

P. 578

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÂNE
INSTITUTUL DE MATEMATICĂ

STUDII ȘI CERCETĂRI M A T E M A T I C E

Impr. 9.82/1953.



1—2
ANUL III
IANUARIE—IUNIE
1952

BCU Cluj-Napoca



PNATE 2014 01016

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÂNE

STUDII ȘI CERCETĂRI MATEMATICE

Tomul III, Nr. 1—2

Ianuarie—Iunie 1952

S U M A R

	<u>Pag.</u>
MIRON NICOLIESCU, Contribuțiuni la o analiză de tip hiperbolic a planului	7
THEODOR POPOVICIU, Asupra restului în unele probleme de derivare numerică. I. Câteva proprietăți ale formulelor de derivare numerică de exactitate maximă	63
MILU RUTIU, Studiul direcțiilor refrigeratoare într-un spațiu cu curvatură asfină	129
MICHAEL BENARDU, Asupra teoremelor de descompunere ale algebrei	263

ASUPRA RESTULUI ÎN UNELE FORMULE DE DERIVARE NUMERICĂ

(I) CÂTEVA PROPRIETĂȚI ALE FORMULELOR DE DERIVARE NUMERICĂ DE EXACTITATE MAXIMĂ

16

THERICU POPOMILU

MEMBRU CORRESPONDENT AL ACADEMIEI ROM. DE ȘTIINȚE

§ 1. Formule de exactitate maximă

1. O formulă de derivare numerică este o formulă care permite evaluarea aproximativă a valorii derivatelor de un anumit ordin dat al unei funcții, într'un punct dat, printr'o combinație liniară dată a valorilor funcției și a unui număr finit dintre derivatele sale succesive, luate într'un număr finit de puncte date.

O formulă de derivare numerică este deci o formulă de forma

$$f^{(r)}(x_0) = \sum_{j=0}^{r-1} a_{ij} f^{(j)}(x_0) + \sum_{i=1}^{r-1} \sum_{j=0}^{i-1} c_{ij} f^{(j)}(x_i) + R \quad (1)$$

care permite să scriem în $f^{(r)}(x_0)$, ca valoare aproximativă, suma din membrul al doilea (iară R). În această formulă coeficienții a_{ij} , $j = 0, 1, \dots, r-1$, $i = 1, 2, \dots, s$ sunt niște constante reale date, iar $f^{(j)}(x_0)$, $j = 0, 1, \dots, r-1$, $f^{(j)}(x_i)$, $j = 0, 1, \dots, i-1$, $i = 1, 2, \dots, s$ sunt valorile funcției $f(x)$ și ale derivatelor sale succesive $f'(x)$, $f''(x)$, ... în punctele date $x_0, x_1, x_2, \dots, x_s$.

Numărul R din membrul al doilea al formulei (1) este restul acestei formule. O expresie a restului rezultă din natura funcției $f(x)$, pentr'u o evaluare a erorii care se comite prin aproximația indicată a membrului întâi.

2. Tehnica să porzim de la început ipotezele care vor fi puse în lucrarea și care sunt referitoare la datele formulei (1). Totodată, vom fixa și câteva denumiri în legătură cu aceste date.

1^a. Punctele

$$x_0, x_1, \dots, x_s \quad (2)$$

de pe axa reală, presupunem distincte și în numărul de $s \geq 1$, le vom numi *nodurile* formulei de derivare numerică.

2°. Fiecărui nod x_i îi este atăsat un *ordin de multiplicitate* r_i . Numerele $r_1, r_2, \dots, r_s$ sunt numere întregi pozitive.

3°. Punctul x_0 este *diferit* de nodurile (2) și îl vom numi *punctul de derivare* al formulei (1).

4°. Punctului de derivare x_0 îi se atachează un *ordin de multiplicitate* r , presupunem *întreg pozitiv sau nul*.

5°. Numărul m , *întreg pozitiv sau nul*, îl vom numi *indicele de derivare* al formulei (1).

În fine relativ la funcția $f(x)$ vom face următoarea ipoteză, notând cu $[a, b]$ cel mai mic interval închis care conține nodurile și punctul de derivare.

6°. Funcția reală $f(x)$, de variabilă reală x , este definită și *continuă* în intervalul $[a, b]$. Altfel de arasta, se presupune că ea are derivate care intervin efectiv în formula (1) și cel puțin în punctele în care valorile acestor derivate figurează efectiv în formula (1)¹⁾.

Ipoteza continuității este făcută în vederea studiului restului formulei (1). Orice altă ipoteză făcută asupra datelor problemei va fi menționată în mod expres.

Există o mulțime infinită $\mathfrak{M}$ de formule de derivare numerică (1), care sunt obținute dând coeficienților a_j, a_{ij} , toate valorile reale posibile și având toate următoarele caracteristici comune:

1°. Nodurile, 2°. Ordinele de multiplicitate respective ale nodurilor, 3°. Punctul de derivare, 4°. Ordinul de multiplicitate al punctului de derivare, 5°. Indicele de derivare.

Este util să notăm cu $p = 1$ suma ordinelor de multiplicitate ale nodurilor, deci $r_1 + r_2 + \dots + r_s = p + 1$. Atunci $p \geq 0$ și $p + 1$ reprezintă *numărul total al nodurilor*, fiecare socotit cu ordinul său de multiplicitate.

Pentru toate formulele din $\mathfrak{M}$, numerele p, r, m sunt aceleași.

Fiecărei formule (1) din $\mathfrak{M}$ îi vom ataca două numere caracteristice în portanță: *ordinul* formulei și *gradul de exactitate* al formulei.

③ Ordinul formulei (1) servește la precizarea sumei ordinelor de derivare, care intervin efectiv în membrul al doilea. Pentru aceasta, vom defini în felul următor numerele $r'_1, r'_2, \dots, r'_s, r'$ atașate nodurilor și punctului de derivare:

$r'_i - 1$ este ordinul cel mai înalt de derivare care intervine efectiv în nodul x_i , deci,

$r'_i = 0$, dacă toți coeficienții $a_{ij}, j = 0, 1, \dots, r_i - 1$ sunt nuli;
 $a_{ij}, j = 1, \dots, r'_i - 1, a_{i, r'_i} \neq 0, a_{i, j} = 0, j = r'_i, r'_i + 1, \dots, r_i - 1$, dacă coeficienții a_{ij} nu sunt toți nuli, $i = 1, 2, \dots, s$.

$r' - 1$ este ordinul cel mai înalt de derivare care intervine efectiv în punctul x_0 în membrul al doilea, deci,

$r' = 0$, dacă $r = 0$ sau dacă toți coeficienții $a_j, j = 0, 1, \dots, r - 1$ sunt nuli.

$a_{j, r-1} \neq 0, a_j = 0, j = r, r + 1, \dots, r - 1$ dacă coeficienții a_j nu sunt toți nuli.

¹⁾ Acest fapt înseamnă că coeficientul a_j sau a_{ij} corespunzător este diferit de zero.

Avem atunci:

$$0 \leq r'_i \leq r_i, 0 \leq r' \leq r, i = 1, 2, \dots, s.$$

Egalitatea $r'_i = 0$, respectiv $r' = 0$, înseamnă că în punctul de derivare, respectiv nodul x_i , nu figurează efectiv în membrul al doilea al formulei (1). Egalitatea $r'_i = r_i > 0$, respectiv $r'_i = r_i$, înseamnă că coeficientul $a_{i, r_i - 1}$, respectiv $a_{r - 1}$, este diferit de zero.

Un calcul imediat ne dă atunci (conf. [3]).

$$R[(x - x_0)^{m+r} f(x)] = [(x - x_0)^{m+r} f(x)]_{x=x_0}^{(m+r)} = \frac{(m+r)!}{(m-r)!} f^{(m+r)}(x_0) \quad (4)$$

dacă m' este un număr întreg ≥ 0 . Pentru $m' > m$ această expresie este egală cu 0.

Pentru $m' = m$, numărul (4) este diferit de 0 pe baza ipotezelor făcute. Rezultă de aici existența gradului de exactitate al funcționalei $R[f]$. Mai rezultă că acest grad de exactitate este $\leq p + r + m$.

Este clar că gradul de exactitate este determinat în mod unic.

Gradul de exactitate al formulei triviale din [2] este egal cu $m + r + 1$. Iar ea se poate constata ușor.

5. Să considerăm polinomul de interpolare de gradul $p + r$

$$L(x_0, x_1, \dots, x_p, x'_1, x'_2, \dots, x'_{p+1}; f(x)) \quad (5)$$

relativ la funcția $f(x)$ și la sistemul de $p + r + 1$ noduri, format din punctul x_0 repetat de r ori și din punctele

$$x_1, x_2, \dots, x_{p+1} \quad (6)$$

care reprezintă nodurile (2), fiecare repetat de atâtea ori cât indică ordinul său de multiplicitate. Sistemul (6) reprezintă deci o renumerotare a nodurilor (2), ținând seama de multiplicitățile lor. Pentru fixarea notațiilor ne poate conveni să:

$$x_{r+j}, j=1, 2, \dots, p+1 = x_j, j=1, 2, \dots, p, \quad i=1, 2, \dots, s. \quad (7)$$

Dacă $r=0$, punctul x_0 nu este nod al polinomului și nu figurează în notația (5).

Polinomul (5) este polinomul de gradul cel mai mic care coincide cu funcția $f(x)$ în cele $p + r + 1$ noduri date. Prin aceasta se înțelege că, dacă un nod se repetă de k ori, polinomul (5), împreună cu primele sale $k-1$ derivate, coincide cu funcția $f(x)$ și cu primele sale $k-1$ derivate respective în acest nod. Polinomul (5) este deci în general polinomul lui Lagrange-Hermite [2], [3], care corespunde funcției și nodurilor puse în evidență prin notația (5), adică polinomul (unic) de gradul cel mai mic care verifică condițiile:

$$L(x_0, x_1, \dots, x_p, x'_1, x'_2, \dots, x'_{p+1}; f(x)) = f^{(j)}(x_i) \\ j=0, 1, \dots, r-1, \quad i=0, 1, \dots, s \quad (p_0=r).$$

Forma explicită a polinomului (5) este bine cunoscută [3], [14]. Vom menționa câteva din aceste rezultate sub forma utilizată aici.

Polinomul (5) este de forma

$$L(x_0, x_1, \dots, x_p, x'_1, x'_2, \dots, x'_{p+1}; f(x)) = \sum_{j=0}^r C_j(x) f^{(j)}(x_0) + \\ + \sum_{i=1}^s \sum_{j=0}^{r_i-1} C_{i,j}(x) f^{(j)}(x_i),$$

unde prima sumă din membrul al doilea dispăre dacă $r=0$. Aici $C_j(x) = C_{0,j}(x)$, $C_{i,j}(x)$ sunt polinoame de gradul $p+r$, complet determinate de condițiile

$$\left. \begin{aligned} 1^\circ. C_j^{(k)}(x_0) &= 0, \\ 2^\circ. C_{i,j}^{(k)}(x_i) &= 0, \text{ pentru } |k-j| = |v-i| \neq 0, \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

$$j=0, 1, \dots, r-1, \quad i=0, 1, \dots, s \quad (r_0=r).$$

Dacă punem

$$\left. \begin{aligned} c_j &= C_j^{(m+r)}(x_0), \quad j=0, 1, \dots, r-1, \\ c_{i,j} &= C_{i,j}^{(m+r)}(x_i), \quad j=0, 1, \dots, r_i-1, \quad i=1, 2, \dots, s \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

avem

$$L^{(m+r)}(x_0, x_1, \dots, x_p, x'_1, x'_2, \dots, x'_{p+1}; f(x)) = \sum_{j=0}^{r-1} c_j f^{(j)}(x_0) + \\ + \sum_{i=1}^s \sum_{j=0}^{r_i-1} c_{i,j} f^{(j)}(x_i) \quad (10)$$

și rezultă că

Dacă $m > p$, formula (4) ne dă, în particular,

$$R[(x - x_0)^{p+1} f(x)] = \frac{(m-r)!}{m!} f^{(m-r)}(x_0), R[(x - x_0)^{p+1} f(x)] = \frac{(m-r)!}{(m-1)!} f^{(m-r)}(x_0) \quad (12)$$

și polinoamele $f(x - x_0)^{p+1} f(x)$ și $(x - x_0)^{p+1} f(x)$ sunt respectiv de gradele efective $p+1-r+1$, $p+1-r+2$.

Dacă $m = 0$, avem $f(x_0) \neq 0$, pe baza ipotezelor făcute, iar dacă $m > 0$, fiindcă totuși și de lucru 1. se vede că nu putem avea în același timp

$$f^{(m)}(x_0) = 0, \quad f^{(m-1)}(x_0) = 0.$$

Deducem deci următoarea teoremă:

Teorema 1. Gradul de exactitate al formulei (E) este totdeauna $\leq p+r$.

Dacă $m > p$ acest grad de exactitate este egal cu $m-r+1$.

Dacă $m \leq p$, gradul de exactitate este egal cu $p-r$ dacă $f^{(m)}(x_0) \neq 0$ și este egal cu $p-r+1$ dacă $f^{(m)}(x_0) = 0$.

Mai rezultă de aici că (E) se reduce la formula triviale dacă și numai dacă $m > p$.

7. Fie (1) o formulă din $\mathcal{M}$, cu gradul de exactitate $\geq p+r$. Vom arăta că această formulă se reduce la formula (E). Pentru aceasta, să presupunem contrariul. Atunci, cel puțin unul din coeficienții $a_i = a_{0,i}$, $a_{1,i}$ este diferit de coeficientul $c_i = c_{0,i}$, $c_{1,i}$ respectiv. Pentru moment, să mulțim cu $R[f]$ restul formulei (1) și cu $R_1[f]$ restul formulei (E).

Pentru breșea uililor să presupunem că

$$a_{p,i} - c_{p,i} \begin{cases} \neq 0, & i = \alpha \\ = 0, & i = \alpha+1, \alpha+2, \dots, r_1-1. \end{cases} \quad (x_0 = 0) \quad (13)$$

Scăzând membru cu membru formula (E) din formula (1) și rezolvând în raport cu $f^{(m)}(x_0)$, găsim o formulă de forma

$$f^{(m)}(x_0) = \sum_{i=0}^{\alpha-1} a_i f^{(i)}(x_0) + \sum_{i=1}^{r_1} \sum_{j=0}^{\alpha} a_{i,j} f^{(i+j)}(x_0) + R_2[f] \quad (14)$$

unde, dacă $\beta \neq 0$ în a doua sumă am membrul al doilea în loc de $c_{p,i}$, $c_{1,i}$ se înlocuiește cu $a_{p,i}$, $c_{1,i}$ respectiv. Restul $R_2[f]$ al formulei (14) este

$$R_2[f] = \frac{R_1[f] - R[f]}{a_{0,\alpha} - c_{0,\alpha}} \quad (15)$$

Avem, bineînțeles, $\alpha \leq r_0 - 1$ ($r_0 = r$).

Pentru formula (14), numerele p, r , se devin $p+r-r_1$, $\max\{\alpha-1, 0\}$, 0 respectiv, deci, pe baza unei observații din punctul 4, gradul de exactitate

al acestei formule este $\leq p+r-r_1 + \max\{\alpha-1, 0\} \leq p+r-r_1 + \alpha \leq p+r-1$. Însă din (15) se vede că gradul de exactitate este $\geq p+r$. Această contradicție ne arată că ipoteza (13) este inadmisibilă.

Putem dar enunța teorema următoare:

Teorema 2. În mulțimea $\mathcal{M}$ a formulilor de derivare numerică (1) există o formulă, și numai una singură, de grad de exactitate maxim și această formulă este formula (E).

Pentru acest motiv, formula (E) se va numi o formulă de derivare numerică de exactitate maximă.

8. Putem acum preciza ordinul formulei (E). Acest ordin este $\leq p+r+1$. Ordinul formulei poate să fie însă și mai mic decât $p+r+1$, pentru că anumiți coeficienți c_i , $c_{1,i}$ pot fi nuli.

Teorema 3. Dacă $m \leq p$, gradul de exactitate al formulei (E) este cel mult egal cu ordinul său. Gradul de exactitate și ordinul, sunt egale dacă și numai dacă x_0 este o rădăcină, diferită de aduri, a unuia din polinoamele

$$l^{(m)}(x), l^{(m+1)}(x), \left[\frac{l(x)}{x-x_i} \right]^{(m)}, \quad i = 1, 2, \dots, s \quad (10)$$

În general, gradul de exactitate este $p+r$ și ordinul este $p+r+1$. Gradul de exactitate și ordinul sunt ambii egali cu $p+r+1$, dacă x_0 este o rădăcină a primului polinom (16). Gradul de exactitate și ordinul sunt ambii egali cu $p+r$, dacă x_0 este o rădăcină a unuia din ultimele $s-1$ polinoame (16).

9. Din analiza precedentă rezultă că două varietate dintre polinoamele (16) nu pot avea o rădăcină comună diferită de un nod. Acest lucru se poate demonstra și direct. Dacă $m=0$, polinoamele, alară eventual de al doilea, nu au rădăcini diferite de aduri. De asemenea, proprietatea este imediată dacă $m=p$, pentru că atunci

$$l^{(p+1)}(x_0) = (p-1)! \neq 0, \left[\frac{l(x)}{x-x_i} \right]^{(p)} = p! \neq 0, \quad i = 1, 2, \dots, s$$

Să examinăm cazul general.

Din lemma 1 rezultă că orice rădăcină comună a primelor două polinoame (16) este un nod de ordin de multiplicitate cel puțin egal cu $m+2$.

Ponând în evidență unul din ultimele s polinoame (16), putem scrie

$$l^{(m)}(x) = \left[\frac{l(x)}{x-x_1} \right]^{(m)} (x-x_1) + m \left[\frac{l(x)}{x-x_1} \right]^{(m-1)}$$

Se vede de aici că orice rădăcină comună a polinoamelor $l^{(m)}(x), \left[\frac{l(x)}{x-x_i} \right]^{(m)}$

este o rădăcină comună a polinoamelor $\left[\frac{l(x)}{x-x_i} \right]^{(m)}, \left[\frac{l(x)}{x-x_1} \right]^{(m-1)}$ și, pe baza

lemma 1, aceasta nu poate să fie decât un nod de ordin de multiplicitate cel puțin egal cu $m+1$.

