_{2n}; f)$ à f . Alors on peut appliquer l'inégalité (11) aux triangles $P_{2i-2}P_{2i-1}P_{2i}$, $i = 1, 2, \dots$, ou les lettres P_i ,

désignent toujours les sommets de P . En tenant compte de l'additivité de la longueur, on obtient

$$\begin{aligned} l(P) &< \left(1 + \frac{\varepsilon_1}{2}\right) l(P^*) = \left(1 + \frac{\varepsilon}{l(f)}\right) l(P^*) < \\ &< \left(1 + \frac{\varepsilon}{l(f)}\right) l(f) = l(f) + \varepsilon \end{aligned}$$

et l'inégalité (40) en résulte.

Le théorème 1 est démontré.

Il est facile de voir, en appliquant le lemme 3, que si f est une fonction (C), on a $l(f) < l(P)$ pour toute $P \in \mathfrak{D}_\varepsilon$.

On en déduit que

$$(41) \quad \lim_{P \in \mathfrak{D}_\varepsilon} l(P) = l(f).$$

§ 4. SUR QUELQUES THÉORÈMES D'APPROXIMATION

19. Soit $\omega(\delta)$ le module d'oscillation de la fonction $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ $\omega(\delta)$ est définie pour tout $\delta > 0$ et l'on a $|f(x') - f(x'')| \leq \omega(|x' - x''|)$ si $x' \neq x''$. Parmi les diverses propriétés de $\omega(\delta)$ retenons qu'elle est une fonction non décroissante et que nous avons $\lim_{\delta \downarrow 0} \omega(\delta) = 0$ si et seulement

si f est continue, donc en particulier si f est une fonction (C). Cette dernière propriété exprime d'ailleurs la continuité uniforme de la fonction f .

Le premier théorème d'approximation s'exprime par le

THÉORÈME 2. Si $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction (C) et si ε est un nombre positif quelconque, on peut toujours trouver une fonction polygonale $P = P(x_0, x_1, \dots, x_n; f)$ inscrite dans f telle que l'on ait

$$(42) \quad |f(x) - P(x)| < \varepsilon \text{ pour } x \in [a, b].$$

La propriété est bien connue. Pour être complet nous indiquerons la démonstration. La restriction de P sur l'intervalle partiel $[x_{i-1}, x_i]$ coïncide avec le polynôme du premier degré $\frac{1}{x_i - x_{i-1}} [(x - x_{i-1}) f(x_i) + (x_i - x) f(x_{i-1})]$ et nous déduisons

$$\begin{aligned} |f(x) - P(x)| &\leq \\ &\leq \frac{1}{x_i - x_{i-1}} [(x - x_{i-1}) |f(x) - f(x_i)| + (x_i - x) |f(x) - f(x_{i-1})|] \leq \\ &\leq \frac{1}{x - x_{i-1}} [(x - x_{i-1}) \omega(x_i - x) + (x_i - x) \omega(x - x_{i-1})] \\ &\leq \omega(x_i - x_{i-1}) \text{ pour } x \in [x_{i-1}, x_i]. \end{aligned}$$

Ces inégalités résultent en remarquant que pour $x \in [x_{i-1}, x_i]$, on a $0 \leq x_i - x$, $x - x_{i-1} \leq x_i - x_{i-1}$.

Soit maintenant

$$\eta = \max_{i=1,2,\dots,n} (x_i - x_{i-1}).$$

Il en résulte alors que

$$|f(x) - P(x)| \leq \omega(\eta) \text{ pour } x \in [a, b].$$

En choisissant les nœuds x_i de manière que $\omega(\eta) < \epsilon$, on obtient l'inégalité (42). Le choix des points x_i peut se faire, par exemple, en prenant les points qui divisent en n parties égales l'intervalle $[a, b]$, n étant un nombre naturel suffisamment grand.

