

CONSIDERAȚII TEORETICE ASUPRA UTILIZĂRII PRACTICE A UNOR FORMULE DE INTERPOLARE

DE

TIBERIU POPOVICIU

MEMBRU CORRESPONDENT AL ACADEMIEI R.P.R.

Comunicare prezentată în ședința din 10 Iulie 1951

1. Polinomul lui Lagrange relativ la funcția $f(x)$ și la nodurile de interpolare

$$x_1, x_2, \dots, x_{n+1} \quad (1)$$

intervine de obicei în utilizarea ei practică în formula de interpolare a lui Newton ¹⁾.

$$f(x) = \sum_{i=0}^n (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_i) [x_1, x_2, \dots, x_{i+1}; f] = R(x). \quad (2)$$

Coeficienții

$$[x_1, x_2, \dots, x_{i+1}; f], \quad i = 0, 1, \dots, n$$

ai acestei formule sunt elementele de pe latura superioară (descendentă) a tabloului (triunghiular) de diferențe divizate

x	$f(x)$					
x_1	$f(x_1)$					
x_2	$f(x_2)$	$[x_1, x_2; f]$				
x_3	$f(x_3)$	$[x_2, x_3; f]$	$[x_1, x_2, x_3; f]$			
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$[x_2, x_3, x_4; f]$	$[x_1, x_2, x_3, x_4; f]$		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$[x_1, x_2, \dots, x_{n+1}; f]$	
x_n	$f(x_n)$	$\vdots$	$[x_{n-1}, x_n, x_{n+1}; f]$	$\dots$	$\dots$	
x_{n+1}	$f(x_{n+1})$	$[x_n, x_{n+1}; f]$				

¹⁾ Termenul pentru $i = 0$ se reduce la $[x_1; f] = f(x_1)$. Ne folosim de notațiile $[x_1, x_2, \dots, x_i; f]$ pentru diferența divizată a funcției $f(x)$ pe nodurile $x_1, x_2, \dots, x_i$.

4. Să presupunem că $(n+1)!$ se divide cu 2^n și fie atunci $(n+1)! = 2^n p$. Se poate pune însă întrebarea dacă nu pot fi găsite p tablouri de diferențe divizate, obținute prin permutări convenabile ale nodurilor (1), astfel ca ele să conțină toate cele $(n+1)!$ formule (5). În acest caz ar trebui ca fiecare din cele $(n+1)!$ formule (5), să aparțină unuia și numai unui singur tablou dintre cele p tablouri considerate. Vom arăta că *acest lucru este imposibil afară de cazul banal $n = 1$* .

În primul rând, trebuie să observăm că $(n+1)!$ se divide cu 2^n dacă și numai dacă $n+1$ este o putere a lui 2. Într'adevăr, se știe din teoria numerelor că factorul prim 2 figurează în $(n+1)!$ exact la puterea $(n > 1)$

$$n+1 = \sum_{i=0}^k a_i$$

unde $a_0 a_1 \dots a_k$ este numărul $n+1$ scris în sistemul diadic. Trebuie deci să avem $\sum_{i=0}^k a_i = 1$, de unde $a_0 = 1, a_1 = a_2 = \dots = a_k = 0$, adică

$$n+1 = 2^k \quad (10)$$

Mai exact, se vede că $(n+1)!$ se divide cu 2^n numai dacă avem (10) și atunci cățul p este un număr impar.

Să presupunem acum că avem (10) și că $n > 1$, deci $k > 1$. Fie atunci p tablouri de diferențe divizate. Dacă toate cele $(n+1)!$ formule (5) ar aparține la aceste p tablouri, ar trebui în particular să aparțină acestor tablouri exact $n!$ formule cu primul nod x_1 . Însă, oricărui tablou de diferențe divizate aparține cel puțin o formulă cu primul nod x_1 și am văzut că numărul formulelor cu primul nod x_1 care aparține unui tablou nu poate fi decât

$$1, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \dots, \binom{n}{n-1} \text{ sau } \binom{n}{n}$$

Fie atunci a numărul tablourilor, dintre cele p considerate, cărora aparțin $\binom{n}{i}$ formule cu primul nod x_1 . Trebuie să avem

$$\left. \begin{aligned} a_0 + a_1 + \dots + a_n &= p \\ a_0 + \binom{n}{1} a_1 + \binom{n}{2} a_2 + \dots + a_n &= n! \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Acest lucru este însă imposibil. Într'adevăr, din (11) deducem

$$\sum_{i=1}^{n-1} \left[\binom{n}{i} - 1 \right] a_i = n! - p$$

care este imposibil, deoarece în ipoteza (10) se demonstrează că toate numerele

$$\binom{n}{i} - 1, i = 1, 2, \dots, n-1 \text{ sunt pare, iar numărul } n! - p \text{ este impar.}$$