Avem de asemenea

$$\left[\frac{l(x)}{x-x_\alpha} \right]^{(m)} = \left[\frac{l(x)}{(x-x_\alpha)(x-x_\beta)} \right]^{(m)} (x-x_\beta) + m \left[\frac{l(x)}{(x-x_\alpha)(x-x_\beta)} \right]^{(m-1)}$$

$$\left[\frac{l(x)}{x-x_\beta} \right]^{(m)} = \left[\frac{l(x)}{(x-x_\alpha)(x-x_\beta)} \right]^{(m)} (x-x_\alpha) + m \left[\frac{l(x)}{(x-x_\alpha)(x-x_\beta)} \right]^{(m-1)}$$

de unde se vede că, dacă $\alpha \neq \beta$, orice rădăcină comună a acestor polinoame este o rădăcină comună a polinoamelor

$$\left[\frac{l(x)}{(x-x_\alpha)(x-x_\beta)} \right]^{(m)}, \left[\frac{l(x)}{(x-x_\alpha)(x-x_\beta)} \right]^{(m-1)}$$

și deci, pe baza lemma 1, este un nod de ordin de multiplicitate cel puțin egal cu $m+1$.

În fine avem și

$$l^{(m+1)}(x) = \left[\frac{l(x)}{x-x_i} \right]^{(m+1)} (x-x_i) + (m+1) \left[\frac{l(x)}{x-x_i} \right]^{(m)} \quad (17)$$

care ne arată că orice rădăcină comună a polinoamelor

$$l^{(m+1)}(x), \left[\frac{l(x)}{x-x_i} \right]^{(m)} \quad (18)$$

este o rădăcină comună a polinoamelor

$$\left[\frac{l(x)}{x-x_i} \right]^{(m+1)} (x-x_i), \left[\frac{l(x)}{x-x_i} \right]^{(m)}.$$

Rezultă că orice rădăcină a polinoamelor (18) este sau nodul x_i , sau, pe baza lemma 1, un nod de ordin de multiplicitate cel puțin egal cu $m+2$.

Din analiza precedentă mai rezultă că proprietatea coeficienților c_{r-1}, c_r, c_{r+1} (dacă $r > 1$) de a nu putea fi ambii nuli este o consecință a faptului că polinoamele $l^{(m+1)}(x), l^{(m+2)}(x)$ nu pot avea o rădăcină comună diferită de un nod. Acest din urmă fapt rezultă din lemma 1, pe baza căreia orice rădăcină comună a acestor polinoame este un nod de ordin de multiplicitate cel puțin egal cu $m+3$.

De asemenea, faptul că $c_{r-1}, c_r,$

10. Să revinem la formula (E). Vom spune că această formulă este *excepțională*, dacă ordinul său este egal cu gradul său de exactitate.

Formula (E) devine excepțională sub trei aspecte diferite: 1°. Gradul de exactitate se mărește cu o unitate, 2°. Numărul r' , atașat punctului de derivare, scade cu o unitate dela r ($r' = r - 1$), 3°. Numărul r'_i , atașat unui nod x_i , scade cu o unitate dela r'_i ($r'_i = r_i - 1$).

Din rezultatele dela punctul 8 rezultă însă că cele trei aspecte revin unul la altul prin trecerea formulei din mulțimea $\mathfrak{M}$ într-o mulțime anahagă $\mathfrak{M}_1$, prin următoarele modificări ale caracteristicilor lui $\mathfrak{M}$.

Dacă formula prezintă aspectul 1° în $\mathfrak{M}$, atunci ea prezintă:

Aspectul 2° în mulțimea $\mathfrak{M}_1$, obținută prin mărirea cu o unitate a ordinului de multiplicitate a punctului de derivare și mărirea cu o unitate a indicelui de derivare.

Aspectul 3° în mulțimea $\mathfrak{M}_1$, obținută prin mărirea cu o unitate a ordinului de multiplicitate a nodului respectiv.

Dacă formula prezintă aspectul 2° în $\mathfrak{M}$, ea prezintă:

Aspectul 1° în mulțimea $\mathfrak{M}_1$, obținută prin micșorarea cu o unitate a ordinului de multiplicitate a punctului de derivare și mărirea cu o unitate a indicelui de derivare.

Aspectul 3° în mulțimea $\mathfrak{M}_1$, obținută prin micșorarea cu o unitate a ordinului de multiplicitate a punctului de derivare, mărirea cu o unitate a indicelui de derivare și mărirea cu o unitate a ordinului de multiplicitate a nodului respectiv.

Dacă formula prezintă aspectul 3° în $\mathfrak{M}$, ea prezintă:

Aspectul 1° în mulțimea $\mathfrak{M}_1$, obținută prin micșorarea cu o unitate a ordinului de multiplicitate a nodului respectiv.

Aspectul 2° în mulțimea $\mathfrak{M}_1$, obținută prin mărirea cu o unitate a ordinului de multiplicitate a punctului de derivare, micșorarea cu o unitate a indicelui de derivare și micșorarea cu o unitate a ordinului de multiplicitate a nodului respectiv.

11. Echivalența celor trei aspecte ale excepționalității se poate exprima prin formule. Pentru a stabili aceste formule să reconsiderăm formulele generale:

$$L(x_1, x_2, \dots, x_{k+1}; f, x) = L(a_1, a_2, \dots, a_k; f, x) + \prod_{i=1}^k (x - x_i) \cdot [x_1, a_2, \dots, x_{k+1}; f]. \quad (20)$$

$$L(x_1, x_2, \dots, x_{k+1}; f, x) = L(x_1, a_2, \dots, a_k; f, x) + \dots + (a_{k+1} - x) \prod_{i=1}^k (x - a_i) \cdot [x_1, a_2, \dots, x_{k+1}; f]. \quad (21)$$

În aceste formule, $[x_1, x_2, \dots, x_{k+1}; f]$ este diferența divizată de ordinul k a funcției $f(x)$ pe cele $k+1$ noduri $x_1, x_2, \dots, x_{k+1}$, distincte sau nu. Presupunem că se cunosc definiția și principalele proprietăți ale diferențelor divizate, precum și de altfel ale polinoamelor de interpolare pe noduri distincte sau nu [5].

Formula (20) ne dă, în particular

$$\begin{aligned} & L(x_0, x_1, \dots, x_0; x'_1, x'_2, \dots, x'_{k+1}; f, x) = \\ & \quad \cdot L(x_0, x_1, \dots, x_0; x'_1, x'_2, \dots, x'_{k+1}; f, x) + \\ & \quad = (x - x_0)^r f(x) [x_0, x_1, \dots, x_0; x'_1, x'_2, \dots, x'_{k+1}; f] \\ & \quad = L(x_0, x_1, \dots, x_0; x'_1, x'_2, \dots, x'_{k+1}; x; f, x) = \\ & \quad = (x - x_0)^r f(x) [x_0, x_1, \dots, x_0; x'_1, x'_2, \dots, x'_{k+1}; x; f]. \end{aligned}$$

Derivând de $r-1$ ori și ținând seama de $x^{(r)}|_{x_0} = 0$, deducem

$$\begin{aligned} & L^{(r-1)}(x_0, x_1, \dots, x_0; x'_1, x'_2, \dots, x'_{k+1}; f, x_0) = \\ & \quad \cdot L^{(r-1)}(x_0, x_1, \dots, x_0; x'_1, x'_2, \dots, x'_{k+1}; f, x_0) \\ & \quad = L^{(r-1)}(x_0, x_1, \dots, x_0; x'_1, x'_2, \dots, x'_{k+1}; x; f, x_0) \cdot f^{(r-1)}(x_0) = 0 \end{aligned}$$

care indică trecerea formulei dela aspectul 1° la aspectele 2° și 3° respectiv. De asemenea, formulele (20), (21) ne dau

$$\begin{aligned} & L(x_1, x_2, \dots, x_0; x'_1, x'_2,$$

Derivând de $m+1$ ori și luând seama de $f^{(m+1)}(x_0) = 0$, deducem

$$\begin{aligned} L^{(m+1)}(\underbrace{x_0, x_0, \dots, x_0}_r, x'_1, x'_2, \dots, x'_{p+1}; f|x_0) &= \\ &= L^{(m+r)}(\underbrace{x_0, x_0, \dots, x_0}_{r-1}, x'_1, x'_2, \dots, x'_{p+1}; f|x_0) = \\ &= L^{(m+r)}(\underbrace{x_0, x_0, \dots, x_0}_{r-1}, x'_1, x'_2, \dots, x'_{p+1}, x_1; f|x_0), \quad [f^{(m+1)}(x_0) = 0] \end{aligned}$$

care indică trecerea formulei dela aspectul 2° la aspectele 1° și 3° respectiv. Tot formulele (20), (21) ne dau

$$\begin{aligned} L(\underbrace{x_0, x_0, \dots, x_0}_r, x'_1, x'_2, \dots, x'_{p+1}; f|x) &= \\ &= L(\underbrace{x_0, x_0, \dots, x_0}_r, x'_1, x'_2, \dots, x'_p; f|x) + \\ &+ (x - x_0)^r \frac{f(x)}{x - x_0} (\underbrace{x_0, x_0, \dots, x_0}_r, x'_1, x'_2, \dots, x'_{p+1}; f|x) = \\ &= L(\underbrace{x_0, x_0, \dots, x_0}_r, x'_1, x'_2, \dots, x'_p; f|x) + \\ &+ (x - x_0)(x - x_0)^r \frac{f(x)}{x - x_0} (\underbrace{x_0, x_0, \dots, x_0}_r, x'_1, x'_2, \dots, x'_{p+1}; f|x) \end{aligned}$$

unde $x'_1, x'_2, \dots, x'_p$ sunt nodurile (6), de unde este suprimat nodul x_1 . Derivând de $m+1$ ori și luând seama de $\left[\frac{f(x)}{x - x_0} \right]^{(m)}_{x=x_0} = 0$, se deduce

$$\begin{aligned} L^{(m+1)}(\underbrace{x_0, x_0, \dots, x_0}_r, x'_1, x'_2, \dots, x'_{p+1}; f|x_0) &= \\ &= L^{(m+r)}(\underbrace{x_0, x_0, \dots, x_0}_r, x'_1, x'_2, \dots, x'_p; f|x_0) = \\ &= L^{(m+r)}(\underbrace{x_0, x_0, \dots, x_0}_{r+1}, x'_1, x'_2, \dots, x'_p; f|x_0), \quad \left[\left(\frac{f(x)}{x - x_0} \right)^{(m)}_{x=x_0} = 0 \right] \end{aligned}$$

care arată trecerea dela aspectul 3° la aspectele 1° și 2° respectiv.

Noțiunea de formulă de exactitate maximă excepțională este astfel complet clarificată.

12. Fie $\mathcal{R}^s$ reștelea mulțimilor $\mathcal{R}$, obținute variind punctul de derivare x_0 și lăsând neschimbate celelalte caracteristici ale lui $\mathcal{R}$. Există atunci un număr finit de formule excepționale în $\mathcal{R}^s$. Acest număr este egal cu numărul total al rădăcinilor distincte de noduri ale polinoamelor (15) dacă $r > 0$ și este egal cu numărul total al rădăcinilor distincte de noduri ale primului și ultimelor s polinoame (16) dacă $r = 0$.

Rădăcinile polinomului $L^{(m)}(x)$ sunt de două feluri. Unele, sau chiar unele improprii, provin din multiplicitatea nodurilor. Acestea sunt toate nodurile, dacă $m = 0$, și sunt acele noduri care sînt și rădăcini ale polinomului $L^{(m-1)}(x)$, dacă $m > 0$. Orice rădăcină improprie este socotită cu ordinul său de multiplicitate și coincide, pe baza lemei I, cu un nod de ordin de multiplicitate egal cu $m+1$, cel puțin. Mai precis, numărul rădăcinilor improprii care coincid cu nodul x_i este egal cu $\max\{0, r_i - m\}$. Astfel, numărul total al rădăcinilor improprii ale polinomului $L^{(m)}(x)$ este egal cu

$$\sum_{i=1}^s \max\{0, r_i - m\}. \quad (22)$$

Celelalte rădăcini ale lui $L^{(m)}(x)$, sau la zicem proprii, sînt rădăcini simple. Astfel de rădăcini pot exista numai dacă $m > 0$. O rădăcină proprie poate coincide cu un nod, însă în orice caz nu cu cel mai mic sau cu cel mai mare dintre aceste noduri. Această din urmă proprietate rezultă din faptul că, rădăcinile derivatei unui polinom cu toate rădăcinile reale aparțin totdeauna celui mai mic interval închis care conține toate rădăcinile polinomului. Pe baza acestei proprietăți, dacă $L^{(m)}(x)$ se anulează într-un nod extrem, $L^{(m-1)}(x)$ se anulează de asemenea în același nod. Acest nod are deci ordinul de multiplicitate cel puțin egal cu $m+1$ și deci este o rădăcină improprie. Dacă x_i este rădăcină proprie, trebuie să avem $r_i \leq m-1$. Pentru $r_i = m$ avem $L^{(m)}(x_i) \neq 0$.

Numărul rădăcinilor proprii ale lui $L^{(m)}(x)$ este egal cu

$$N_m = p + 1 - m - \sum_{i=1}^s \max\{0, r_i - m\}.$$

un nod este o rădăcină proprie a polinomului $f^{(m)}(x)$, atunci acest nod nu este rădăcină a niciunui alt polinom (16). Observăm, în fine, că cel mult $\max\{0, s-2\}$ noduri pot fi rădăcini proprii ale polinoamelor (16).

Din cele ce preced rezultă că putem enunța teorema următoare:

Teorema 4. Numărul N' al formulelor (E) din $\mathcal{M}^0$, al căror grad de exactitate este egal cu $p+r+1$, este egal cu 0 pentru $m=0$, egal cu $s-1$ pentru $m=1$ și verifică inegalitățile

$$N_m - \max\{0, s-2\} \leq N' \leq N_m$$

pentru $m \geq 1$.

Numărul N'' al formulelor (E) din $\mathcal{M}^0$, al căror ordin este egal cu $p-1$, este egal cu 0 dacă $m=0$, $r=0$, egal cu $s-1$ dacă $m=0$, $r \geq 0$ și verifică inegalitățile.

$$(s-1)(N_m-1) + N_{m+1} - \max\{0, s-2\} \leq N'' \leq \begin{cases} (s-1)(N_m-1) + N_{m+1}, & \text{dacă } r=0 \\ (s-1)(N_m-1) + 2N_{m+1}, & \text{dacă } r \geq 0 \end{cases}$$

pentru $m \geq 0$.

Numărul N al formulelor (E) excepționale din $\mathcal{M}^0$ este egal cu 0 dacă $m=r=0$, egal cu $s-1$ dacă $m=0$, $r \geq 0$ și verifică inegalitățile

$$(s-1)(N_m-1) + N_m - N_{m+1} - \max\{0, s-2\} \leq N \leq \begin{cases} (s-1)(N_m-1) + N_m + N_{m+1}, & \text{dacă } r=0 \\ (s-1)(N_m-1) + N_m + 2N_{m+1}, & \text{dacă } r \geq 0 \end{cases}$$

pentru $m \geq 0$.

Numărul $\max\{0, s-2\}$ din delimitările inferioare se poate uniți cu m funcție de p, m, s , dar nu ne ocupăm de această chestiune.

13. Putem delimita în mod destul de convenabil numărul (22) în funcție numai de p, m, s . Pentru aceasta ne vom folosi de următoarea leamnă:

Lemma 2. Dacă numerele $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r, \beta$ sunt nenegative avem inegalitățile

$$\max\left\{0, \sum_{i=1}^r \alpha_i - k\beta\right\} \leq \sum_{i=1}^r \max\{0, \alpha_i - \beta\} \leq \max\left\{0, \sum_{i=1}^r \alpha_i - \beta\right\}. \quad (23)$$

Este destul să demonstrăm proprietatea pentru $k=2$, căci pentru k oarecare va rezulta prin inducție completă.

Pentru $k=2$, inegalitățile revin la 2)

$$|\alpha_1 + \alpha_2 - 2\beta| \leq |\alpha_1 - \beta| + |\alpha_2 - \beta| \leq |\alpha_1 + \alpha_2 - \beta| + \beta$$

care se verifică imediat 2).

¹⁾ Avem $\max\{0, \alpha\} = \frac{1}{2}(\alpha + |\alpha|)$.

²⁾ Fiecare membru este linear în β , în intervalele determinate de punctele $0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r, \alpha_1 + \alpha_2, \dots, \alpha_1 + \alpha_r + \alpha$. Este deci destul să se verifice inegalitățile pentru extremitățile finale ale acestor intervale și pentru $\beta > \alpha_1 + \alpha_2$.

Prima inegalitate (21) revine la o inegalitate clasică și este adevărată oricare ar fi numerele $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r, \beta$.

Revenind la delimitarea sumei (22), care pentru $m=0$ este egală cu $p-1$, avem, pe baza lemei 2,

$$\max\{0, p-1-m\} \leq \sum_{i=1}^r \max\{0, \alpha_i - m\} \leq \max\{0, p-2-s-m\} \quad (m \geq 0),$$

deoarece $\alpha_i - 1 \geq 0, m-1 \geq 0$.

Observăm acum că ¹⁾ $\alpha = \max\{|\alpha_i| + \min\{\alpha_i, \beta\} + \beta\}$ și deducem

$$\min\{p-1-m, s-1\} \leq N_m$$

multă, privită ca o formula de derivare numerică pentru funcția $f(x) = g(x)$. Folosind deci notațiile (19), avem

$$g^{(p+r-1)}(x_0) = \sum_{i=1}^{p-1} c_i g^{(i-1)}(x_0) + \sum_{j=1}^r \sum_{i=1}^{s-1} c_{i,j} g^{(i-1)}(x_0) + R \quad (E')$$

Pe baza celor stabilite mai sus, putem presupune că ordinul formulei (E) este $p+r+1$. Să notăm cu p^*, r^*, s^* numerele p, r, s , corespunzătoare formulei (E'). Toate aceste fapte implică $r_i > 1, i = 1, 2, \dots, s$ și avem atunci $p^* = p - s, s^* = s, r^* = 0$ sau $r^* = r - 1$ după cum $r = 0$ sau $r > 1$.