20. On sait d'ailleurs que la propriété exprimée par le théorème 2 est vraie pour toute fonction continue $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Mais si f est une fonction (O)* on peut obtenir un résultat plus complet. Ce résultat est exprimé par le

THÉORÈME 3. *Si $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction (O) et si ϵ est un nombre positif quelconque, on peut toujours trouver une fonction polygonale Q inscrite dans f , telle que l'on ait*

$$(43) \quad 0 \leq Q(x) - f(x) < \epsilon \text{ pour } x \in [a, b]$$

et

$$(44) \quad 0 < U(f) - U(Q) < \epsilon.$$

La démonstration ne présente pas de difficultés. Soit P la fonction polygonale inscrite dans f qui vérifie la condition (42). Soit Q une fonction polygonale inscrite dans f qu'on déduit de P en ajoutant un certain nombre de nouveaux nœuds, en dehors des nœuds x_i de P . On peut encore dire que Q est une fonction polygonale *consécutive* à P , cette fois-ci inscrite dans f . La suite des nœuds de P est une suite partielle de la suite des nœuds de Q **.

Or, de la définition de la longueur de la fonction f il résulte qu'on peut choisir ces nouveaux nœuds de manière que si $f^{(i)}$ et $Q^{(i)}$ sont respectivement les restrictions de f et Q sur l'intervalle $[x_{i-1}, x_i]$, on ait

$$0 < U(f^{(i)}) - U(Q^{(i)}) < \frac{\epsilon}{n}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

La propriété d'additivité de la longueur nous montre alors que l'on a (44). En ce qui concerne les inégalités (43), elles résultent du fait que $\forall x \quad Q(x) \leq P(x)$, donc $\forall x \quad 0 \leq Q(x) - f(x) \leq P(x) - f(x)$.

* ou si f a une structure un peu plus générale, telle que nous le verrons au § suivant.

** La fonction polygonale inscrite Q s'obtient donc, comme dans le cas des fonctions polygonales circonscrites et consécutives, par un raffinement de la suite des nœuds de P .

On peut voir encore qu'on peut trouver une suite infinie $(P^{(n)})_{n=0}^{\infty}$ non croissante* de fonctions polygonales inscrites, convergeant uniformément vers la fonction f (sur $[a, b]$) et, en même temps, la suite croissante de longueurs $(l(P^{(n)}))_{n=0}^{\infty}$ convergeant vers $l(f)$. Nous pouvons laisser la démonstration de cette propriété au lecteur.

21. Nous allons établir une propriété analogue pour les fonctions polygonales circonscrites à f .

THEOREME 4. Si $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction (C) et si ϵ est un nombre positif quelconque, on peut trouver une fonction polygonale P circonscrite à f , telle que l'on ait

$$(45) \quad |f(x) - P(x)| < \epsilon \text{ pour } x \in [a, b].$$

Pour la démonstration nous nous baserons sur les lemmes 1 et 6. Choisissons les nombres positifs ϵ_1, ϵ_2 tels que

$$(46) \quad \epsilon_1 \leq \sqrt{2}, \quad \epsilon_2 < \frac{\epsilon}{2\sqrt{2}}, \quad \omega(2\epsilon_2) < \frac{\epsilon}{\sqrt{2}}$$

ce qui est possible d'après les propriétés du module d'oscillation $\omega(\delta)$ de la fonction f .

Soit maintenant P la fonction polygonale circonscrite à la fonction f , ayant les nœuds $x_i, i = 0, 1, \dots, 2n$ et qui vérifie les conditions (35) et (36) du lemme 6. Pour évaluer la différence $f(x) - P(x)$, considérons le triangle formé par les sommets B, A, C de P d'abscisses respectives $x_{2i-2}, x_{2i-1}, x_{2i}$. Désignons par D, E les intersections de la verticale du point x de $[x_{2i-2}, x_{2i}]$ avec les côtés AC, BC respectivement. On a alors $0 \leq f(x) - P(x) \leq \overline{EF}$, $\overline{EF}$ étant la longueur du segment de droite EF . Mais, on a évidemment (comparer aussi avec la figure 2), $\overline{EF} < d$. En appliquant alors le lemme 1, il en résulte que