5. Să presupunem că nodurile (1) sunt în ordinea crescătoare, deci că $x_1 < x_2 < \dots < x_{n+1}$ și fie x un punct fix al axei reale diferit de aceste noduri. Ne propunem atunci să determinăm permutarea (4) astfel ca numerele

$$|(x - x_{v_1})(x - x_{v_2}) \dots (x - x_{v_i})|, i = 1, 2, \dots, n \quad (12)$$

să fie cele mai mici posibile.

În utilizarea formulei (5) a lui Newton, această proprietate se pune atunci când voim ca multiplicatorul $l(x)$ al restului (6) să fie cel mai mic posibil în valoare absolută, atunci când oprim această formulă succesiv la $1, 2, \dots, n+1$ termeni. Într'adevăr, avem, pe baza formulelor (5), (6), (7),

$$f(x) = \sum_{i=0}^k (x - x_{v_1})(x - x_{v_2}) \dots (x - x_{v_i}) [x_{v_1}, x_{v_2}, \dots, x_{v_{i+1}}; f] + \\ + (x - x_{v_1})(x - x_{v_2}) \dots (x - x_{v_{k+1}}) [x, x_{v_1}, x_{v_2}, \dots, x_{v_{k+1}}; f].$$

Este ușor de văzut că problema noastră este echivalentă cu următoarea: Să se determine permutarea (4) astfel ca șirul

$$|x - x_{v_1}|, |x - x_{v_2}|, \dots, |x - x_{v_{n+1}}| \quad (13)$$

să fie nedescrescător.

Prin această proprietate, permutarea (4) nu este neapărat determinată în mod unic, dar vom demonstra că:

x fiind un punct dat al axei reale, orice permutare (4) pentru care șirul (13) este nedescrescător este o permutare consecutivă permutării inițiale $1, 2, \dots, n+1$.

Proprietatea aceasta subsistă indiferent de faptul că x coincide sau nu cu un nod.

Pentru a demonstra proprietatea va fi destul să arătăm că dacă $v_1, v_2, \dots, v_i$ sunt numere naturale consecutive într'o anumită ordine și numerele naturale $v_1, v_2, \dots, v_i, v_{i+1}$ se bucură de această proprietate.

Să observăm întâi că avem

$$|x - x_r| = \min_{i=1, 2, \dots, n+1} (|x - x_i|)$$

dacă și numai dacă

$$\frac{x_{r-1} + x_r}{2} \leq x \leq \frac{x_r + x_{r+1}}{2}$$

$$(x \leq \frac{x_1 + x_2}{2} \text{ pentru } r = 1 \text{ și } \frac{x_n + x_{n+1}}{2} \leq x \text{ pentru } r = n+1)$$

Să presupunem acum că $v_1, v_2, \dots, v_i$ sunt i numere naturale consecutive și fie $s, s+1, \dots, s+i-1$ aceste numere. Avem atunci

$$|x - x_{s+i-1}| \leq |x - x_{s-1}|, \quad |x - x_s| \leq |x - x_{s+1}|$$

deci

$$\frac{x_{s-1} + x_{s+i-1}}{2} \leq x \leq \frac{x_s + x_{s+1}}{2}$$

prin urmare cu atât mai mult

$$x_{s-1} < x < x_{s+i}$$

și pe baza observației de mai sus

$$\min (|x - x_j|) = \min (|x - x_{s-1}|, |x - x_{s+i}|)$$

$$j = 1, 2, \dots, s-1, s+i, s+i+1, \dots, n+1$$

adică $v_{i+1} = s-1$ sau $s+i$, tocmai ceea ce trebuia demonstrat.

În cazul când $s = 1$, sau $s+i-1 = n+1$, demonstrația se modifică puțin simplificându-se și este inutil să o mai reproducem.

Dacă permutarea (4) se bucură de proprietatea că este posibil de a găsi un x , astfel ca șirul (13) să fie nedescrescător, vom zice că această permutare sau formula (5) corespunzătoare verifică proprietatea de minimum.