Gradul de exactitate al formulei (E') este $p+r-1$ sau $p+r$, după cum formula (E) nu este sau este excepțională, deoarece punând $g(x) = f(x)$ în (E') regăsim formula (E), iar $(x^i)' = ix^{i-1}$.

Se verifică acum imediat că $p+r-1 \geq p^*+r^*$, ceea ce ne arată că (E') este o formulă de exactitate maximă. Deoarece această formulă nu se reduce la formula trivială, gradul său de exactitate este p^*+r^* sau p^*+r^*+1 , după cum ea nu este sau este excepțională. Am evaluat gradul de exactitate în două feluri diferite și rezultatele obținute trebuie să coincidă. Dacă $s=1$, formulele (E), (E') nu pot fi excepționale și atunci trebuie să avem $p+r-1 = p^*+r^*$ și se verifică imediat că această egalitate are loc dacă și numai dacă $r=0$. Dacă $s > 1$, avem $p+r-1 > p^*+r^*$ și egalitate între gradele de exactitate nu poate avea loc decât dacă $p+r-1 = p^*+r^*+1$. Această egalitate are loc numai dacă $r=0$ și $s=2$.

În definitiv deci, formula (E) nu poate fi reductibilă decât în următoarele două cazuri:

1°. $r=0, s=1$. În acest caz, niciuna din formulele (E), (E') nu este excepțională.

2°. $r=0, s=2$. În acest caz formula (E') este excepțională, dar (E) nu este excepțională.

Să se observe că o formulă (E) excepțională este totdeauna ireductibilă.

În cazul 2°, condițiile de excepționalitate se scriu

$$f^{(p)}(x_0) \neq 0, \quad \left| \frac{f(x)}{(x-x_1)(x-x_2)} \right|_{x=x_0}^{(p-2)} = 0. \quad (20)$$

15. Rămâne să mai demonstrăm că în cele două cazuri de mai sus formula (E) este efectiv reductibilă.

În cazul 1° avem

$$L(x_1, x_1, \dots, x_1; f, x) = \sum_{j=0}^{p-1} \frac{(x-x_1)^j}{j!} f^{(j)}(x_1)$$

deoarece $C_{1,0}(x) = 1$, de unde $C_{1,0}^{(m)}(x_0) = c_{1,0} = 0$ ($m > 0$).

În cazul 2°, polinoamele $C_{1,0}(x), C_{2,0}(x)$, de gradul $p-1$, pe baza formulelor (8) se divid cu polinomul

$$\frac{f(x)}{(x-x_1)(x-x_2)} \quad (27)$$

deoarece diferă numai prin niște factori constanți de polinomul (27). Acești factori constanți sunt de altfel diferiți de zero, tot pe baza formulelor (8) ⁹⁾. Condițiile $c_{1,0} = c_{2,0} = 0$ sunt deci echivalente cu a doua relație (26). Prima relație (26) este o consecință a analizei precedente.

Simultanitatea condițiilor (20) se poate demonstra și direct. Avem

$$f'(x) = [r_1(x-x_2) + r_2(x-x_1)] \cdot \frac{f(x)}{(x-x_1)(x-x_2)}$$

de unde deducem

$$f^{(m)}(x) = [r_1(x-x_2) + r_2(x-x_1)] \left[\frac{f(x)}{(x-x_1)(x-x_2)} \right]^{(m-1)} + \\ + (p+1)(m+1) \left[\frac{f(x)}{(x-x_1)(x-x_2)} \right]^{(m-2)}$$

De aici se vede că orice rădăcină comună a polinoamelor $f^{(m)}(x)$,

$$\left[\frac{f(x)}{(x-x_1)(x-x_2)} \right]^{(m-2)}$$

este o rădăcină comună a polinoamelor

$$\left[\frac{f(x)}{(x-x_1)(x-x_2)} \right]^{(m-1$$

§ 2. Câteva considerații asupra restului

15. În anumite cazuri particulare importante, restul R al formulei (1) se poate sub o formă simplă și comodă. În cazul formulei de interpolare a lui Lagrange-Hermite

$$f(x) = L(x; x_0, x_1, \dots, x_{p+1}; f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_{p+1})) + R \quad (28)$$

avem

$$R = R[f] = L(x; x_0, x_1, \dots, x_{p+1}; f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_{p+1})) - f(x) \quad (29)$$

unde $L(x)$ este polinomul (3) deja definit și care pe baza notațiilor (7) se poate scrie și

$$L(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{p+1}).$$

Restul formulei (28), sub forma (29), se exprimă ca un produs dintre un număr diferit de zero și independent de funcția $f(x)$ și o diferență divizată de ordinul $p+1$ al funcției $f(x)$.

Pe baza formulei

$$[x_0, x_1, \dots, x_{p+1}; x^k] = \begin{cases} 0, & \text{pentru } k=0, 1, \dots, p-1 \\ 1, & \text{pentru } k=p \end{cases} \quad (30)$$

este vizibil că formula (28) are gradul de exactitate p . Punând $f(x) = x^{p+1}$ în (28) și ținând seama de formula (11), vedem că factorul diferenței divizate din (29) este egal cu

$$R[f] = R[x^{p+1}] = L(x_0).$$

17. Vom spune că restul formulei (1) sau că funcționala $R[f]$ este de formă simplă dacă avem

$$R[f] = M[x_0, x_1, \dots, x_{n+2}; f] \quad (31)$$

când ar fi funcția $f(x)$, unde n este gradul de exactitate al formulei, M o constantă diferită de zero și independentă de funcția $f(x)$, iar $x_0, x_1, \dots, x_{n+2}$, $n+2$ puncte distincte din intervalul deschis (a, b) .

În acest caz, pe baza formulei (30), coeficientul M este dat de egalitatea $M = R[x^{n+1}] = R[P]$, unde $P(x)$ este un polinom oarecare de gradul $n+1$, cu primul coeficient 1.

Punctul ξ depinde în general de funcția $f(x)$, iar intervalul $[a, b]$ este cel precizat în § 1.

De exemplu, așa cum vom vedea mai jos, restul formulei (28) este de formă simplă.

Pentru simplificarea notațiilor, vom nota cu $D_k[f]$ o diferență divizată de ordinul k a funcției $f(x)$ pe $k+1$ noduri distincte arbitrare din intervalul (a, b) . Dacă deci formula (1) are gradul de exactitate n și dacă restul este de formă simplă, avem $R[f] = R[x^{n+1}] \cdot D_{n+1}[f]$.

Definiția precedentă subsistă pentru $n \leq 0$. O vom menține și pentru $n = -1$, cu restricția că în acest caz, punctul ξ , poate coincide și cu una din

extremitățile intervalului $[a, b]$. Această convenție simplifică expunerea. De altfel, în cazul, aproape banal, când $n = -1$, este în general ușor să se recunoască dacă se poate alege sau nu punctul ξ , în interiorul intervalului.

În cazul când restul este de formă simplă, formula (31) ne dă indicații suficiente asupra structurii acestui rest, pe baza proprietăților de medii ale diferențelor divizate, proprietăți pe care le expunem într-o altă lucrare. Aceste proprietăți permit să se exprime restul în mod analog, cu ajutorul diferențelor divizate ale derivatei de un anumit ordin dat a funcției $f(x)$, când această derivată există în intervalul (a, b) .

18. Pe baza unui rezultat anterior [9], pentru recunoașterea formei simple a restului putem aplica următorul criteriu:

C. Pentru ca funcționala $R[f]$ aditivă și omogenă, cu gradul de exactitate n , să fie de formă simplă este necesar și suficient ca $R[f]$ să fie diferit de zero pentru orice funcție $f(x)$ convexă de ordinul n în $[a, b]$.

Definiția formei simple și criteriul C se aplică nu numai restului formulei (1) dar și unei funcționale aditive și omogene $R[f]$, definită

Se ştie că o combinaţie liniară, cu coeficienţi pozitivi, de mai multe (un număr finit) funcţii neconexe de ordinul n' , dintre care cel puţin una este convexă de ordinul n' , este o funcţie convexă de ordinul n' . Să observăm acum că funcţia $(x-a)^{n'+1}$ este convexă de ordinul n' în intervalul $[a, b]$. Pe de altă parte, $R[(x-a)^{n'+1}] \neq 0$, din cauza definiţiei gradului de exactitate. Rezultă că funcţiile

$$f_1'(x) = f_1(x) + \frac{1}{2} \left| \frac{R[f_1]}{R[(x-a)^{n'+1}]} \right| (x-a)^{n'+1}$$

$$f_2'(x) = f_2(x) + \frac{1}{2} \left| \frac{R[f_2]}{R[(x-a)^{n'+1}]} \right| (x-a)^{n'+1}$$

sunt convexe de ordinul n' .

Ținând seama de (E2), un calcul simplu ne arată că

$$R[f_1'] R[f_2'] = \frac{3}{4} R[f_1] R[f_2] < 0.$$

Rezultă că funcţia

$$f(x) = f_1'(x) - \frac{R[f_1']}{R[f_2']} f_2'(x)$$

este convexă de ordinul n' şi, se verifică imediat, satisface egalitatea (32).

Lema 3 este deci demonstrată.

Pentru $n' = n$, aplicând criteriul C, se deduce următoarea teoremă:

Teorema 7. Dacă n este gradul de exactitate al funcţionalei $R[n]$, adică şi omogenă şi dacă putem găsi două funcţii $f_1(x), f_2(x) \in F$, neconexe de ordinul n în $[a, b]$, astfel ca să avem (32), atunci funcţionala nu este de formă simplă.

20. Restul R al formulei (1) se poate studia sub formă mai simetrică

$$R[f] = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n b_{ij} f^{(i+j)}(x_i) \quad (34)$$

unde, pentru moment, putem presupune

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b.$$

Binărită, cămpul F al funcţionalei (34) este format din funcţiile $f(x)$ continue în $[a, b]$ şi admitând derivatele în punctele unde intervin efectiv în expresia lui $R[f]$.

Vom căuta să stabilim câteva proprietăţi în legătură cu forma simplă a funcţionalei (34).

Să presupunem că gradul de exactitate este n . Vom arăta că funcţionala nu poate depinde efectiv de derivatele de ordin $n+1$ în caz că forma ei este simplă. Pentru aceasta va fi destul, pe baza teoremei 7, ca în cazul nostru să construim două funcţii $f_1(x), f_2(x) \in F$ neconexe de ordinul n , astfel ca să avem inegalitatea (E2).

* Se poate arăta, de exemplu, că derivata de ordinul $n+1$ a funcţiei este pozitivă a. m. d. pe doi $[a, b]$.

Să presupunem deci că $b_{k+1} \neq 0, b_{k+2} = 0, j = k+1, k+2, \dots$, unde $k \geq n+2$.

Fie ε un număr pozitiv destul de mic şi care în cursul demonstraţiei va fi precizat şi mai mult.

Să definim funcţia continuă $\varphi_\varepsilon(x)$ în felul următor:

1°. $\varphi_\varepsilon(x) = 1$.

2°. $\varphi_\varepsilon(x) = 0$ pentru $x \in [x_1, x_2 + \varepsilon] \cup [x_{k-1} + \varepsilon, b]$, $x \in [a + 2\varepsilon, b]$, respectiv $x \in [a, b - 2\varepsilon]$, după cum $0 < \varepsilon < x_1, \varepsilon = 0$, respectiv $\varepsilon = 0$.

3°. $\varphi_\varepsilon(x)$ este linear în fiecare din intervalele rămase din $[a, b]$ deci în $[x_0 + \varepsilon, x_1]$ şi $[x_{k-1}, x_{k-1} + \varepsilon]$, $[a, a + 2\varepsilon]$, respectiv $[b - 2\varepsilon, b]$, după cum $0 < \varepsilon < x_1, \varepsilon = 0$, respectiv $\varepsilon = 0$.

Avem atunci $\varphi_\varepsilon(x) \geq 0$ pentru $x \in [a$

Ținând seama de (30), deducem

$$f^{(j)}(x) = \begin{cases} A f_1^{(j)}(x) + |A| \frac{\varepsilon (b-a)^{k-n-2}}{(n-1-j)!(k-n-2)!} (x-a)^{k+1-j}, & j=0, 1, \dots, n+1 \\ A f_2^{(j)}(x), & j=n+2, n+3, \dots, k-1 \end{cases}$$

pentru $x \in [a, b]$.

Ținând seama de (35), avem

$$|f^{(j)}(x)| \leq 2 |A| (b-a)^{k-1-j} \xi, \quad j=0, 1, \dots, k-1, \quad x \in [a, b]. \quad (37)$$

Dacă acum presupunem că

$$\frac{1}{2} \min_{i=0,1,\dots,s} \{x_{i+1} - x_i\}, \quad (38)$$

avem și

$$f^{(j)}(x_i) = 0, \text{ pentru } j \geq k, \quad x_i = 0, 1, \dots, i-1, \quad i=1, \dots, s. \quad (39)$$

Ținând seama de $f^{(j)}(x_i) = A$ și de (34), (37), (39), deducem

$$|R[f] - b_{k,s} A| \leq \left(\sum_{i=0}^s \sum_{j=1}^{k-1} |b_{i,j}| \right) 2 |A| \cdot \max \{1, (b-a)^{k-1}\} \cdot \varepsilon.$$

Alegând pe ε destul de mic și în orice caz astfel ca inegalitatea (38) să fie verificată, deducem

$$|R[f] - b_{k,s} A| \leq \frac{b_{k,s} |A|}{2}$$

care ne arată că atunci $R[f]$ are semnul lui $b_{k,s} A$. Dar A a fost ales oarecare, luând $A = 1$ și notând cu $f_1(x)$ funcția (30) astfel obținută, și luând apoi $A = -1$ și notând cu $f_2(x)$ funcția (30) astfel obținută, inegalitatea (42) este verificată.

Putem dar enunța următoarea teoremă:

Teorema 8. Dacă gradul de exactitate al funcționalului (44) este n , atunci funcționalul nu poate fi de grad simplă decât dacă nu conține efectiv derivate de ordin $\geq n+1$.

Cu alte cuvinte, funcționalul nu poate fi de formă simplă decât dacă $b_{i,j} = 0$ pentru $j > n+1$, $i=0, 1, \dots, s$.

Vom examina în particular funcționalul (42) cu gradul de exactitate -1 , 0 sau 1.

21. Să presupunem că gradul de exactitate este -1 . Teorema 8, care se aplică și aici, ne arată că funcționalul (32) este în mod necesar de forma

$$R[f] = \sum_{i=0}^s b_i f(x_i) \quad (40)$$

dacă ea este de formă simplă.

Pentru ca funcționalul (40) să fie de formă simplă, este necesar ca coeficienții $b_0, b_1, \dots, b_s$ să fie de același semn²⁾. Într-adevăr, să presupunem contrariul, și fie $b_s b_0 < 0$. Atunci, inegalitatea (32) este verificată dacă pentru $f_1(x)$ luăm o funcție continuă nenegativă, astfel ca $f_1(x_0) = 1$, $f_1(x_i) = 0$, $i=0, 1, \dots, s-1$, $x+1, \dots, s$ și pentru $f_2(x)$ luăm o funcție continuă nenegativă, astfel ca $f_2(x_0) = 1$, $f_2(x_i) = 0$, $i=0, 1, \dots, s-1$, $s+1, \dots, s$. Condiția este și suficientă, căci dacă ea este îndeplinită, din

$$R[1] = \sum_{i=0}^s b_i \neq 0$$

rezultă că $R[f] \neq 0$ pentru orice funcție pozitivă $f(x)$.

Deducem prin urmare următoarea teoremă:

Teorema 9. Condiția necesară și suficientă ca funcționalul (40) să fie de grad de exactitate -1 și să fie de formă simplă este ca toți coeficienții b_i , $i=0, 1, \dots, s$ să fie de același semn, fără să fie toți nuli.

Dacă condiția este îndeplinită, avem deci

$$\sum_{i=0}^s b_i f(x_i) = \left(\sum_{i=0}^s b_i \right) D_0[f]$$

Fie acum $f(x)$ o funcție continuă, nedescrescătoare, egală cu 0 pentru $x \in [a, x_{i-1} + \varepsilon]$ și egală cu 1 pentru $x \in [x_i - \varepsilon, b]$, ε fiind un număr pozitiv destul de mic, $\varepsilon < \frac{1}{2}(x_i - x_{i-1})$. Avem atunci

$$R[f] = b_1 + b_{i+1} + \dots + b_s.$$

Pe baza teoremei 7, trebuie deci ca numerele

$$b_i + b_{i+1} + \dots + b_s, \quad i = 1, 2, \dots, s \quad (4.1)$$

să fie de același semn.

Fie apoi funcția $f(x)$ egală cu 0 pentru $x \leq x_i - \varepsilon$, egală cu 2\varepsilon pentru $x \geq x_i + \varepsilon$ și lineară în intervalul $[x_i - \varepsilon, x_i + \varepsilon]$, unde ε este un număr pozitiv destul de mic, $\varepsilon < \min_{i=1, 2, \dots, s} \{x_i - x_{i-1}\}$. Această funcție este nedescrescătoare și avem

$$R[f] = \varepsilon [b_i + b_{i+1} + \dots + b_s] + b_{i-1} + b_{i-2} + \dots + b_1.$$

Deoarece ε poate fi luat oricât de mic, se vede, tot pe baza teoremei 7, că numerele

$$b_1, b_i, \dots, b_s \quad (4.2)$$

împreună cu numerele (4.1) trebuie să fie de același semn.

În fine, vom pune în evidență încă o condiție necesară. Fie $f(x)$ funcția definită în felul următor:

$$f(x) = x - \frac{(x - x_{i-1})(x - x_i)(2x - x_{i-1} - x_i)}{(x_i - x_{i-1})^2}, \text{ pentru } x \in [x_{i-1}, x_i],$$

$$i = 1, 2, \dots, s.$$

Avem atunci

$$f'(x) = -\frac{6}{(x_i - x_{i-1})^2} (x - x_{i-1})(x - x_i), \text{ pentru } x \in (x_{i-1}, x_i), i = 1, 2, \dots, s$$

și se vede că funcția este continuă și derivabilă în intervalul $[a, b]$. Înăi $f(x_i) = x_i$, $f'(x_i) = 0$, $i = 0, 1, \dots, s$ și $f'(x) > 0$, pentru $x \in (x_{i-1}, x_i)$, $i = 1, 2, \dots, s$ așa că funcția $f(x)$ este crescătoare și avem

$$R[f] = \sum_{i=0}^s b_i x_i.$$

Deducem prin urmare condiția necesară

$$\sum_{i=0}^s b_i x_i \neq 0. \quad (4.3)$$

Să arătăm acum, că condițiile stabilite sunt și suficiente. Pe baza primei relații (4.2) putem scrie

$$R[f] = \sum_{i=1}^s (x_i - x_{i-1})(b_i + b_{i+1} + \dots + b_s) [x_{i-1}, x_i; f] + \sum_{i=0}^s b_i f(x_i) \quad (4.4)$$

care se obține aplicând formula de transformare a lui Abel.