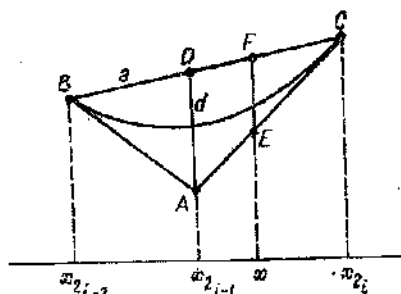


Fig. 6

$$\begin{aligned} 0 \leq f(x) - P(x) &\leq d < \sqrt{(f(x_{2i}) - f(x_{2i-2}))^2 + (x_{2i} - x_{2i-2})^2} \leq \\ &\leq \sqrt{\omega^2(2\epsilon_2) + 4\epsilon_2^2} < \epsilon. \end{aligned}$$

On en déduit que

$$|f(x) - P(x)| < \epsilon, \text{ pour } x \in [x_{2i-2}, x_{2i}], \quad i = 1, 2, \dots, n$$

et l'inégalité (45) est démontrée.

22. De même qu'au cas des fonctions polygonales inscrites, on peut obtenir un résultat plus complet. Ce résultat est exprimé par le

* donc $\forall x \forall n P^{(n+1)}(x) \leq P^{(n)}(x)$.

THÉORÈME 5. Si $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction (O) et si ε est un nombre positif quelconque, on peut toujours trouver une fonction polygonale Q circonscrite à f , telle que l'on ait

$$(47) \quad 0 \leq f(x) - Q(x) < \varepsilon \text{ pour } x \in [a, b]$$

et

$$(48) \quad 0 < l(Q) - l(f) < \varepsilon.$$

La démonstration ne présente pas de difficultés, en tenant compte du théorème 1. En partant de la fonction polygonale P qui vérifie la condition (45) du théorème 4, on peut trouver une fonction polygonale circonscrite Q consécutive à P telle que l'on ait (48). Puisque, par construction, on a $\forall x, P(x) \leq Q(x)$, donc $\forall x, 0 \leq f(x) - Q(x) \leq f(x) - P(x)$, on déduit aussi l'inégalité (47).

Enfin on peut voir encore qu'on peut trouver une suite infinie $(P^{(n)})_{n=0}^\infty$ non décroissante* de fonctions polygonales circonscrites à f convergeant uniformément vers la fonction f (sur $[a, b]$) et en même temps la suite décroissante des longueurs $(l(P^{(n)}))_{n=0}^\infty$ convergeant vers $l(f)$. Nous pouvons laisser encore la démonstration de cette propriété au lecteur.

Il est clair que nous ne pouvons pas ici étendre le théorème 4 à une fonction continue f quelconque. En effet, nous n'avons pas défini la notion de fonction polygonale circonscrite à une telle fonction.

§ 5. QUESTIONS FINALES

23. On peut étendre plusieurs des résultats précédents en levant certaines restrictions auxquelles est astreinte la fonction f ou encore en généralisant cette fonction. On peut aussi en un certain sens généraliser la notion de fonction polygonale circonscrite.

Dans la suite nous allons examiner brièvement ces questions sans trop insister sur les démonstrations.

24. Au lieu d'une fonction (O) considérons une fonction convexe et continue quelconque définie sur $[a, b]$. Dans ce cas les dérivées unilatérales $f'_a(a)$, $f'_b(b)$ peuvent être infinies, la première pouvant être égale à $-\infty$ et la seconde à $+\infty$. Il n'y a rien à dire sur les fonctions polygonales inscrites dans la fonction, la définition 1 conservant encore un sens précis, mais il y a une certaine difficulté à définir une fonction polygonale circonscrite à la fonction, la définition 2 n'ayant pas toujours un sens précis. En effet, si, par exemple, $f'_a(a) = -\infty$ ou $f'_b(b) = +\infty$, la seule droite d'appui qu'on peut mener au point $(a, f(a))$ ou $(b, f(b))$ est verticale. On peut tourner la difficulté en admettant qu'une ligne polygonale peut avoir aussi des côtés extrêmes verticaux. Plus exactement, nous pouvons convenir que dans la suite $(x_i)_{i=0}^\infty$ des nœuds on peut avoir $x_0 = x_1$, les sommets P_0, P_1 n'étant pas confondus et le segment vertical P_0P_1 ayant une longueur non nulle. De même on peut avoir $x_{n-1} = x_n$, les sommets P_{n-1}, P_n n'étant pas confondus et le segment vertical $P_{n-1}P_n$ ayant une longueur non nulle**. En tous cas

* donc $\forall n, \forall x, P^{(n)}(x) \leq P^{(n+1)}(x)$.