6. Formulele de interpolare (5), pentru care șirul (13) devine nedescrescător pentru un x convenabil, aparțin deci toate tabloului (3) format cu nodurile luate în ordinea crescătoare.

Nu toate cele 2^n formule (5) aparținând tabloului (3) verifică proprietatea de minimum studiată.

Se poate afirma cu siguranță că cel puțin $2n$ dintre aceste formule verifică proprietatea de minimum. Și anume, dacă luăm succesiv pentru x mijloacele intervalelor (x_i, x_{i+1}) , $i = 1, 2, \dots, n$, vedem că permutările

$$1, 2, \dots, n+1 \quad ; \quad n+1, n, \dots, 2, 1$$

precum și cel puțin câte una dintre permutările de formele

$$i+1, i+2, \dots \quad ; \quad i+1, i, \dots$$

verifică proprietatea de minimum pentru $i = 1, 2, \dots, n-1$.

Pentru $n = 1, 2$ avem $2n = 2^n$, deci, în aceste cazuri, cele 2, respectiv 4, formule aparținând tabloului (3), verifică proprietatea de minimum.

Dacă $n = 3$ avem $2^n - 2n = 2$. Luând succesiv pentru x mijloacele intervalor (x_1, x_2) , (x_1, x_3) , (x_2, x_4) , (x_3, x_4) , se verifică că 6 din cele 8 permutări consecutive permutării 1, 2, 3, 4 verifică întotdeauna proprietatea de minimum. Permutările rămase, care sunt 2, 3, 4, 1 și 3, 2, 1, 4, verifică proprietatea de minimum dacă avem respectiv

$$\frac{x_1 + x_4}{2} \leq x \leq \frac{x_2 + x_3}{2} \text{ și } \frac{x_2 + x_3}{2} \leq x \leq \frac{x_1 + x_4}{2}$$

Se vede că, dacă $x_1 + x_4 \neq x_2 + x_3$, 7 dintre cele 8 formule aparținând tabloului (3) verifică proprietatea de minimum, iar dacă $x_1 + x_4 = x_2 + x_3$, toate cele 8 formule verifică proprietatea de minimum.

Dacă $n \geq 4$, nu toate cele 2^n permutări consecutive lui 1, 2, ..., $n+1$ verifică proprietatea de minimum. Astfel, este imposibil ca cele patru permutări (în care este suficient să scriem primele 5 elemente)

$$2, 3, 4, 1, 5, \dots$$

$$3, 2, 1, 4, 5, \dots$$

$$2, 3, 4, 5, 1, \dots$$

$$3, 2, 4, 1, 5, \dots$$

să verifice proprietatea. Într'adevăr, pentru cazul contrar ar trebui să avem $x_1 + x_4 = x_2 + x_3$ și $x_1 + x_5 = x_2 + x_3$ deci $x_4 = x_5$, ceea ce este în contradicție cu ipoteza că nodurile sunt distincte.

O analiză mai amănunțită ne arată că în cazul $n = 4$, dintre cele 16 formule (5) aparținând tabloului (3), cel puțin 11 și cel mult 14 verifică proprietatea de minimum.

Ar fi interesant de văzut, pentru n oarecare, care este numărul minim ($\geq 2n$) și care este numărul maxim ($< 2^n$ dacă $n > 3$) de permutări consecutive permutării inițiale care pot verifica proprietatea de minimum.

Pentru o configurație dată de noduri numărul formulelor care verifică proprietatea de minimum se poate determina ușor. Pentru determinarea acestui număr nu este nevoie să examinăm monotonia șirului (13) pentru toate valorile lui x , ci din motive de continuitate, numai acele valori ale lui x pentru care șirul (13) este nedescrescător fără a fi crescător. Aceasta revine la a examina valorile (în număr finit) ale lui x , pentru care avem

$$|x - x_r| = |x - x_s| \quad (r \neq s)$$

egalitate care nu poate avea loc decât dacă

$$x = \frac{x_r + x_s}{2}$$

Este destul deci să examinăm numai punctele x care coincid cu mijloacele segmentelor determinate de două noduri.

În particular, dacă nodurile (1) sunt echidistante, punctele x care intervin sunt nodurile înseși precum și mijloacele segmentelor determinate de câte două noduri consecutive.

O enumerare detaliată, pe care nu o mai reproducem, ne conduce la rezultatul că dacă nodurile sunt echidistante, numărul formulelor (5) aparținând tabloului (3) și care verifică proprietatea de minim este egal cu

$$4 \cdot 2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} + 2 \cdot 3^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} - 2n - 6$$

unde $[\alpha]$ este întregul cuprins în α .