Observăm acum, că

$$\sum_{i=1}^s (x_i - x_{i-1})(b_i + b_{i+1} + \dots + b_s) = \sum_{i=1}^s b_i x_i$$

ceea ce se obține luând $f(x) = x$ la (4.1) și (4.4). Condiția (4.3) implică deci faptul că numerele (4.3) nu sînt toate nule.

Într-acum $f(x)$ este o funcție crescătoare, avem

$$[x_{i-1}, x_i; f] > 0, \quad i = 1, 2, \dots, s, \quad f'(x_i) \geq 0, \quad i = 0, 1, \dots, s$$

asa că prima relație (4.2), condiția (4.3) și faptul că numerele (4.3), (4.4) sunt de același semn, implică, pe baza formulei (4.4), că $R[f] \geq 0$.

Să se observe că prima relație (4.2) și condiția (4.3) atrag după sine a doua condiție (4.2), dacă numerele (4.3), (4.4) sînt de același semn.

Avem deci următoarea teoremă:

Teorema 10. Condițiile necesare și suficiente pentru ca funcționala (4.1) să fie de gradul de exactitate 0 și de formă simplă sî

2°. $m = 0$, $r = 1$. Presupunând iarăși $x_{s-1} < x_s < x_1$, condițiile necesare și suficiente sunt

$$a_0 + \sum_{i=1}^s a_{i,0} = 0, \quad a_0 x_0 + \sum_{i=1}^s a_{i,0} x_i \neq 0$$

și ca toate numerele (48) să fie nepozitive, cu restricția de mai sus, dacă $i = 1$ sau $i = s + 1$.

3°. $m = 1$, $r = 0$. Condițiile necesare și suficiente sunt

$$\sum_{i=1}^s a_{i,0} = 0, \quad \sum_{i=1}^s a_{i,0} x_i \neq 0$$

și ca numerele

$$a_{i,0} + a_{i+1,0} + \dots + a_{s,0}, \quad i = 2, 3, \dots, s; \quad a_{i,1}, \quad i = 1, 2, \dots, s$$

să fie toate nepozitive.

Există o singură formulă (E) de grad de exactitate 0, care este de formă simplă și pe care o vom semnală la § 5.

24. Dacă funcționala (34) este de gradul de exactitate 1 și de formă simplă, atunci, conform teoremei 8, ea este în mod necesar de forma

$$R[f] = \sum_{i=1}^s [\lambda_i f(x_i) + b'_i f'(x_i) + b''_i f''(x_i)]. \quad (49)$$

Condițiile ca gradul de exactitate să fie 1 sunt

$$\sum_{i=1}^s b_i = 0, \quad \sum_{i=1}^s (b_i x_i + b'_i) = 0, \quad \sum_{i=1}^s (b_i x_i^2 + 2b'_i x_i + 2b''_i) \neq 0. \quad (50)$$

Să căutăm iarăși condițiile necesare pentru ca funcționala (49) să fie de formă simplă.

Primele două condiții (50) sunt necesare, deoarece funcțiile $t, -1, x, -x$ sunt necesare de ordinul 1 și

$$R[1] R[-1] = \left(\sum_{i=1}^s b_i \right)^2, \quad R[x] R[-x] = - \left[\sum_{i=1}^s (b_i x_i + b'_i) \right]^2.$$

Să considerăm funcția

$$f(x) = \frac{x - x_i + \varepsilon + (x - x_i + \varepsilon)^2}{2}$$

unde ε este un număr pozitiv $< x_i - x_{i-1}$. Această funcție este necesară de ordinul 1 în $[a, b]$ și avem

$$R[f] = \lambda_{i+1} + \lambda_{i+2} + \dots + \lambda_s + b'_i + b'_{i+1} + \dots + b'_s + \varepsilon (b_i + b_{i+1} + \dots + b_s) \quad (51)$$

unde am pus

$$\lambda_i = (x_i - x_{i-1}) (b_i + b_{i+1} + \dots + b_s), \quad i = 1, 2, \dots, s.$$

De asemenea, funcția

$$f(x) = \frac{-x + x_{i-1} + \varepsilon + (x - x_{i-1} + \varepsilon)^2}{2}$$

este necesară de ordinul 1 în $[a, b]$ și avem $\varepsilon < x_i - x_{i-1}$

$$R[f] = \lambda_i + \lambda_{i+1} + \dots + \lambda_s + b'_i + b'_{i+1} + \dots + b'_s + \varepsilon (b_i + b_{i+1} + \dots + b_s). \quad (52)$$

Formulele (51), (52) au loc oricând de mic ar fi ε pozitiv. Se deduce imediat, pe baza teoremei 8, că numerele¹⁾

$$\begin{cases} \lambda_i + \lambda_{i+1} + \dots + \lambda_s + b'_i + b'_{i+1} + \dots + b'_s, & i = 1, 2, \dots, s \\ \lambda_{i+1} + \lambda_{i+2} + \dots + \lambda_s + b'_i + b'_{i+1} + \dots + b'_s \end{cases} \quad (53)$$

trebuie să fie de același semn.

Fie acum $f(x)$ funcția nulă pentru $x \leq x_i - \varepsilon$, egală cu $(x - x_i + \varepsilon)^2$ în intervalul $[x_i - \varepsilon, x_i + \varepsilon]$ și egală cu $4\varepsilon(x - x_i)$ pentru $x \geq x_i + \varepsilon$. Aceasta este o funcție continuă necesară de ordinul 1 în $[a, b]$ ²⁾ și pentru ε destul de mic ($\varepsilon < x_i - x_{i-1}, x_{i+1} - x_i$) avem

$$R[f] = \varepsilon^2 b_i + 2\varepsilon b'_i + 4\varepsilon (\lambda_{i-1} + \lambda_{i+1} + \dots + \lambda_s + b'_{i+1} + \dots + b'_s + 2b''_i).$$

Numărul ε putând fi oricât de mic pozitiv, tot pe baza teoremei 8, vedem că numerele

$$b''_i, b'_i, \dots, b''_s \quad (54)$$

sunt de același semn cu numerele (53).

În fine, ca și în cazul $m = 0$, vom pune în evidență încă o condiție

Avem, așa deci, și condiția necesară

$$\sum_{i=0}^s (b_i^* x_i^2 + 2b_i^* x_i) \neq 0. \quad (55)$$

Să arătăm acum că condițiile găsite sunt și suficiente. Acest lucru rezultă din formula

$$R[f] = \sum_{i=1}^s (x_i - x_{i-1}) (b_i + b_{i-1} + \dots + b_0 + b_1 + b_2 + \dots + b_s) \cdot (x_{i-1} + x_i + x_i^2) + \sum_{i=1}^s (x_i - x_{i-1}) (b_{i+1} + b_{i+2} + \dots + b_s + b_1 + b_2 + \dots + b_s) \cdot (x_{i-1} + x_i + x_i^2) + \sum_{i=1}^s b_i^* f(x_i)$$

care este valabilă când primele două condiții (50) sunt îndeplinite. Aceasta formulă este un caz particular al formulei generale de transformare a diferențelor divizate și se obține aplicând de două ori în formula de transformare a lui Abel [6]. Dacă punem $f(x) = x^2$, deducem

$$\sum_{i=1}^s (x_i - x_{i-1}) (b_i + b_{i-1} + \dots + b_0 + b_1 + b_2 + \dots + b_s) + \sum_{i=1}^s (x_i - x_{i-1}) (b_{i+1} + b_{i+2} + \dots + b_s + b_1 + b_2 + \dots + b_s) = \sum_{i=0}^s (b_i x_i^2 + 2b_i x_i)$$

și atunci, pe baza ipotezei (55), cel puțin unul din a numerle (53) este diferit de zero.

Dacă $f(x)$ este o funcție convexă de ordinul 1, avem

$$(x_{i-1}, x_{i-1}, x_i, f) \geq 0, \quad (x_{i-1}, x_i, x_i, f) \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, s$$

$$f''(x_i) \geq 0, \quad i = 0, 1, \dots, s$$

asă că primele două egalități (50), condiția (55) și faptul că numerele (53), (54) sunt de același semn implică $R[f] \geq 0$.

Să se observe că în același timp și condițiunile a treia relație (53) și nullă.

TEOREMA 11. *Condițiile necesare și suficiente pentru ca funcționala (49) să fie de gradul de exactitate 1 și de formă simplă sunt ca primele două relații (50) să fie verificate, ca inegalitatea (55) să fie verificată și ca numerele (53), (54) să fie de același semn.*

25. Pentru ca formula (1) să fie de gradul de exactitate 1 și de formă simplă, este necesar ca $m + r \leq 2$ și ca $a_{ij} = 0$, $j = 3, 4, \dots, r$, $i = 1, 2, \dots, s$. Expresionarea celorlalte condiții depinde de pozițiile mutuale ale nodurilor și ale punctului de derivare.

Să presupunem că nodurile sunt în ordine crescătoare, că avem deci (47). Vom putea exprima atunci condițiile necesare și suficiente după valorile lui

m, r și poziția punctului x_0 față de noduri. Aceste condiții sunt destul de complicate. Va fi deci destul să neținem în fiecare caz cum aducem restul la forma (49), studiată mai sus, și pentru care punctele $x_0, x_1, \dots, x_s$ sunt în ordine crescătoare. Condițiile vor fi exprimate atunci cu ajutorul coeficienților b_i, b_i', b_i'' .

Trebuie să distingem 6 cazuri. Vom presupune în general că $x_{i-1} < x_0 < x_i$, $m = r = 0$. O serie de condiții necesare și suficiente devin

$$\sum_{i=1}^s a_{i,0} = 1, \quad \sum_{i=1}^s (a_{i,0} x_i - a_{i,1}) = x_0, \quad \sum_{i=1}^s (a_{i,0} x_i^2 - 2a_{i,1} x_i) \neq x_0^2$$

iar celelalte condiții se deduc reducând restul la forma (49) și cerând ca să revină la înlocuirea în (49) a simbolilor puncte $x_0, x_1, \dots, x_s$ cu $x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_s$ și punând apoi

$$\left. \begin{aligned} b_i &= a_{i+1,0}, \quad b_i' = a_{i+1,1}, \quad b_i'' = a_{i+1,2}, \quad i = 0, 1, \dots, i-2 \\ b_{i-1} &= -1, \quad b_{i-1}' = b_{i-1}'' = 0 \\ b_i &= a_{i,0}, \quad b_i' = a_{i,1}, \quad b_i'' = a_{i,2}, \quad i = i, i+1, \dots, s \end{aligned} \right\} \quad (56)$$

26. $m = 0,$

§ 3. Cu criteriul pentru recunoaşterea formei simple a restului unei formule de exactitate maximă

26. Să reducem formula de derivare numerică (E). Vom presupune întâi $x = 0$, deci vom considera formula

$$f^{(m)}(x_0) = L^{(m)}(x'_1, x'_2, \dots, x'_{p-1}; f|x_0) + R. \quad (57)$$

Pentru studiul restului acestei formule, putem pleca de la cazul $m=0$, considerând întâi formula (28).

Deoarece la un moment dat va fi comod să considerăm punctul x_0 ca variabil, îl vom nota atunci, pentru mai multă claritate, cu x . Formula (29) ne arată că dacă punem

$$R(x) = L(x)[x_1, x'_1, x'_2, \dots, x'_{p-1}; f] \quad (58)$$

restul formulei (28) este $R = R(x_0)$, iar restul formulei (57) va fi dat de egalitatea

$$R = R[f] = R^{(m)}(x_0). \quad (59)$$

Derivata de ordinul m , $R^{(m)}(x)$ se poate calcula din formula (58). Avem

$$R^{(m)}(x) = \sum_{i=0}^m (i!) L^{(m-i)}(x)[x_1, x'_1, x'_2, \dots, x'_{p-1}; f]^{(i)}. \quad (59')$$

Înă (5)

$$[x, x_1, x_2, \dots, x_p; f]^{(i)} = i! \underbrace{[x_1, x_2, \dots, x_p; f]^{(i-1)}}_{i-1} \quad (60)$$

din care se deduce şi formula mai generală

$$\underbrace{[x_1, x_2, \dots, x_p; f]^{(i)}}_i = \frac{(i+1-i)!}{(i-1)!} \underbrace{[x_1, x_2, \dots, x_p; f]^{(i-1)}}_{i-1} \quad (61)$$

unde $x_1, x_2, \dots, x_p$ sunt neduri fixe şi x este o variabilă.

Înlocuind seama de (60), formula (59') devine

$$R^{(m)}(x) = m! \sum_{i=0}^m \frac{i^{(m-i)}(x)}{(m-i)!} \underbrace{[x_1, x_2, \dots, x_p; f]^{(i-1)}}_{i-1} \quad (62)$$

27. Vom transforma acum formula (62) într-o altă formulă care se va dovedi utilă.

Putem scrie

$$R^{(m)}(x) = \sum_{i=0}^m A_{m,i}(x) \underbrace{[x_1, x_2, \dots, x_p; f]^{(i-1)}}_{i-1} \quad (63)$$

unde coeficienţii $A_{m,i}(x)$, $i = 0, 1, \dots, m$ sunt polinoame în x , explicit determinate şi independente de funcţia $f(x)$.

Acastă formulă rezultă dintr-o formulă generală de transformare [6] aplicată funcţiei editive şi omogene (52), definită pentru funcţiile $f(x)$ date pe punctele

$$\underbrace{x_1, x_2, \dots, x_p, x'_1, x'_2, \dots, x'_{p-1}}_{m+1} \quad (64)$$

luate în această ordine.

Formula (63) se deduce din formula (62), aplicând în mod convenabil diferenţele divizate din membrul al doilea formula de recurenţă a diferenţelor divizate până ce toate aceste diferenţe divizate se exprimă linear şi omogen în funcţie de diferenţe divizate de ordinul $p-1$ luate pe câte $p-2$ puncte consecutive din şirul (64).

Polinoamele $A_{m,i}(x)$, $i = 0, 1, \dots, m$ se pot calcula explicit, rămânându-se sub o formă comodă. Derivând formula (63) în raport cu x şi ţinând seama de formulele (58) şi (61), deducem

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{m-1} A_{m,i+1}(x) \underbrace{[x_1, x_2, \dots, x_p; f]^{(i)}}_{i-1} &= \\ &= \sum_{i=0}^m A_{m,i}(x) \underbrace{[x_1, x_2, \dots, x_p; f]^{(i-1)}}_{i-1} + \\ &+ \sum_{i=0}^m (i+1) A_{m,i}(x) \underbrace{[x_1, x_2, \dots, x_p; f]^{(i-1)}}_{i-1} \end{aligned} \quad (65)$$

Înlocuind seama de formula de recurenţă

Avem atunci $l_{p+1}(x) = l(x)$ și

$$l_{i+1}(x) = (x - x'_i) l_i(x), \quad i = 0, 1, \dots, p. \quad (68)$$

Dacă, pentru simplificarea scrierii, convenim să punem

$$l_{i,\alpha}(x) = \frac{1}{(i-\alpha)!} l_i^{(\alpha)}(x), \quad \alpha = 0, 1, \dots, i, \quad (69)$$

din (68) deducem imediat relațiile

$$l_{i+1,\alpha+1}(x) = l_{i,\alpha}(x) - (x - x'_i) l_{i,\alpha}(x) \quad (70)$$

$$l_{i,\alpha}^{(0)}(x) = \frac{(i - x'_i - \alpha)!}{(i - \alpha)!} l_{i,\alpha-\alpha}(x). \quad (71)$$

În esență se poate avea $l_{i,\alpha}(x) = 0$, dacă $\alpha < 0$ sau $\alpha > i$. Notăm (6) la puterea seriei sub Ț. rîm

$$x'_i = x_0 + h_i, \quad i = 1, 2, \dots, p+1 \quad (72)$$

atunci $h_1, h_2, \dots, h_{p+1}$ sunt abaterile nodurilor respective de la punctul de derivare x_0 .

Vom nota cu $H_i, i = 0, 1, \dots, p+1$ ($H_0 = 1$) polinoamele simetrice fundamentale ale abaterilor $h_i, i = 1, 2, \dots, p+1$ și vom pune totdeauna $H_i = 0$, dacă $i < 0$ sau $i > p+1$. De asemenea, vom nota cu $H_{i,\alpha}, \alpha = 0, 1, \dots, i$ polinoamele simetrice fundamentale ale primelor i abateri $h_1, h_2, \dots, h_i$ ($H_{i,0} = 1, i \geq 0$) și $H_{i,\alpha} = 0$ pentru $\alpha < 0$ și $\alpha > i$. Avem atunci formulele $H_{p+1,0} = H_{i,\alpha}, \alpha = 0, 1, \dots, p+1$ și

$$l_{i,\alpha}(x_0) = (-1)^\alpha H_{i,\alpha}, \quad \alpha = 0, 1, \dots, i, \quad i = 0, 1, \dots, p+1. \quad (73)$$

Având în vedere cele expuse mai sus vom demonstra că avem

$$A_{m,i}(x) = m! (x - x'_{p+1}) l_{p-i,p-m}(x), \quad i = 0, 1, \dots, m. \quad (74)$$

Pentru aceasta observăm că $A_{0,0}(x) = l(x) = (x - x'_{p+1}) l_{p,p}(x)$ și deci pentru $m = 0$, formulele (74) sunt adevărate. Să presupunem că aceste formule sunt adevărate pentru α și să le demonstrăm pentru $\alpha + 1$. Ținând seama de (67) și (74), deducem

$$A_{\alpha+1,i}(x) = m! [l_{p-i,p-m}(x) + (x - x'_{p+1}) l'_{p-i,p-m}(x) + (i+1) l_{p-i,p-m}(x) + q_{p-i,p-m}(x)]. \quad (75)$$

Din (70), (71) rezultă că

$$l_{p-i,p-m}(x) = (m-i+1) l_{p-i,p-m-i}(x)$$

$$l_{p-i,p-m-i}(x) = l_{p-i,p-m}(x) - (x - x'_{p+1}) l_{p-i,p-m}(x)$$

și înlocuind în (75), găsim

$$A_{\alpha+1,i}(x) = (m-i+1)(x - x'_{p+1}) l_{p-i,p-m-i}(x), \quad i = 0, 1, \dots, m+1$$

care arată că formulele (74) sunt generale.