** On peut introduire aussi d'autres lignes polygonales ayant des côtés verticaux, mais elles n'interviendront pas dans ce travail.

si $n > 2$ la suite $(x_i)_{i=1}^{n-1}$ est croissante. On peut alors maintenir la définition 2 d'une ligne polygonale circonscrite en remarquant que cela n'est plus, en général, une fonction. En effet, par définition une fonction ne peut prendre qu'une seule valeur pour toute valeur de la variable ce qui, pour les lignes polygonales considérées peut ne pas avoir lieu aux points a et b . Les lignes polygonales ainsi définies jouissent encore des propriétés établies au § 4. En particulier, elles ont une longueur bien déterminée qui est $> l(f)$.

25. On peut encore tourner la difficulté, en remplaçant la définition 2 par la

DÉFINITION 3. Si $f:[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction (C), la fonction polygonale P ayant la suite croissante de nœuds $(x_i)_{i=1}^{n-1}$ où $x_0 = a$, $x_n = b$, est dite circonscrite à f si les côtés $P_{2i-2}P_{2i-1}$ et $P_{2i-1}P_{2i}$ sont des segments de droites d'appui aux points $(x_{2i-1}, f(x_{2i-1}))$ pour $i = 1, 2, \dots, n$.

Il résulte de la définition que

$$P(a) \leq f(a), P(b) \leq f(b).$$

Alors la définition 3 s'applique même si f est seulement continue et convexe (sans avoir des dérivées unilatérales bornées).

La propriété $l(P) > l(f)$ subsiste et les théorèmes 1, 4, 5 sont encore valables.

Une autre manière de tourner les difficultés résulte de ce qui suit.

26. On peut aussi généraliser le problème en supposant seulement que $f:[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction convexe. Elle peut alors ne pas être continue aux extrémités a et b . Dans ce cas la fonction $g:[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par les formules

$$(49) \quad g(x) = \begin{cases} f(a+0) & \text{pour } x = a, \\ f(x) & \text{pour } x \in]a, b[, \\ f(b-0) & \text{pour } x = b, \end{cases}$$

est une fonction convexe continue.

Pour maintenir les propriétés précédentes la plus simple est de compléter toujours les lignes polygonales inscrites et circonscrites dans et à g par des côtés verticaux aux points a et b de longueurs (qui peuvent être aussi nulles) respectivement égales à $f(a) - f(a+0)$ et $f(b) - f(b-0)$.

27. Les résultats précédents peuvent en partie être étendus aux fonctions non concaves définies sur un intervalle borné et fermé $[a, b]$. Les définitions des lignes polygonales inscrites et circonscrites se font de la même manière. Les propriétés subsistent en remarquant seulement que l'égalité $l(P) = l(f)$ peut bien avoir lieu tant pour une ligne polygonale inscrite que pour une ligne polygonale circonscrite à f . On peut d'abord considérer seulement des fonctions non concaves continues et à dérivées bornées et ensuite généraliser les propriétés, ainsi que nous l'avons fait pour les fonctions (C).