7. Pentru aplicarea formulei de interpolare, în punctul x se va alege cea formulă (5) care verifică proprietatea că șirul (13) este nedescrescător.

Să presupunem, în particular, că nodurile sunt simetrice față de un punct al axei reale. Acest punct poate fi ales originea 0. Trebuie atunci să distingem două cazuri, după cum nodurile sunt în număr impar sau par. Dacă presupunem că se interpolează în vecinătatea originii, trebuie de asemenea să distingem două cazuri după cum punctul x este la stânga sau la dreapta lui 0.

Cazul I. Număr impar de noduri. Nodurile în ordine crescătoare se pot scrie atunci ($n = 2k$)

$$-t_k, -t_{k-1}, \dots, -t_1, 0, t_1, t_2, \dots, t_k$$

iar permutările care verifică proprietatea de minimum corespund următoarelor permutări ale nodurilor

$$0, -t_1, t_1, -t_2, t_2, \dots, -t_k, t_k$$

$$0, t_1, -t_1, t_2, -t_2, \dots, t_k, -t_k$$

după cum x este la stânga sau la dreapta lui 0.

Dacă x este suficient de aproape de origine, acestea sunt de altfel singurele permutări care verifică proprietatea de minimum.

Formulele de interpolare corespunzătoare sunt generalizări cunoscute ale unor formule ale lui Euler, la care se reduce când nodurile sunt echidistante. Făcând media aritmetică a acestor formule, se deduce o generalizare cunoscută a formulei de interpolare a lui Stirling. Inutil să scriem aici explicit aceste formule.

Cazul II. Număr par de noduri. Nodurile în ordine crescătoare se pot scrie atunci ($n = 2k - 1$)

$$-t_k, -t_{k-1}, \dots, -t_1, t_1, t_2, \dots, t_k$$

iar permutările care verifică proprietatea de minimum corespund următoarelor permutări ale nodurilor

$$-t_1, t_1, -t_2, t_2, \dots, -t_k, t_k$$

$$t_1, -t_1, t_2, -t_2, \dots, t_k, -t_k$$

după cum x este la stânga sau la dreapta lui 0. Aceste permutări sunt de altfel singurele care verifică proprietatea de minimum dacă x este suficient de aproape de origine.

Formulele de interpolare corespunzătoare sunt generalizări cunoscute ale altor formule ale lui Euler, care de altfel se reduce dacă nodurile sunt echidistante. Făcând media aritmetică a acestor două formule, obținem o generalizare cunoscută a formulei de interpolare a lui Bessel. Inutil să mai scriem explicit aceste formule.

Proprietatea de minimum pe care am stabilit-o, constituie o justificare a utilizării acestor formule, în cazul când se interpolează în mijlocul tabloului diferențelor divizate.

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СООБРАЖЕНИЯ ОТНОСИТЕЛЬНО ПРАКТИЧЕСКОГО ПРИМЕНЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ФОРМУЛ ИНТЕРПОЛЯЦИИ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

Всякой перестановке данных узлов (1) интерполяции соответствует одна формула интерполяции (5) Ньютона. Коэффициенты (8) этой формулы имеются в таблице разделенных разностей. Наиболее выгодной является таблица (3), составленная из узлов, расположенных в порядке возрастающих величин. Доказывается, что формулы интерполяции (5), для которых остаток лучше всего ограничен для всех частей этих формул, имеют свои коэффициенты, заключенные в составленных таким способом таблицах (3).

Эти замечания являются оправданием применения классических формул Эйелра, Стирлинга и Бесселя.

CONSIDÉRATIONS THÉORIQUES SUR L'UTILISATION PRATIQUE DE CERTAINES FORMULES D'INTERPOLATION

(RÉSUMÉ)

A toute permutation de noeuds (1) d'interpolation donnés, correspond une formule d'interpolation (5) de Newton. Les coefficients (8) de cette formule figurent dans le tableau des différences divisées. Le tableau le plus avantageux est le tableau (3) construit avec les noeuds pris dans l'ordre de grandeur croissante. On démontre que les formules d'interpolation (5) pour lesquelles le reste est le meilleur, pour toute section de ces formules, ont leurs coefficients compris dans le tableau ainsi construit.

Ces remarques constituent une justification de l'utilisation des formules classique d'Euler, de Stirling et de Bessel.