39. Aplicând formulei (63) formula de transformare a lui Abel, avem

$$R_i^{(m)}(x) = \sum_{i=0}^{m-1} \left[\sum_{\alpha=0}^{m-i} A_{m-i,\alpha}(x) \right] \left[\frac{x_1 x_2 \dots x_{p+1}}{i+2} \right] \quad (76)$$

$$- \left[\frac{x_1 x_2 \dots x_{p+1}}{i+1} \right] - \left[\sum_{\alpha=0}^m A_{m,i}(x) \right] (x_1 x_2 \dots x_{p+1}) l.$$

Dacă, însă, în formula (63) punem $f(x) = x^{p+1}$ și ținem seama de (30) deducem

$$\sum_{i=0}^m A_{m,i}(x) = l^{(m)}(x). \quad (77)$$

Dacă acum $f(x)$ este o funcție convexă de ordinul p , avem

$$\underbrace{[x_0, x_0, \dots, x_0, x_1, x_2, \dots, x_{p+1-i}; f]}_{i+1} \geq 0, \quad i = 0, 1, \dots, m. \quad (82)$$

Dar, o funcție convexă de ordinul p ($p \geq 0$) se bucură de proprietatea că diferențele divizate de ordinul $p+1$ ale sale, pe noduri nu toate confundate, sunt pozitive. Din (81) rezultă deci că

$$\underbrace{[x_0, x_0, \dots, x_0, x_1, x_2, \dots, x_{p+1-i}; f]}_{i+1} > 0. \quad (83)$$

Din formulele (74), (80), (82), (83) rezultă atunci că avem $R[f] \neq 0$.

Pe baza criteriului C putem dar enunța teorema următoare:

Teorema 12. Dacă numerele $\Lambda_{m,i}(x_0)$, $i = 0, 1, \dots, m$ sunt toate de același semn, gradul de exactitate al formulei (57) este p și restul este de formă simplă.

În condițiile teoremei, restul este deci de forma

$$R = l^{(m)}(x_0) D_{p+1}[f].$$

Dacă presupunem că $l^{(m)}(x_0) = 0$, o demonstrație absolut analogă bazată pe formula (78), ne permite să enunțăm

Teorema 13. Dacă $l^{(m)}(x_0) = 0$ și dacă numerele $\Lambda_{m-1,i}(x_0)$, $i = 0, 1, \dots, m-1$ sunt de același semn, gradul de exactitate al formulei (57) este egal cu $p+1$ și restul este de formă simplă.

În condițiile teoremei restul este de forma

$$R = m l^{(m-1)}(x_0) D_{p+2}[f]$$

deoarece din (82) deducem

$$R[x^{(p+1)}] = m l^{(m-1)}(x_0).$$

Teoremele 12, 13 sunt valabile în ipoteza (70). Într-adevăr, dacă $r_i \leq m$ și $x_0 = x_i$, egalitățile $l^{(m)}(x_0) = 0$ și $l^{(m-1)}(x_0) = 0$ sunt incomputabile pe baza lemei 1.

31. Să considerăm acum cazul general al formulei (E). Vom arăta cum se poate reduce acest caz la cazul $r = 0$.

Dacă considerăm polinomul de gradul $r-1$

$$L(x) = L\left(\underbrace{x_0, x_0, \dots, x_0}_r; f; x\right) \quad (84)$$

și dacă înlocuim schema de formulele (28), (29), deducem

$$\frac{f(x) - L(x)}{(x - x_0)^r} = \underbrace{[x, x_0, x_0, \dots, x_0; f]}_r. \quad (85)$$

Aplicând acum formula

$$L\left(\underbrace{x_0, x_0, \dots, x_0}_r; x_1, x_2, \dots, x_{p+1}; f | x\right) = \quad (86)$$

$$= l(x) L\left(\underbrace{x_0, x_0, \dots, x_0}_r; \frac{f(x)}{l(x)} | x\right) + (x - x_0)^r L\left(x_1, x_2, \dots, x_{p+1}; \frac{f(x)}{(x - x_0)^r} | x\right)$$

funcției $f(x) - L(x)$ și ținând seama de relațiile

$$L\left(\underbrace{x_0, x_0, \dots, x_0}_r; \frac{f(x) - L(x)}{(x - x_0)^r} | x\right) = 0$$

$$\begin{aligned} & L\left(\underbrace{x_0, x_0, \dots, x_0}_r; x_1, x_2, \dots, x_{p+1}; f(x) - L(x) | x\right) = \\ & = L\left(\underbrace{x_0, x_0, \dots, x_0}_r; x_1, x_2, \dots, x_{p+1}; f | x\right) - L(x) \end{aligned}$$

deducem

$$\begin{aligned} & L\left(\underbrace{x_0, x_0, \dots, x_0}_r; x_1, x_2, \dots, x_{p+1}; f | x\right) = \\ & = L(x) + (x - x_0)^r L\left(x_1, x_2, \dots, x_{p+1}; [x, \underbrace{x_0, x_0, \dots, x_0}_r; f] | x\right) \end{aligned}$$

de unde:

iar formula (E) se poate scrie

$$f^{(m+r)}(x_0) = \frac{(m+r)!}{m!} f^{(m)}(x_1', x_2', \dots, x_{p-1}', \underbrace{x_0, \dots, x_0}_r; f) + x_0 + \\ + \frac{(m+r)!}{m!} R_1[\underbrace{x_1, x_0, x_2, \dots, x_0}_r; f]. \quad (90)$$

32. Pentru a merge mai departe, vom demonstra mai întâi

Lemma 4. Dacă funcțiunea aditivă și omogenă $R_1[f]$ este de grad de exactitate $n \geq 0$ și de formă simplă, atunci funcțiunea aditivă și omogenă

$$R[f] = K \cdot R_1[x, x_1, x_2, \dots, x_n; f] \quad (91)$$

unde $K \neq 0$ este o constantă (independentă de funcția $f(x)$) și $x_1, x_2, \dots, x_n$ sunt k puncte fixe, este de grad de exactitate $n+k$ și este de formă simplă.

Demonstrația se face cu ușurință. Avem $[x, x_1, x_2, \dots, x_n; x^i] = 0$, pentru $i = 0, 1, \dots, k-1$, iar pentru $i \geq k$ aceasta diferență divizată este un polinom de gradul $i-k$, cu primul coeficient 1, deci

$$[x, x_1, x_2, \dots, x_n; x^i] = x^{i-k} + \dots$$

De aici rezultă proprietatea relativă fa. gradul de exactitate.

Să presupunem acum că $f(x)$ este o funcție convexă de ordinul $n+k$. Spunem atunci că funcția de $x[x, x_1, x_2, \dots, x_n; f]$ este convexă de ordinul n . Într-adevăr, avem

$$[\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n-2}; [x, x_1, x_2, \dots, x_n; f]] = [\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n-2}; x_1, x_2, \dots, x_n; f] > 0$$

deoarece nodurile nu sunt toate combinate. Egalitatea (91) ne arată că $R[f] \neq 0$, pentru orice funcție $f(x)$ convexă de ordinul $n+k$, deoarece $R_1[\varphi] \neq 0$ pentru orice funcție $\varphi(x)$ convexă de ordinul n , deci în particular $R_1[x, x_1, x_2, \dots, x_n; f] > 0$.

Lemma 4 este explicit demonstrată.

Ținând seama de formula (89), din teoremele 12, 13 deducem, luându-ne pe lemma precedentă

Teorema 14. Dacă $x_0' > 0$ este întreg și dacă numerele $A_{m,i}(x_0')$, $i = 0, 1, \dots, m$, sunt de același semn, formula de derivare numerică (E) are gradul de exactitate $p+r$ și restul de formă simplă.

Pe baza formulei (14) restul se scrie atunci

$$R = \frac{(m+r)!}{m!} f^{(m)}(x_0') D_{p+1,r}[f] \quad (92)$$

Teorema 15. Dacă $x_0' > 0$ este întreg, dacă $f^{(m)}(x_0') = 0$ și dacă numerele $A_{m,i}(x_0')$, $i = 0, 1, \dots, m-1$ sunt de același semn, formula de derivare numerică (E) are gradul de exactitate $p+r+1$ și restul de formă simplă.

Pe baza formulelor (12) restul se scrie atunci

$$R = \frac{(m+r)!}{(m-1)!} f^{(m-1)}(x_0') D_{p+1,r}[f]$$

Teorema 14. Este valabilă în ipoteza exprimată de relația (79).

33. Din cele spuse rezultă că formula (E) are cu siguranță restul de formă simplă dacă $m = 0$. Formula (E) pentru $m = 0$ are gradul de exactitate $p+r$ și restul

$$R = f(x_0') D_{p+1,r}[f]$$

în ipotezele date la punctul 2. În același condiții, formula (E) are gradul de exactitate $p+r+1$ și restul

$$R = f(x_0') D_{p+1,r}[f]$$

dacă $m = 1$ și x_0' este o rădăcină, diferită de nod

Ținând seama de formulele (74), avem atunci respectiv,

$$A_{m,i}(x_0) = (-1)^{p-m+1} m! h_{p+1-i} H_{p-i,p-m} \geq 0, \quad i = 0, 1, \dots, m,$$

$$(-1)^{r-m+1} A_{m,i}(x_0) = m! h_{p+1-i} H_{p-i,p-m} \geq 0, \quad i = 0, 1, \dots, m.$$

Toate ipotezele în care a fost stabilită Teorema 14 sunt deci îndeplinite și putem enunța

Teorema 16. Dacă $r \geq 0$ este întreg, m satisface condiția exprimată de (29) iar x_0 este în afara oricui mic interval deschis care conține nodurile (2), avem formula de derivare numerică (E), cu gradul de exactitate $p = r$ și cu restul de forma (32).

Ipotezele în care teorema este adevărată vor fi în cazul când $s = 1$, punctul x_0 să fie diferit de noduri.

35. **Exemplul 2.** Nodurile (2) sunt simetric distribuite față de punctul de derivare x_0 . Pentru a simplifica limbajul vom spune, în acest caz, că formula (E) este o formulă simetrică.

În cazul simetrie, putem să presupunem că punctul de derivare x_0 este diferit de noduri, deci că abaterile t_i sunt diferite de zero. Numărul nodurilor este atunci par și egal cu $2q = p + 1$, unde $q > 0$. Pentru mai multă claritate vom nota cu $\pm t_i$, $i = 1, 2, \dots, q$ abaterile, unde $t_1, t_2, \dots, t_q$ sunt q numere pozitive (distinse sau nu). Vom nota cu T_i , $i = 0, 1, \dots, q$ polinoamele simetrice fundamentale ale numerelor $t_1^2, t_2^2, \dots, t_q^2$ ($T_0 = 1$, $T_i = 0$, pentru $i < 0$ și pentru $i > q$). Vom nota de asemenea cu $T_{i,\alpha}$, $\alpha = 0, 1, \dots, i$ polinoamele simetrice fundamentale ale numerelor $t_1^2, t_2^2, \dots, t_q^2$ ($T_{i,0} = 1$, $T_{i,\alpha} = 0$, pentru $\alpha < 0$ și pentru $\alpha > i$). Avem atunci $T_{q,\alpha} = T_{i,\alpha}$, $i = 0, 1, \dots, q$.

Avem

$$f^{(m)}(x_0) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } m \text{ este impar} \\ (-1)^{\frac{m}{2}} m! T_{\frac{m}{2}} & \text{dacă } m \text{ este par.} \end{cases}$$

Rezultă că $f^{(m)}(x_0) \neq 0$ sau $= 0$, după cum m este par sau impar. Formula (E) este în acest caz excepțională dacă $r > 0$, iar rezultatele dela punctul 11 ne arată că este deghul să considerăm numai cazul când m este par, cazul m impar reducându-se la acesta prin modificarea numărului r .

În cazul căm mulțime de derivare m este par, îl vom nota cu $2q$, deci $m = 2q$, unde $0 \leq q \leq r$.

Să luăm acum nodurile în ordinea următoare:

$$x_0 - t_1, x_0 + t_1, x_0 - t_2, x_0 + t_2, \dots, x_0 - t_q, x_0 + t_q.$$

Avem, așa dar ¹⁾

$$h_\alpha = x'_\alpha - x_0 = (-1)^\alpha t_{\left[\frac{\alpha+1}{2}\right]}, \quad \alpha = 1, 2, \dots, 2q. \quad (94)$$

Pentru a calcula numerele $A_{2q,i}(x_0)$ vom calcula întâi numerele (70) corespunzătoare, unde $H_{i,\alpha}$ corespund la abaterile (94).

¹⁾ [x] înseamnă cel mai mare întreg cuprins în x.

Dacă α este par, $H_{\alpha,i}$, $i = 0, 1, \dots, \alpha$ sunt polinoamele simetrice fundamentale ale numerelor $\pm t_i$, $i = 1, 2, \dots, \frac{\alpha}{2}$. Un calcul elementar ne arată că

$$H_{\alpha,\gamma} = \begin{cases} 0, & \text{dacă } \gamma \text{ este impar} \\ (-1)^{\frac{\gamma}{2}} T_{\frac{\alpha}{2}-\frac{\gamma}{2}}, & \text{dacă } \gamma \text{ este par.} \end{cases} \quad (\gamma \text{ par}) \quad (95)$$

Dacă α este impar $H_{\alpha,\gamma}$, $\gamma =$

Condiția $m = 1$ implică $p \geq 1$. Vom presupune $s \geq 1$, deci că nodurile nu sînt toate confundate. În cazul contrar revenim de altfel la exemplul 1 studiat mai sus, care epuizează atîrcea problemă.

Pentru simplificare, să notăm cu $\varphi(x)$ polinomul $l_p(x)$. Avem deci

$$\psi(x) = (x - x_{p+1}) \varphi(x) \quad (97)$$

și

$$A_{1,0}(x) = (x - x_{p+1}) \varphi'(x), \quad A_{1,1}(x) = \varphi(x)$$

de unde

$$A_{1,0}(x) A_{1,1}(x) = l(x) \varphi'(x)$$

dacă polinoamele $A_{1,0}(x)$, $A_{1,1}(x)$ sunt construite luând nodurile în ordinea (6).

Condiția ca aceste polinoame să fie de același semn devine deci

$$l(x) \varphi'(x) \geq 0. \quad (98)$$

În mod analog, dacă punem

$$l(x) = (x - x_1) \psi(x)$$

deci

$$\psi(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_{p+1})$$

și dacă formăm polinoamele $A_{1,0}(x)$, $A_{1,1}(x)$ luând nodurile în ordinea inversă $x_{p+1}, x_p, \dots, x_1$, condiția ca aceste polinoame să fie de același semn este ca

$$l(x) \psi'(x) \geq 0. \quad (99)$$

Ipoteza exprimată prin condiția (79) revine aici la faptul că x_0 nu coincide cu un nod care nu este simplu.

Ambele inegalități (98), (99) sunt verificate pentru $x = x_0$, dacă x_0 coincide cu un nod sau dacă x_0 este înafară de cel mai mare interval care conține nodurile. Sîntem atunci în cazul exemplului 1 de mai sus.

Dacă avem

$$\varphi'(x) \psi'(x) \leq 0 \quad (100)$$

una din inegalitățile (98), (99) este verificată pentru $x = x_0$. Dacă deci, în acest caz, x_0 nu coincide cu un nod care nu este simplu, formula noastră are gradul de exactitate $p + r$ și restul de forma simplă. Va fi deci destul să examinăm punctul x_0 din intervalul deschis (x_1, x_2) , pentru care inegalitatea (100) nu este verificată. Dacă în pîc, în acest caz, gradul de exactitate este $p + r$, vom vedea că restul nu este simplu.

37. Pentru a urîta acest lucru, ne vom baza pe criteriul C și vom demonstra mai întîi

Lemma 5. Dacă $x_0 \in (x_1, x_2)$ și dacă

$$\varphi'(x_0) \psi'(x_0) > 0 \quad (101)$$

putem găsi o funcție convexă $l(x)$ de ordinul $p + r$ în intervalul $[x_1, x_2]$, astfel ca să avem $R[l] = 0$.

Să presupunem condiția (79) îndeplinită.

Pe baza lemei 5, este destul să putem construi două funcții $f_1(x)$, $f_2(x)$ necrescătoare de ordinul $p + r$, astfel ca inegalitatea (32) să fie verificată. Pentru aceasta, să considerăm funcțiile

$$\varphi_\lambda(x) = \begin{cases} 0, & \text{pentru } x \in [x_1, \lambda] \\ (x - \lambda)^{p+r}, & \text{pentru } x \in [\lambda, x_2] \end{cases} \quad (102)$$

definite pentru $\lambda \in [x_1, x_2]$.

Funcția $\varphi_\lambda(x)$ este necrescătoare de ordinul $p + r$ în $[x_1, x_2]$. Dacă privim pe λ ca variabilă, $R[\varphi_\lambda]$ este un polinom de gradul $p + r$ în raport cu $x - \lambda$, în orice interval care nu conține pe x_0 și nodurile.

Avem formula

Funcția $\psi_\lambda(x) = \varphi_\lambda(x) - (x - \lambda)^{r+1}$ este de asemenea necreștătoare de ordinul $p + r$. Dacă presupunem $\lambda < x_0$, $\lambda \in (x_1, x_2)$ și folosim formula

$$R[\psi_\lambda] = (x_0 - x_1) \varphi'(x_0) \frac{(x_0, x_1, \dots, x_0, x_2, x_2, \dots, x_{p+1}, \psi_\lambda)}{r+1} + \\ + \psi(x_2) \frac{(x_0, x_0, \dots, x_0, x_2, x_2, \dots, x_{p+1}, \psi_\lambda)}{r+2}$$

găsim, ca mai sus, că polinomul $R[\psi_\lambda]$ în $x_1 - \lambda$ este de forma

$$R[\psi_\lambda] = \dots (x_1 - \lambda)^{p+r+1} \left[\binom{p+1}{r+1} \frac{(x_0 - x_1) \varphi'(x_0)}{(x_1 - x_0)^{r+1}} k_1(x_1) + \dots \right]$$

unde polinomul $k_1(x)$ este dat de $l(x) = (x - x_0)^r k_1(x)$, iar termenii ne scriși se divid cu $x_1 - \lambda$. De aici se vede că, dacă λ este suficient de aproape de x_1 , avem $R[\psi_\lambda] \neq 0$, și mai precis

$$\operatorname{sg} R[\psi_\lambda] = \operatorname{sg} \varphi'(x_0). \quad (104)$$

Formulele (104), (105) au fost deduse pe lângă ipotezele $\varphi'(x_0) \neq 0$, $\varphi(x_0) \neq 0$.