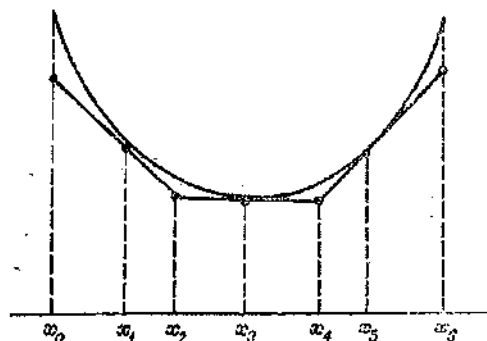


Fig. 7

La formule (25) peut ne pas être vraie. En effet, si la fonction f se réduit à un polynôme de degré 1, toute fonction polygonale inscrite dans f , conformément à la définition 1, coïncide avec f et nous avons donc $l(P) = l(f)$, quel que soit $P \in \mathcal{P}_i$. On peut d'ailleurs démontrer qu'en dehors de ce cas la formule (25) est vraie.

Au contraire la formule (41) est toujours vraie. Pour nous rendre compte qu'il en est ainsi il suffit encore de considérer le cas où f se réduit à un polynôme de degré 1. Dans ce cas toute fonction polygonale P ayant les (trois) nœuds $a, \frac{a+b}{2}, b$ et pour laquelle $\lambda = f\left(\frac{a+b}{2}\right) - P\left(\frac{a+b}{2}\right) \geq 0$, $f(a) = P(a)$, $f(b) = P(b)$ est circonscrite à f et on a (pour $\lambda > 0$) $l(f) < l(P)$, ainsi que $\lim l(P) = l(f)$ pour $\lambda \downarrow 0$.

28. Avant d'aller plus loin remarquons qu'on peut aussi généraliser la notion de ligne polygonale ou de fonction polygonale circonscrite en imposant au lieu de (28) les seules conditions

$$[x_{2i-2}, x_{2i-1}; P] \leq f'_d(x_{2i-2}), f'_e(x_{2i}) \leq [x_{2i-1}, x_{2i}; P],$$

$$i = 1, 2, \dots, n.$$

Une telle fonction polygonale peut ne pas être une fonction non concave. Elle présente peu d'intérêt puisqu'on peut toujours trouver une autre fonction polygonale circonscrite ayant une longueur au plus égale, non concave et ayant les mêmes nœuds de la première espèce.

29. Pour justifier maintenant la démonstration proposée par G. Tzitzéica pour l'inégalité (1) il suffit de mettre la propriété exprimée par le lemme 3 sous une forme plus générale.

Si la longueur $l(f)$ de la fonction non concave $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est définie par $l(f) = l(g) + f(a) - f(a+0) + f(b) - f(b-0)$, où g est la fonction (49), nous avons le

THÉORÈME 6. *Si f, φ sont deux fonctions non concaves définies sur l'intervalle borné et fermé $[a, b]$ ($a < b$) et si les conditions suivantes sont vérifiées :*

$$1. f(a) = \varphi(a), f(b) = \varphi(b);$$

$$2. \text{ on a } \forall x f(x) \leq \varphi(x),$$

alors entre les longueurs des fonctions f, φ on a l'inégalité

$$(50) \quad l(\varphi) \leq l(f),$$

l'égalité n'étant vraie que si les fonctions f, φ coïncident.

Pour la démonstration il suffit d'abord de supposer que f, φ sont des fonctions (C). Ensuite il est facile d'étendre la propriété à des fonctions non concaves quelconques.

Supposons donc que f, φ soient des fonctions (C). Soit P une fonction polygonale inscrite dans φ et Q une fonction polygonale non concave circonscrite à f . Les fonctions polygonales P, Q vérifient les conditions du lemme 3' et nous avons donc $l(P) \leq l(Q)$, d'où $\sup l(P) \leq \inf l(Q)$ et (50) résulte d'après le théorème 1.

Supposons maintenant que x_0 est un point de $]a, b[$ tel que $f(x_0) < \varphi(x_0)$. Une droite d'appui à φ au point $(x_0, \varphi(x_0))$ coupe la courbe $y = f(x)$ aux points d'abscisses a' et b' où $a \leq a' < b' \leq b$. Considérons la fonction définie par les formules

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{pour } x \in [a, a'] \cup [b', b], \\ P(a', b'; f) & \text{pour } x \in [a', b']. \end{cases}$$

Alors h est une fonction non concave et on a $\forall x, f(x) \leq h(x) \leq \varphi(x)$, donc $l(\varphi) \leq l(h) \leq l(f)$. Mais l'additivité de la longueur nous montre que $l(h) < l(f)$. On en déduit que $l(\varphi) < l(f)$.