Să considerăm acum funcțiile

$$f_1(x) = \varphi_{x_0}(x), \quad f_2(x) = \psi_{x_0}(x).$$

Atunci, dacă λ_1 este suficient de aproape de x_1 iar λ_2 suficient de aproape de x_0 , din (104), (104'), (105), deducem

$$\operatorname{sg} R[f_1] R[f_2] = -\operatorname{sg} \varphi'(x_0) \varphi'(x_0) = -1$$

și inegalitatea (32) este verificată.

Lemma 5 este complet demonstrată.

Din cele ce preced rezultă că, dacă $m = 1$ și dacă x_0 nu coincide cu un nod care nu este simplu, formula de derivare numerică (E) prezintă unul din următoarele 3 aspecte:

1°. Dacă $\varphi'(x_0) \neq 0$, gradul de exactitate este $p + r + 1$, cu restul de formă simplă.

2°. Dacă $x_0 \in (x_1, x_2)$, $\varphi'(x_0) \neq 0$ și dacă inegalitatea (104) este verificată, gradul de exactitate este $p + r$, însă restul nu este de formă simplă.

3°. Pentru toate celelalte valori ale lui x_0 , gradul de exactitate este $p + r$ și restul de formă simplă.

3B. Putem determina cu mai multă precizie poziția punctului x_0 după cele trei cazuri semnalate.

Fie $y_1, y_2, \dots, y_{s-1}$ rădăcinile distincte de noduri, ale derivatelor $\varphi'(x)$. Aceste rădăcini sunt separate de nodurile (96) și putem presupune

$$x_j < y_j < x_{j+1}, \quad j = 1, 2, \dots, s-1.$$

Polinomul $\varphi'(x)$ are $s-2$, respectiv $s-1$, rădăcini diferite de noduri după cum $x_s = 1$, respectiv $x_s > 1$. Să notăm aceste rădăcini, în ordinea lor crescătoare, prin $z'_1, z'_2, \dots, z'_{s-1}$, unde z'_{s-1} nu există dacă $x_s = 1$. Avem atunci

$$x_j < z'_j < x_{j+1}, \quad j = 1, 2, \dots, s-2$$

iar dacă $x_s > 1$, aceste inegalități au loc și pentru $j = s-1$.

Din proprietatea linearizantă a variației rădăcinilor derivatelor unui polinom cu toate rădăcinile reale [8], rezultă că

$$y_j < z'_j, \quad j = 1, 2, \dots, s-2 \quad (106)$$

inegalitate care are loc și pentru $j = s-1$, dacă $x_s > 1$.

formule nu dispar decât pentru poziții multule particulare ale nodurilor. În enumerarea formulelor excepționale nu facem distincție între diferitele rădăcini, distincte de noduri, ale polinomului $f^{(e)}(x)$. Îi zălim atunci că numărul formulelor excepționale cu gradul de exactitate e (≥ 2) este

$$\Omega_2 + 2\Omega_3 + 3\Omega_4 + \dots + (e-1)\Omega_e \dots \frac{e(e-1)}{2}.$$

Pentru enumerarea formulelor simetrice, luăm $p = 2q-1$, $q \geq 0$. Am văzut că putem presupune $m = 2q$. Pentru q, r, p dați vor exista Ω_q tipuri de astfel de formule. Pentru q, r dați vom avea deci $q\Omega_q$ astfel de formule. În fine, gradul de exactitate al formulei fiind $2q+r-1$, numărul formulelor simetrice și cu gradul de exactitate e (≥ 1) este

$$\Omega_1 + 2\Omega_2 + 3\Omega_3 + \dots + \left\lfloor \frac{e+1}{2} \right\rfloor \Omega_{\left\lfloor \frac{e+1}{2} \right\rfloor}.$$

Dacă e este par, toate aceste formule sunt excepționale. Dacă însă e este impar pentru $r=0$, formulele nu sunt excepționale. Deci, în acest caz, $\frac{e+1}{2}\Omega_{\frac{e+1}{2}}$ dintre aceste formule sunt neexcepționale.

Pentru enumerarea formulelor reducibile descriem două cazuri. Unele cu toate nodurile confundate ($r=0$, $s=1$). Pentru un p dat există p astfel de formule, corespunzând valorilor $1, 2, \dots, p$ ale lui m . Gradul lor de exactitate este p ; există, deci, e astfel de formule de grad de exactitate e (≥ 1). Celelalte formule reducibile au două noduri distincte ($r=0$, $s=2$), care pot prezenta $\left\lfloor \frac{p+1}{2} \right\rfloor$ tipuri diferite. Dintre acestea însă, numai la $\left\lfloor \frac{p+1}{2} \right\rfloor - 1$ pot corespunde formule reducibile, pentru că dacă $r_1=1$, $r_2=p$, polinomul (37) are toate rădăcinile confundate. De asemenea, m nu poate lua decât valorile $2, 3, \dots, p-1$. Pentru un p (≥ 3) dat, avem deci $(p-2)\left(\left\lfloor \frac{p+1}{2} \right\rfloor - 1\right)$ astfel de formule. Aceste formule fiind ne-excepționale, există $(e-2)\left(\left\lfloor \frac{p+1}{2} \right\rfloor - 1\right)$ astfel de formule cu gradul de exactitate e (≥ 3).

Tabloul următor rezumă discuția de mai sus relativ la numărul formulelor de exactitate maximă, după natura lor specificată, de la gradul de exactitate 0 până la gradul de exactitate 5 inclusiv.

Ținem seama de următoarele valori ale numerelor,

$$\Omega_1 = 1, \quad \Omega_2 = 2, \quad \Omega_3 = 3, \quad \Omega_4 = 3, \quad \Omega_5 = 7, \quad \Omega_6 = 11.$$

Gradul de exactitate	Numărul formulelor						
	Reducibile			Neexcepționale $f^{(e)}(x_0) \neq 0$	Excepționale $f^{(e)}(x_0) = 0$	Simetrice	
	$s=1$	$s=2$	Total			Neex.	Sim.
0	—	—	—	—	—	—	—
1	1	—	1	1	—	1	—
2	2	—	2	14	1	—	1
3	3	1	4	34	5	4	1
4	4	2	6	68	17	—	5
5	5	3	8	135	61	9	5

61. Pentru a obține formulele de exactitate maximă, putem pleca de la cazul $r=0$, $s=p+1$. Această din urmă condiție este echivalentă cu faptul că toate nodurile sunt simple, adică punctele (ii) sunt distincte. Avem atunci

$$L(x_1, x_2, \dots, x_{p+1}; f(x)) = \sum_{i=1}^{p+1} \frac{f(x)}{(x-x_i)^{p+1}} \cdot f(x_i), \quad (108)$$

Pentru a exprima coeficienții

asa că luând seama la formulele (50) și (100) deducem

$$\frac{(-1)^{p-m}}{(m+r)!} f^{(m+r)}(x_0) = \sum_{i=1}^{r-1} \left[\sum_{j=1}^i \frac{H_{p-i-j}^{(1)}}{h^j(x_i)} \right] \cdot \frac{f^{(p)}(x_0)}{j!} + \sum_{j=1}^{p+1} \frac{H_{p-j}^{(1)}}{h^j(x_0)} f(x_0 + h) + R. \quad (112)$$

Dacă $H_{p-1-m} \neq 0$, această formulă are gradul de exactitate $p-1$, și dacă restul este de formă simplă, avem

$$R = H_{p-1-m} D_{p-1-m} [f].$$

Dacă $H_{p-1-m} = 0$, formula devine excepțională și are gradul de exactitate $p-1$ și dacă restul este de formă simplă, avem

$$R = H_{p-1-m} D_{p-1-m} [f].$$

Formulă de la formula (111), stabilită în cazul când abaterile h sunt diferite (și diferite de zero), obținem o altă tipuri de formule de derivare numerice (12) făcând ca, pe grup convenabile, abaterile să tindă una către alta.

12. Pentru a evalua coeficienții lui $f^{(j)}(x_0)$, $j = 0, 1, \dots, p-1$ în formula (112), putem să ne folosim de formula (86). Reformulăm la notațiile din formula (10), deducem din (86)

$$\sum_{i=0}^{p-1} c_i f^{(i)}(x_0) = \left\{ f(x) L \left(\frac{x_0, x_1, \dots, x_p}{f(x)} \right) \right\}_{x=x_0}^{(p-1)}. \quad (113)$$

Luând seama de (110) avem

$$\left\{ f(x) L \left(\frac{x_0, x_1, \dots, x_p}{f(x)} \right) \right\}_{x=x_0}^{(m+r)} = \sum_{j=0}^{p-1} \frac{1}{j!} f^{(j)}(x_0) (x-x_0)^{m+r-j} \cdot \left[\frac{f(x)}{f(x_0)} \right]_{x=x_0}^{(m+r)}. \quad (114)$$

Însă, pe baza formulelor (60), (73),

$$\left[\frac{f(x)}{f(x_0)} \right]_{x=x_0}^{(m+r)} = (-1)^{p-1-m-r} (m+r)! H_{p-1-m-r} [f].$$

Din compararea formulilor (113), (114) deducem deci

$$c_{m+r} = \frac{(-1)^{p-m-r} (m+r)!}{(r-1-j)!} \sum_{j=0}^{p-1} H_{p-1-m-r+j} \left(\frac{1}{x} \right) \left[\frac{1}{f(x)} \right]_{x=x_0}^{(p-1)}. \quad (115)$$

Dar, din egalitatea

$$\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{f(x_0)} + \dots$$

deducem

$$\left. \begin{aligned} (-1)^{p-1-m-r} H_{p-1-m-r} \left[\frac{1}{f(x)} \right]_{x=x_0}^{(p-1)} &= 1 \\ \sum_{j=0}^{p-1} H_{p-1-m-r+j} \left[\frac{1}{f(x)} \right]_{x=x_0}^{(p-1)} &= 0, \quad j = 1, 2, \dots, r-1 \end{aligned} \right\} \quad (116)$$

Eliminând pe

$$\left[\frac{1}{f(x)} \right]_{x=x_0}^{(p-1)}, \quad j = 0, 1, \dots, r-1$$

din ecuația (116) și din primele $j+1$ ecuații (116), deducem

$$\begin{aligned} c_{m+r} &= \frac{(-1)^{p-1-m-r} (m+r)!}{(r-1-j)! H_{p-1-m-r}} \cdot \begin{vmatrix} H_p & H_{p+1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ H_{p-1} & H_p & H_{p+1} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ H_{p-1-j} & H_{p-j} & \dots & \dots & \dots & H_{p-1} \\ H_{p-m-r} & H_{p-m-r+1} & \dots & \dots & \dots & H_{p-m} \end{vmatrix} \\ j &= 0, 1, \dots, r-1. \end{aligned}$$

Această formulă rezultă și din formula lui Taylor (118) (pentru $m = 0$ și cu o schimbare de notăție). Pentru $p = m = r = 0$, cele două formule (118), (119) coincid.

3°. Să presupunem că $p = 1$, $m = 0$. Un calcul simplu ne măsoară că, determinantul din membrul al doilea al formulei (117) este egal cu

$$\frac{h_1^{r-2} - h_2^{r-2}}{h_1 - h_2}$$

și deducem formula

$$\frac{1}{r!} f^{(r)}(x_0) = - \sum_{j=0}^{r-1} \frac{1}{j! (h_1 h_2)^{r-j}} \cdot \frac{h_1^{r-j+1} - h_2^{r-j+1}}{h_1 - h_2} f^{(j)}(x_0) - \frac{1}{(h_1 h_2)^r (h_1 - h_2)} [h_2^{r+1} f(x_0 + h_1) - h_1^{r+1} f(x_0 + h_2)] + h_1 h_2 D_{r+2}[f]. \quad (120)$$

Din aceasta se deduce și formula limită ($h_2 \rightarrow h_1 = h$)

$$\frac{1}{r!} f^{(r)}(x_0) = - \sum_{j=0}^{r-1} \frac{r-j+1}{j! h^{r-j}} f^{(j)}(x_0) + \frac{r+1}{h^r} f(x_0 + h) - \frac{1}{h^{r+1}} [f(x_0 + h) + h^2 D_{r+2}[f]]. \quad (121)$$

4°. Pentru $p = m = 1$, determinantul din membrul al doilea al formulei (116) este egal cu

$$\frac{h_1^{r+1} - h_2^{r+1}}{h_1 - h_2}$$

și deducem formula

$$\frac{1}{(r+1)!} f^{(r+1)}(x_0) = \sum_{j=0}^{r-1} \frac{1}{j! (h_1 h_2)^{r-j}} \cdot \frac{h_1^{r-j} - h_2^{r-j}}{h_1 - h_2} f^{(j)}(x_0) + \frac{1}{(h_1 h_2)^r (h_1 - h_2)} [h_2^{r+1} f(x_0 + h_1) - h_1^{r+1} f(x_0 + h_2)] + h_1 h_2 D_{r+2}[f]. \quad (122)$$

Această formulă este de gradul de exactitate $r+1$, dacă $h_1 + h_2 \neq 0$, dar restul în general nu este de formă simplă. Din această formulă deducem și formula limită ($h_2 \rightarrow h_1 = h$)

$$\frac{1}{(r+1)!} f^{(r+1)}(x_0) = \sum_{j=0}^{r-1} \frac{r-j}{j! h^{r-j+1}} f^{(j)}(x_0) - \frac{r}{h^{r+1}} f(x_0 + h) + \frac{1}{h^r} f'(x_0 + h) - 2h D_{r+2}[f]. \quad (123)$$

Dacă $h_1 + h_2 = 0$, formula (122) devine excepțională și se poate scrie sub forma

$$\frac{1}{(r+1)!} f^{(r+1)}(x_0) = \sum_{j=0}^{\left[\frac{r-1}{2}\right]} \frac{1}{(r-1-2j)!} \cdot \frac{1}{h^{2j+2}} f^{(r-1-2j)}(x_0) + \frac{1}{2h^{r+1}} [f(x_0 + h) + (-1)^{r+1} f(x_0 - h)] - h^2 D_{r+1}[f]. \quad (124)$$

44. Dintre formulele de gradul de exactitate ≤ 5 nu vom scrie explicit decât pe acelea pentru care $s = 1$, deci pentru care nodurile sunt toate confundate, afară bineînțeles de acelea care au și fost semnalate. Restul acestor formule este de formă simplă. Pentru gradele de exactitate 0, 1, 2, 3, 4, 5, există respectiv 1, 3, 6, 10, 15, 21 astfel de formule. Dintre aceste formule 1, 2, 3, 4, 5 respectiv 6 se deduc din formula (118) și câte una din formulele (119), (121), (123). Grupăm cele 0, 0, 0, 3, 7 respectiv 12 formule rămase după gradul lor de exactitate. În paranteză, după formulă, indicăm pe rând valorile corespunzătoare ale numerelor p, r, m . Pentru simplificare, în formulele particulare pe care le scriem, presupunem $x_0 = 0$. Se trece la cazul lui x_0 carecăr, printr-o transformare lineară simplă.

Gradul de exactitate 3:

$$(F1) \quad f'(0) = \frac{3}{h} [f(h) - f(0)] - 2f'(h) + \frac{h}{2} f''(h) - h^2 D_4[f] \quad (2, 1, 0)$$

$$(F2) \quad f''(0) = \frac{6}{h^2} [f(0) - f(h)] + \frac{6}{h} f'(h) - 3f''(h) + 6h D_4[f] \quad (2, 1, 1)$$

$$(F3) \quad f'''(0) = \frac{6}{h^3} [f(h) - f(0)] - \frac{6}{h^2} f'(h) - \frac{3}{h} f''(h) - 18h D_4[f] \quad (2, 1, 2)$$

Gradul de exactitate 4:

$$(F8) \quad f''(0) = \frac{12}{h^2} [f(h) - f(0)] + \frac{6}{h} [f'(0) + f'(h)] + f''(h) - 2k^2 D_0[f] \quad (3, 2, 0)$$

$$(F9) \quad f'''(0) = \frac{48}{h^3} [f(0) - f(h)] + \frac{18}{h^2} f'(0) + \frac{80}{h^2} f'(h) - \frac{6}{h} f''(h) + 18k^2 D_0[f] \quad (2, 2, 1)$$

$$(F10) \quad f^{IV}(0) = \frac{72}{h^4} [f(h) - f(0)] + \frac{24}{h^3} f'(0) + \frac{48}{h^3} f'(h) + \frac{12}{h^2} f''(h) - 72k^2 D_0[f] \quad (2, 2, 2)$$

Gradul de exactitate 5:

$$(F11) \quad f^{(5)}(0) = \frac{5}{h} [f(h) - f(0)] - 4f'(h) + \frac{8}{2} hf'(h) + \frac{1}{3} k^2 f'''(h) + \frac{h^2}{24} f^{IV}(h) - k^2 D_0[f] \quad (4, 1, 0)$$

$$(F12) \quad f^{(5)}(0) = \frac{20}{h^2} [f(0) - f(h)] + \frac{20}{h} f'(h) - 9f''(h) + \frac{7}{3} hf''(h) - \frac{h^2}{3} f^{IV}(h) + 10k^2 D_0[f] \quad (4, 1, 1)$$

$$(F13) \quad f^{(5)}(0) = \frac{60}{h^3} [f(h) - f(0)] + \frac{60}{h^2} f'(h) + \frac{30}{h} f''(h) - 9f'''(h) + \frac{3}{h} hf'''(h) - 60k^2 D_0[f] \quad (4, 1, 2)$$

$$(F14) \quad f^{(5)}(0) = \frac{120}{h^4} [f(0) - f(h)] + \frac{120}{h^3} f'(h) - \frac{60}{h^2} f''(h) + \frac{20}{h} f'''(h) - 4f^{IV}(h) + 240k^2 D_0[f] \quad (4, 1, 3)$$

$$(F15) \quad f^{(5)}(0) = \frac{120}{h^5} [f(h) - f(0)] - \frac{120}{h^4} f'(h) + \frac{40}{h^3} f''(h) + \frac{20}{h^2} f'''(h) + \frac{5}{h} f^{IV}(h) - 600k^2 D_0[f] \quad (4, 1, 4)$$

$$(F16) \quad f^{(5)}(0) = \frac{20}{h^2} [f(h) - f(0)] + \frac{8}{h} f'(0) + \frac{12}{h} f'(h) + 3f''(h) - \frac{h}{3} f'''(h) + 2k^2 D_0[f] \quad (3, 2, 0)$$

$$(F17) \quad f^{(5)}(0) = \frac{120}{h^3} [f(0) - f(h)] + \frac{36}{h^2} f'(0) + \frac{84}{h^2} f'(h) - \frac{24}{h} f''(h) + 3f'''(h) - 24k^2 D_0[f] \quad (3, 2, 1)$$

$$(F18) \quad f^{(5)}(0) = \frac{360}{h^4} [f(h) - f(0)] - \frac{96}{h^3} f'(0) - \frac{234}{h^3} f'(h) + \frac{84}{h^2} f''(h) + \frac{12}{h} f'''(h) + 144k^2 D_0[f] \quad (3, 2, 2)$$

$$(F19) \quad f^{(5)}(0) = \frac{480}{h^5} [f(0) - f(h)] + \frac{120}{h^4} f'(0) + \frac{360}{h^4} f'(h) - \frac{120}{h^3} f''(h) + \frac{20}{h^2} f'''(h) - 480k^2 D_0[f] \quad (3, 2, 3)$$

$$(F20) \quad f^{(5)}(0) = \frac{60}{h^2} [f(h) - f(0)] + \frac{36}{h^2} f'(0) + \frac{9}{h} f'(h) - \frac{24}{h^2} f''(h) + \frac{3}{h} f'''(h) - 6k^2 D_0[f] \quad (2, 3, 0)$$

$$(F21) \quad f^{(5)}(0) = \frac{360}{h^4} [f(0) - f(h)] + \frac{192}{h^3} f'(0) + \frac{36}{h^2} f''(0) + \frac{168}{h^3} f'(h) - \frac{24}{h^2} f''(h) + 72k^2 D_0[f] \quad (2, 3, 1)$$

$$(F22) \quad f^{(5)}(0) = \frac{720}{h^5} [f(h) - f(0)] + \frac{360}{h^4} f'(0) - \frac{60}{h^3} f''(0) - \frac{360}{h^4} f'(h) + \frac{60}{h^3} f''(h) - 160k^2 D_0[f] \quad (2, 3, 2)$$

45. Formulele excepționale se obțin impunând abaterilor restricția $H_{p+1}(\alpha) = 0$. Vom scrie formulele excepționale de grad de exactitate ≤ 5 , însă numai pe acelea corespunzătoare lui $s = 2$, fără acelea care rezultă din formula (124). În acest caz, cele două abateri distincte k_1, k_2 sunt legate de o relație care permite să le exprimăm sub forma $\alpha k, \beta k$ (α, β fiind două numere fixe). Raportul numerelor $\alpha,$

Gradul de exactitate 3:

$$(F23) \quad f'(0) = \frac{4}{9h} [f(h) - f(-2h)] - \frac{1}{3} f'(-2h) - 4h^2 D_3[f] \\ (2, 0, 1; 2h_1 + h_2 = 0)$$

$$(F24) \quad f''(0) = \frac{2}{9h^2} [f(-2h) - f(h)] + \frac{2}{3h} f'(h) - 6h^2 D_3[f] \\ (2, 0, 2; h_1 + 2h_2 = 0)$$

Gradul de exactitate 4:

$$(F25) \quad f'(0) = \frac{27}{64h} [f(h) - f(-3h)] - \frac{11}{16} f'(-3h) - \\ - \frac{3h}{8} f''(-3h) - 27h^2 D_4[f] \quad (3, 0, 1; 3h_1 + h_2 = 0)$$

$$(F26) \quad f''(0) = \frac{3}{4h} [f(h) - f(-h)] - \frac{1}{4} [f'(h) + f'(-h)] + h^2 D_4[f] \\ (3, 0, 1; h_1 + h_2 = 0)$$

$$(F27) \quad f''(0) = \frac{3}{4h^2} [f(h) - f(-h)] - \frac{3}{2h} f'(-h) - \frac{1}{2} f''(-h) - 4h^2 D_4[f] \\ (3, 0, 2; h_1 + h_2 = 0)$$

$$(F28) \quad f''(0) = \frac{2\sqrt{3} + 5}{9h^2} [f(h) - f(-[2 - \sqrt{3}]h)] - [2 - \sqrt{3}] h f'(h) - \\ - h f'(-[2 - \sqrt{3}]h) + 4(3\sqrt{3} - 5) h^2 D_4[f] \\ (3, 0, 2; h_1^2 + 4h_1 h_2 + h_2^2 = 0)$$

$$(F29) \quad f'''(0) = \frac{3}{32h^3} [f(h) - f(-3h)] - \frac{3}{8h^2} f'(h) + \frac{3}{4h} f''(h) + R \\ (3, 0, 3; h_1 + 3h_2 = 0)$$

$$(F30) \quad f'''(0) = \frac{3}{2h^2} [f(-h) - f(h)] + \frac{3}{2h^2} [f'(h) + f'(-h)] - 12h^2 D_4[f] \\ (3, 0, 3; h_1 + h_2 = 0)$$

$$(F31) \quad f''(0) = \frac{1}{48h^2} [16f(h) - 11f(-2h) - 27f(0)] + \frac{1}{3h} f'(-2h) - \\ - 3h^2 D_3[f] \quad (2, 1, 1; 2h_1 + h_2 = 0)$$

$$(F32) \quad f'''(0) = \frac{1}{3h^2} [9f(0) - 8f(h) - f(-2h)] + \frac{2}{h^2} f'(h) - 18h^2 D_4[f] \\ (2, 1, 2; h_1 + 2h_2 = 0)$$

Gradul de exactitate 5:

$$(F33) \quad f'(0) = \frac{256}{625h} [f(h) - f(-4h)] - \frac{131}{125} f'(-4h) - \frac{28}{25} h f''(-4h) - \\ - \frac{8}{15} h^2 f'''(-4h) - 256h^5 D_5[f] \quad (4, 0, 1; 4h_1 + h_2 = 0)$$

$$(F34) \quad f'(0) = \frac{216}{625h} [f(2h) - f(-3h)] - \frac{1}{125} [27f'(2h) + 64f'(-3h)] - \\ - \frac{6h}{25} f''(-3h) + 108h^2 D_5[f] \quad (4, 0, 1; 3h_1 - 2h_2 = 0)$$

$$(F35) \quad f''(0) = \frac{108}{625h^2} [f(2h) - f(-3h)] - \frac{108}{125h} f'(-3h) - \frac{29}{25} f''(-3h) - \\ - \frac{3h}{5} f'''(-3h) - 370h^4 D_5[f] \quad (4, 0, 2; 3h_1 + 2h_2 = 0)$$

$$(F36) \quad f''(0) = \frac{9(117 + 62\sqrt{6})}{625h^2} \left[f(h) - f\left(-\frac{3 - \sqrt{6}}{3}h\right) \right] + \\ + \frac{9(54 + 19\sqrt{6})}{250h} \left[(\sqrt{6} - 3) f'(h) + \frac{\sqrt{6}}{3} f'\left(-\frac{3 - \sqrt{6}}{3}h\right) \right] + \frac{3\sqrt{6} - 3}{25} f''(h) - \\ - \frac{2}{3} (3 + 4\sqrt{6}) h^2 D_5[f] \quad (4, 0, 2; 3h_1^2 + 6h_1 h_2 + h_2^2 = 0)$$

$$(F37) \quad f'''(0) = \frac{48}{625h^3} [f(3h) - f(-2h)] - \frac{48}{125h^2} f'(-2h) - \frac{34}{25h} f''(-2h) - \\ - \frac{3}{5} f'''(-2h) + R \quad (4, 0, 3; 2h_1 + 3h_2 = 0)$$

$$(F38) \quad f'''(0) = \frac{6(311 + 129\sqrt{6})}{625h^3} [f(-[3 - \sqrt{6}]h) - f(h)] + \\ + \frac{3(81 + 34\sqrt{6})}{125h^2} f'(-[3 - \sqrt{6}]h) + \frac{3(107 + 48\sqrt{6})}{125h^2} f'(h) - \\ - \frac{3(2 + 3\sqrt{6})}{25} f''(h) + R \quad (4, 0, 3; h_1^2 + 6h_1 h_2 + 3h_2^2 = 0)$$

$$(F39) \quad f''(0) = \frac{24}{625h^4} [f(-4h) - f(h)] + \frac{24}{25h^4} f'(h) - \frac{12}{25h^4} f'(h) + \\ + \frac{4}{5h} f'''(h) = R \quad (4, 0, 4; h_1 + 4h_2 = 0).$$

$$(F40) \quad f''(0) = \frac{72}{625h^4} [f(-2h) - f(3h)] + \frac{24}{125h^3} [f'(3h) + 2f'(-2h)] + \\ + \frac{12}{25h^3} f''(-2h) = R \quad (4, 0, 4; 2h_1 + 3h_2 = 0)$$

$$(F41) \quad f''(0) = \frac{1}{48h^2} [81f(4h) - 47f(-3h) - 128f(0)] + \frac{5}{8h} f'(-3h) + \\ + \frac{1}{4} f''(-3h) = 54h^2 D_4[f] \quad (3, 1, 1; 3h_1 + h_2 = 0)$$

$$(F42) \quad f''(0) = \frac{2}{h^2} [f(-h) - 3f(0) + f(h)] + \frac{1}{2h} [f'(-h) - f'(h)] + 2h^2 D_4[f] \\ (3, 1, 1; h_1 = h_2 = 0)$$

$$(F43) \quad f''(0) = \frac{1}{4h^2} [48f(0) - 9f(-h) - 39f(h)] + \frac{15}{2h} f'(h) - \frac{3}{2} f'(-h) - \\ - 12h^2 D_4[f] \quad (3, 1, 2; h_1 + h_2 = 0)$$

$$(F44) \quad f''(0) = \frac{1}{h^2} \frac{12(5 - 3\sqrt{3})}{h^2} f(0) + \frac{3(1 + \sqrt{3})}{h^2} f'(h) + \\ + \frac{3(1 - \sqrt{3})}{h^2} f'(-h) - \frac{\sqrt{3}}{h^2} f'(h) + \frac{12 - 7\sqrt{3}}{h^2} f'(\sqrt{3}h) + \\ + 12(3\sqrt{3} - 5)h^2 D_4[f] \quad (3, 1, 2; h_1^2 + 4h_1 h_2 + h_2^2 = 0)$$

$$(F45) \quad f''(0) = \frac{1}{8h^4} [f(-3h) + 6f(h) - 6f(0)] + \\ + \frac{15}{2h^3} f'(h) + \frac{3}{h^3} f'(h) = R \quad (3, 1, 3; h_1 + 3h_2 = 0)$$

$$(F46) \quad f''(0) = \frac{12}{h^2} [2f(0) - f(h) - f(-h)] + \frac{6}{h^2} [f'(h) - f'(-h)] + \\ + 48h^2 D_4[f] \quad (1, 1, 3; h_1 + h_2 = 0)$$

$$(F47) \quad f''(0) = \frac{1}{6h^2} [16f(h) - 9f(0) - 7f(-2h)] + \\ + \frac{1}{2h^2} [9f(0) + f(-2h)] - 24h^2 D_4[f] \quad (2, 2, 1; 2h_1 + h_2 = 0)$$

$$(F48) \quad f''(0) = \frac{2}{3h^4} [27f(0) + f(-2h) - 28f(h)] + \frac{4}{h^4} [4f'(0) - 2f'(h)] + \\ + 72h^2 D_4[f] \quad (2, 2, 2; h_1 + 2h_2 = 0)$$

45. Formulele reducibile din a doua serie (cu $s=2$) se obțin ușor din formulele excepționale deosebite a căror formulă este excepțională ca o formulă de derivare numerică a funcției $f(x)$. O formulă reducibilă cu caracteristicile $p, (r=) 0$, se obține din formula excepțională corespunzătoare cu caracteristicile respective $p-2, 0, m=1$. Câte 11 formule reducibile de grad de exactitate ≤ 5 , din această serie, se obțin din formula (124) pentru $r=0$ și din formulele (F23) - (F40). Aceste formule sunt

Gradul de exactitate 3:

$$(F49) \quad f''(0) = \frac{1}{2h} [f(h) - f(-h)] - 4h^2 D_4[f] \quad (3, 0, 2)$$

Gradul de exactitate 4:

$$(F50) \quad f''(0) = \frac{4}{9h} [f'(h) - f'(-2h)] - \frac{1}{3} f''(-2h) - 20h^2 D_4[f] \\ (4, 0, 2; 2h_1 + h_2 = 0)$$

$$(F51) \quad f''(0) = \frac{2}{9h^3} [f'(-2h) - f'(h)] + \frac{2}{3h} f''(0) - 36h^2 D_4[f] \\ (4, 0, 3; h_1 + 2h_2 = 0)$$

Gradul de exactitate 5:

$$(F52) \quad f''(0) = \frac{27}{64h} [f(h) - f(-3h)] - \frac{11}{16} f''(-2h) - \frac{3h}{$$

$$(F56) \quad f^{IV}(0) = \frac{3}{32h^3} [f'(h) - f'(-3h)] - \frac{3}{8h^3} f''(h) + \frac{3}{4h} f'''(h) + R$$

$$(5, 0, 4; h_1 + 3h_2 = 0)$$

$$(F57) \quad f^{IV}(0) = \frac{3}{2h^3} [f'(-h) - f'(h)] + \frac{3}{2h^3} [f'(h) + f'(-h)] - 72h^3 D_4[f]$$

$$(5, 0, 4; h_1 + h_2 = 0)$$

Simplitatea restului, în cazul formulelor (F49), (F53), (F57), rezultă din simetria acestor formule.

Resturile formulelor (F50), (F51), (F52), (F54) și (F55) se pot scrie respectiv

$$-4h^3 D_4[f], \quad 6h^3 D_4[f], \quad -27h^3 D_4[f], \quad -4h^3 D_4[f],$$

$$4(3\sqrt{3} - 5)h^3 D_5[f].$$

Dar funcționala ($n \geq 2$)

$$R[f] = [x_1, x_2, \dots, x_n; f]$$

unde $x_1, x_2, \dots, x_n$ sunt n puncte fixe, nu toate confundate, este de grad de exactitate $n-1$ și este de formă simplă. Proprietatea relativă la gradul de exactitate rezultă din formula (36). Simplitatea rezultă din faptul că, dacă $f(x)$ este o funcție convexă de ordinul $n-1$, $f'(x)$ este o funcție convexă de ordinul $n-2$. Avem în acest caz $R[f] = 0$, deci

$$[x_1, x_2, \dots, x_n; f] = n D_n[f]$$

intervalul $[a, b]$ fiind cel mai mic interval închis care conține punctele $x_1, x_2, \dots, x_n$. De aici rezultă formula

$$D_{n-1}[f] = n D_n[f]$$

a cărei însemnătate este clară și din care am dedus resturile formulelor (F50), (F51), (F52), (F54) și (F55).

47. Formulele (8) simetrice se pot scrie întrebunțând notațiile dela punctul 35, scriind abaterile sub forma $\pm h_i$, $i = 1, 2, \dots, q$. Dacă notăm cu $T_{\alpha}^{(q)}$, $\alpha = 0, 1, \dots, q-1$ polinoamele simetrice fundamentale ale lui $h_1^2, h_2^2, \dots, h_q^2$, $\hat{h}_1^2, \hat{h}_2^2, \dots, \hat{h}_q^2$ ($T_0^{(q)} = 1$, $T_{q-1}^{(q)} = 0$, pentru $\alpha < 0$ și $\alpha > q-1$) și dacă ținem seama de (94), deducem

$$H_{2q-2q-1}^{(2q)} = (-1)^{q-\alpha} h T_{q-\alpha-1}^{(q)}, \quad H_{2q-2q-1}^{(2q)} = (-1)^{q-\alpha-1} h T_{q-\alpha-2}^{(q)}$$

$$i = 1, 2, \dots, q.$$

Avem și

$$H_{\alpha} = \begin{cases} 0, & \text{pentru } \alpha \text{ impar} \\ (-1)^{\frac{\alpha}{2}} T_{\frac{\alpha}{2}}^{(q)}, & \text{pentru } \alpha \text{ par.} \end{cases} \quad (125)$$

Să punem

$$\varphi(x) = (x - t_1^2)(x - t_2^2) \dots (x - t_q^2)$$

atunci $\lambda(x) = \varphi(x^2)$, de unde, ținând seama de (94),

$$\lambda'(h_{2i}) = 2h_i \varphi'(t_i^2), \quad \lambda'(h_{2i-1}) = -2h_i \varphi'(t_i^2).$$

Făcând calculele, formula (109) devine

$$\frac{(-1)^{q-\alpha-1}}{(2q)!} f^{(2q+\alpha)}(x_0) = \sum_{i=1}^q \frac{T_{q-\alpha-1}^{(q)}}{2\varphi'(t_i^2)} [f(x_0 + t_i) + f(x_0 - t_i)] - T_{q-\alpha} D_{2q+1}[f].$$

Pentru a trece la cazul $r > 0$, ținem seama de formulele (85) și (90). Observăm că

$$[x_0 \pm t_i, \underbrace{x_0, x_0, \dots, x_0}_r; f] + [x_0 \pm t_i, \underbrace{x_0, x_0, \dots, x_0}_r; f] =$$

$$= 2[x_0 \pm t_i, \underbrace{x$$

Coefficientii lui $f^{(r)}(x_0)$, $j = 0, 1, \dots, \left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor$ în această formulă se pot calcula cu și mai sus, în cazul formulei (112). Făcând calculele și înmăștrind procedeul de mai sus obținem

$$\sum_{j=0}^n \frac{T_{n,j}^{(r)}(x_0)}{h^j r! j!} = \frac{(1-x)^{r-1}}{r!} \begin{vmatrix} T_{n,1} & T_{n,2} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ T_{n,2} & T_{n,3} & T_{n,4} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ T_{n,r-1} & T_{n,r} & \dots & \dots & \dots & T_{n,r} \\ T_{n,r-1} & T_{n,r-1} & \dots & \dots & \dots & T_{n,r-1} \end{vmatrix}$$

$$j = 0, 1, \dots, \left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor.$$

Acest rezultat se poate deduce și din (117), ținând seama de (125). Formula (127) este valabilă atâta timp cât abaterile $\pm h$ sunt distincte. Formulele de celelalte tipuri se obțin făcând ca abaterile h , $i = 1, 2, \dots, y$, să tindă, pe grupe, una către alta.