30. Considérons maintenant dans le plan, la frontière Γ d'un ensemble borné et convexe. Γ est une courbe fermée convexe. Supposons d'abord que toute droite d'appui coupe Γ en un seul point. Soient alors sur Γ trois points A, B, C auxquels on peut mener des droites d'appui formant un triangle non dégénéré. Alors chacun des arcs convexes AB, BC, CA est une représentation graphique d'une fonction (O) par rapport à des axes de coordonnées convenables. Ceci permet de définir des lignes polygonale circonscrites à Γ , en raccordant des lignes polygonales circonscrites aux arcs AB, BC, CA . Nous arrivons ainsi à définir des polygones circonscrits à Γ en variant les points A, B, C sur Γ . Il est alors clair ce qu'on entend par le périmètre (la longueur) $l(\Gamma)$ de Γ et le périmètre $l(P)$ d'un polygone P circonscrit à Γ .

On peut étendre la définition à des courbes convexes Γ contenant aussi des portions rectilignes. On a toujours l'inégalité

$$(51) \quad l(\Gamma) \leq l(P)$$

P étant un polygone circonscrit à Γ .

L'inégalité (51) est d'ailleurs un cas particulier d'une propriété plus générale qui sera signalée plus loin.

31. On peut démontrer que si dans le plan, Γ, Γ_1 sont les frontières de deux ensembles convexes bornés, dont le second contient le premier, on a

$$(52) \quad l(\Gamma) \leq l(\Gamma_1).$$

Sans qu'il soit nécessaire de considérer le cas général, supposons seulement que la courbe Γ est complètement intérieure à Γ_1 . Soient alors

A, B deux points de Γ auxquels on peut mener des droites d'appui parallèles et soient A', A'' , respectivement B', B'' les points où ces droites d'appui coupent la courbe Γ_1 . Désignons encore par a', a'', b', b'' les longueurs des segments de droites $A'A, A''A, B'B, B''B$, par l_1, l_2 les longueurs des arcs A_mB, A_nB de Γ et par L_1, L_2, L_3, L_4 les longueurs des arcs $A'\alpha A'', A''\beta B', B'\gamma B'', B''\delta A'$ de Γ_1 (voir la figure 8). Compte tenu de l'additivité de la longueur on a $l(\Gamma) = l_1 + l_2$, $l(\Gamma_1) = L_1 + L_2 + L_3 + L_4$. Or d'après les résultats précédents on a $a' + a'' < L_1$,

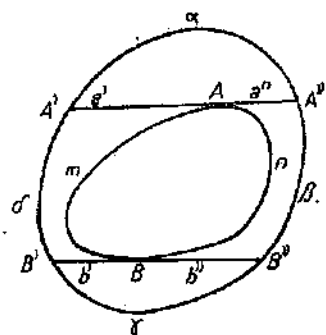


Fig. 8

$b' + b'' < L_3, l_1 < a'' + L_3 + b'', l_2 < a' + L_3 + b',$ d'où $h(\Gamma) < h(\Gamma_1)$,
 donc l'inégalité (52).
 Il est facile à démontrer que dans (52) l'égalité n'est possible que si
 Γ et Γ_1 coïncident.

BIBLIOGRAPHIE

1. HILLE, EINAR, *Analysis*, 1^{er} vol., 1964.
2. MITRINOVIC, D. S., *Analytic inequalities*, 1970.
3. POPOVICIU, T., *Notes sur les fonctions convexes d'ordre supérieur (IX)*, Bull. Math. de la soc. roumaine des Sci., 1942, 43, 85-141.
4. POPOVICIU, T., *Curs de analiză matematică*, III^e part., 1974.
5. TZITZEICA, G., *O proprietate a sinusului*, Gazeta matematică, 1912/13, 18, 407.