48. Din (120) deducem formula simetrică ($h_1 + h_2 = 0$):

$$\frac{1}{r!} f^{(r)}(x_0) = \frac{1}{h^r} \sum_{j=0}^{\left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor} \frac{f^{(r-2j)}(x_0)}{(r-2j)! h^{2j}} = \frac{1}{2h^r} [f(x_1+h) + (-1)^j f(x_1-h)] + h^2 D_2[f].$$

Acum, pentru $r = 0, 1, 2, 3, 4$, ne dă formule simetrice de grad de exactitate 1, 2, 3, 4, 5.

$$(F58) \quad f(0) = \frac{1}{2} [f(h) + f(-h)] - h^2 D_2[f] \quad (1, 0, 0)$$

$$(F59) \quad f'(0) = \frac{1}{2h} [f(h) - f(-h)] - h^2 D_3[f] \quad (1, 1, 0)$$

$$(F60) \quad \frac{1}{2} f''(0) = -\frac{f(h)}{h^2} + \frac{1}{2h^2} [f(h) + f(-h)] - h^2 D_4[f] \quad (1, 2, 0)$$

$$(F61) \quad \frac{1}{6} f'''(0) = -\frac{f'(0)}{h} + \frac{1}{2h^3} [f(h) - f(-h)] - h^2 D_5[f] \quad (1, 3, 0)$$

$$(F62) \quad \frac{1}{24} f^{(iv)}(0) = \dots - \frac{f(0)}{h^4} + \frac{f''(0)}{2h^2} + \frac{1}{2h^4} [f(h) + f(-h)] - h^2 D_6[f] \quad (1, 4, 0)$$

Mară de aceasta, am mai urmăriți formule simetrice de grad de exactitate ≤ 5 :

Gradul de exactitate 3:

$$(F63) \quad f(0) = \frac{h^2 [f(h) + f(-h)] - h^2 [f(h) + f(-h)]}{2(h^2 - h^2)} + h^2 D_2[f] \quad (-3, 0, 0)$$

$$(F64) \quad f(0) = \frac{f(h) + f(-h)}{2} - \frac{h^2}{4} [f'(h) - f'(-h)] + h^4 D_4[f] \quad (3, 0, 0)$$

$$(F65) \quad f'(0) = \frac{f(h) - f(-h)}{2h} - \frac{f(h) - f(-h)}{h^2} + 2(h^2 + h^2) D_4[f] \quad (3, 0, 2)$$

La acestea se mai adaugă formula (F40).

Gradul de exactitate 4:

$$(F66) \quad f(0) = \frac{h^4 [f(h) - f(-h)] - h^4 [f(h) - f(-h)]}{2h^4 (h^2 - h^2)} + h^4 D_4[f] \quad (1, 1, 0)$$

$$(F67) \quad f''(0) = \frac{h^4 [f(h) - f(-h)] - h^4 [f(h) - f(-h)]}{h^4 (h^2 - h^2)} - 6(h^2 + h^2) D_5[f] \quad (3, 1, 2)$$

La acestea se mai adaugă formulele (F20), (F30).

Gradul de exactitate 5:

$$(F75) \quad f''(0) = 2 \frac{x^2 + p}{x^2 q} f(0) + \frac{x^2 [f(0) + f(-0)] + p^2 [f(x) + f(-x)]}{6 x^2 (x^2 - p^2)} + \\ + 24 p^3 H_6[f] \quad (3, 2, 0)$$

$$(F76) \quad f'''(0) = \frac{24}{x^2 q^2} f(0) - 12 \frac{x^2 [f(0) + f(-0)] + p^2 [f(x) + f(-x)]}{6 x^2 (x^2 - p^2)} - \\ - 24 (p + x^2) D_4[f] \quad (3, 2, 2)$$

La acestea se mai adaugă formulele (F43), (F46), (F53) și (F57). Abaterile $h, t, u, v, \dots$ care intră în formulă se presupun diferite între ele și diferite de zero. Sumata din formulele (F74), (F75) și (F76) se referă la permutările circulare ale literelor t, u, v . Pentru simplificarea scrierii, am presupus și aici $x_0 = 0$.

Formule cu diferențe

49. Vom indica, pe scurt, modul cum se obțin aceste formule. Dăcă a ne preocupăm acum de forma rezultatului. Dacă folosim relațiile precedente, formula lui Newton

$$L(x'_1, x'_2, \dots, x'_{p+1}; f|x) = \sum_{i=0}^p (x - x'_i)(x - x'_2) \dots (x - x'_p) [x'_1, x'_2, \dots, x'_{i+1}; f]$$

ne dă

$$L^{(m)}(x'_1, x'_2, \dots, x'_{p+1}; f|x_0) = \\ = m! \sum_{i=0}^p (-1)^{i-m} H_{i-m}[h_1, h_2, \dots, h_{i+1}; f(x_0 + x)]$$

pentru că, ținând seama de (72), avem și

$$[x'_1, x'_2, \dots, x'_{i+1}; f(x)] = [h_1, h_2, \dots, h_{i+1}; f(x_0 + x)].$$

Dacă în următoarea formulă de derivare numerică

$$f^{(m)}(x_0) + m! \sum_{i=0}^p (-1)^{i-m} H_{i-m}[h_1, h_2, \dots, h_{i+1}; f(x_0 + x)] + R, \quad (128)$$

Dacă ne folosim de formula (21), deducem

$$L(x'_1, x'_2, \dots, x'_p; f|x) = L(x_0, x_1, x'_2, \dots, x'_p; f|x) + \\ + (x'_{p+1} - x_0)(x - x'_1)(x - x'_2) \dots (x - x'_p) [x_1, x'_1, x'_2, \dots, x'_{p+1}; f]$$

de unde obținem formula de derivare numerică

$$f^{(m)}(x_0) + m! \sum_{i=0}^{p-1} (-1)^{i-m+1} H_{i-m+1}[0, h_1, h_2, \dots, h_{i+1}; f(x_0 + x)] + \\ + m! h_{p+1} H_{p,p-m}[0, h_1, h_2, \dots, h_{p+1}; f(x_0 + x)] + R$$

¹⁾ Pentru mai multă claritate, punem în evidență și variabilele care intră în relația diferenței divizibile și a polinoamelor de interpolare.

50. Să vedem cum trecem la cazul $x > 0$. Din formula generală¹⁾

$$L(x'_1, x'_2, \dots, x'_{p+1}; fg|x) = \\ = \sum_{i=0}^p L(x'_1, x'_2, \dots, x'_{i+1}; h_1(x)g(x)|x) [x'_1, x'_2, \dots, x'_{i+1}; f] \quad (129)$$

dacă x_0 este diferit de noduri, deducem

$$L\left(x'_1, x'_2, \dots, x'_{p+1}; \frac{f(x)}{(x - x_0)^r} \middle| x\right) = \\ = \sum_{i=0}^p L\left(x'_1, x'_2, \dots, x'_{i+1}; \frac{h_1(x)}{(x - x_0)^r} \middle| x\right) [x'_1, x'_2, \dots, x'_{i+1}; f]$$

Ținând seama de formulele (86) și (113), obținem

$$L^{(m+r)}\left(\frac{x_0, x_1, \dots, x_p, x'_1, x'_2, \dots, x'_{p+1}; f|x_0\right) = \sum_{i=0}^p c_i f^{(i)}(x_0) + \\ + \frac{(m+r)!}{m!} \sum_{i=0}^p L_i^{(r)}[h_1, h_2, \dots, h_{p+1}; f(x_0 + x)]$$

unde coeficienții $L_i^{(r)}$ sunt dați

ОТНОСИТЕЛЬНО ОСТАТКА В НЕСКОЛЬКИХ ФОРМУЛАХ ЧИСЛОВОЙ ДЕРИВАЦИИ (I)

НЕСКОЛЬКО СВОЙСТВ ФОРМУЛ ЧИСЛОВОЙ ДЕРИВАЦИИ МАКСИМАЛЬНОЙ
ТОЧНОСТИ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

Формула числовой деривации есть формула вида (1) и служит для вычисления приближенного значения производной порядка $m+r$ функции $f(x)$ в точке x_0 . Приближенное значение $f^{(m+r)}(x_0)$ равно сумме (без R) второго члена формулы (1), и R есть остаток числовой деривации. Узлы (2) и точки деривации x_0 суть различные и имеют соответственно порядки множественности $r, r_1, r_2, \dots, r_s$. Сумма $r_1 + r_2 + \dots + r_s = p+1$ есть общее число узлов.

Сумма максимальных рядов дериваций, эффективно вступающих во второй член, увеличенная числом s различных узлов и еще с 1, когда $r > 0$, есть порядок формулы (1). Остаток $R = R[f]$ есть аддитивный и однородный функционал относительно функции $f(x)$. Степень точности формулы (1) или функционала $R[f]$ равна наименьшему целому n , такому, чтобы $R[f]$ был нулем для любого многочлена n степени и отличен от нуля по меньшей мере для одного многочлена степени $n+1$, следовательно такому, чтобы формула (1) была точна без остатка для любого многочлена n степени, но не для всех многочленов $n+1$ степени. Важной формулой (1) является формула (E), которая получается подстановкой на место функции $f(x)$ ее многочлена интерполяции Лагранжа-Гермита, соответствующего узлам (2) и точке x_0 , повторенной r раз. В настоящей работе особо изучается формула (E). Подчеркивается переход от случая $r=0$ к случаю $r>0$, что в общем не представляет затруднений.

В § 1 доказывается, что среди всех формул (1), полученных изменением коэффициентов $a_j, a_{j'}$ этой формулы, формула (E) обладает самой большой степенью точности (теорема 2). Поэтому будем называть формулу (E) формулой максимальной точности. В общем степень точности формулы (E) равна $p+r$ и ее порядок равен $p+r+1$. Степень точности равна порядку и эти два числа равны $p+r$ или $p+r+1$, тогда и только тогда, если x_0 есть корень, отличный от узла одного из многочленов (16), где $l(x)$ есть многочлен (3) имеющий в качестве корней узлы (теорема 3). Будем говорить, что формула (E) есть исключительная, если ее порядок равен ее степени точности. Хотя, по меньшей мере по внешнему виду, исключительность представляет три различных вида, в зависимости от увеличения степени точности на единицу или уменьшения порядка на единицу, доказывают (§§ 10, 11), что эти три вида возвращаются друг к другу. Все доказательства даны без использования коэффициентов формулы интерполяции (10). Когда узлы (2) и числа m, r даны, существует конечное число точек x_0 , для которых формула (E) становится исключительной. Определяется это число (теорема 4) и по-

казывается (теорема 5), что в общем существуют исключительные формулы. Формула (E) называется сократимой, когда она зависит отчетливо лишь от производных функции $f(x)$. §1 заканчивается определением сократимых формул (теорема 6).

В § 2 приводятся несколько соображений относительно остатка. Аддитивный и однородный функционал $R[f]$, порядка точности n , будем называть простой формой, когда имеются (31) с $M \neq 0$, независимым от функции $f(x)$, где $\xi_i, i=1, 2, \dots, n+2$, являются $n+2$ различными точками интервала (открытого) определения функции $f(x)$. Функция $f(x)$ полагается непрерывной в этом интервале (закрытом). Для того чтобы остаток был простой формы, необходимо и достаточно (критерий C), чтобы имелось $R[f] \neq 0$ для любой выпуклой функции $f(x)$ порядка n . Изучаются некоторые свойства функционалов (34) простой формы и задача решается полностью для случая, когда степень точности есть $-1, 0$ или 1 (теорема 9, 10 и 11). Функционал (34), степень точности которого есть r , может быть простой формы лишь тогда, когда он четко содержит производные порядка $> n+1$ функции $f(x)$ (теорема 8).

В §§ 3 и 4 изучаются несколько случаев, когда можно утверждать, что остаток формулы (E) простой формы. Если $R[f]$, порядка точности $p+(x=0)$, принимает вид линейной комбинации разделенных разностей

$$(x=x_0), \left\{ \frac{x, x, \dots, x}{i+1}, x'_1, x'_2, \dots, x'_{p+1-i}; f \right\}, i=0, 1, \dots, m,$$

где $x'_1, x'_2, \dots, x'_{p+1}$

суть узлы (2), записанные каждый со своей соответствующей множественностью, тогда этот остаток есть простой формы, если коэффициенты $A_{m,i}(x_0), i=0, 1, \dots, m$, данные формулой (74) одинакового знака (теорема 14). Имеется аналогичное свойство, когда формула есть исключительная, степени точности $p+r+1$ (теорема 15). В частности находят в более общей форме, что остаток простой формы, когда x_0 находится вне наименьшего открытого интервала, содержащего узлы (теорема 16). Доказывается, и это является главным результатом настоящей работы, что остаток будет простой формы, когда в (E) узлы симметрично распредел

SUR LE RESTE DANS QUELQUES FORMULES DE DÉRIVATION NUMÉRIQUE (I)

2. QUELQUES PROPRIÉTÉS DES FORMULES DE DÉRIVATION NUMÉRIQUE D'EXACTITUDE MAXIMUM

PREMIÈRE

Une formule de dérivation numérique est une formule de la forme (1) et sert à calculer une valeur approximative de la dérivée d'ordre m de la fonction $f(x)$ au point x_0 . La valeur approximative de $f^{(m)}(x_0)$ est égale à la somme (sans R) du second membre de la formule (1) et R est le reste de cette formule de dérivation numérique. Les noeuds (2) et le point de dérivation x_0 sont distincts et ont respectivement les ordres de multiplicité $r_1, r_2, \dots, r_m$. La somme $r_1 + r_2 + \dots + r_m = p + 1$ est le nombre total des noeuds. La somme des ordres maxima de dérivation qui interviennent effectivement dans le second membre, augmentée du nombre s des noeuds distincts et de 1 si $r > 0$, est l'ordre de la formule (1). Le reste $R = R[f]$ est une fonctionnelle additive et homogène par rapport à la fonction $f(x)$. Le degré d'exactitude de la formule (1), ou de la fonctionnelle $R[f]$, est égal au plus petit entier n , tel que $R[f]$ soit nul pour tout polynôme du degré n et différent de zéro pour au moins un polynôme du degré $n+1$, donc tel que la formule (1) soit exacte, sans reste, pour tout polynôme du degré n , mais non pas pour tous les polynômes du degré $n+1$. Une formule importante (1) est la formule (E) obtenue en remplaçant la fonction $f(x)$ par son polynôme d'interpolation de Lagrange-Hermite, correspondant aux noeuds (2) et au point x_0 , répété r fois. On s'occupe spécialement, dans ce travail, de la formule (E). On insiste partout sur le passage du cas $r = 0$ au cas $r > 0$, ce qui se fait assez facilement en général.

Dans le § 1, on démontre que, parmi toutes les formules (1), obtenues en faisant varier les coefficients a_i, a_{ij} de cette formule, la formule (E) a le plus grand degré d'exactitude (théorème 2).

La formule (E) sera donc appelée formule d'exactitude maximum. En général, le degré d'exactitude de la formule (E) est égal à $p + r$ et son ordre, à $p + r + 1$. Le degré d'exactitude est égal à l'ordre, et ces deux nombres sont égaux à $p + r$ ou $p + r + 1$ si, et seulement si, x_0 est une racine, différente d'un noeud, de l'un des polynômes (16), où $l(x)$ est le polynôme (3) ayant les noeuds pour racines (théorème 3). La formule (E) est dite exceptionnelle, si son ordre est égal à son degré d'exactitude. Quoique, en apparence du moins, l'exceptionnalité présente trois aspects différents, suivant que le degré d'exactitude augmente d'une unité, ou que l'ordre diminue d'une unité, on démontre (Nos 10, 11) que ces trois aspects reviennent l'un à l'autre. Toutes les démonstrations sont faites sans utiliser les coefficients de la formule d'interpolation (10). Quand les noeuds (2) et les nombres m, r sont donnés, il existe un nombre fini de points x_0 , pour lesquels la formule (E) devient exceptionnelle. On détermine ce nombre (théorème 4) et on montre (théorème 5), qu'il existe en général, des formules exceptionnelles. Une formule (E) est dite réductible si elle ne dépend explicitement que des dérivées de la fonction $f(x)$. La démonstration des formules réductibles (théorème 6) termine le § 1.

Dans le § 2, on fait quelques considérations sur le reste. Une fonctionnelle additive et homogène $R[f]$, de degré d'exactitude n , est dite de forme simple si l'on a (31) où $M \neq 0$ est indépendant de la fonction $f(x)$, les ξ_i , $i = 1, 2, \dots, n+2$, étant $n+2$ points distincts de l'intervalle ouvert de définition de la fonction $f(x)$. La fonction $f(x)$ est supposée continue dans cet intervalle fermé. Pour que le reste soit de forme simple, il faut, et il suffit, (critère C) que l'on ait $R[f] \neq 0$ pour toute fonction $f(x)$ croissante d'ordre n . On étudie quelques propriétés des fonctionnelles (34) de forme simple et on résout complètement le problème, dans le cas où le degré d'exactitude est $-1, 0$ ou 1 (théorèmes 11, 10 et 11). La fonctionnelle (34), dont le degré d'exactitude est n , ne peut être de forme simple qu'elle ne contient pas explicitement, les dérivées d'ordre $\geq n+1$ de la fonction $f(x)$ (théorème 8).

Dans les §§ 3 et 4, on étudie quelques cas, pour lesquels on peut affirmer que le reste de la formule (E) est de forme simple. Si $R[f]$, de degré d'exactitude $p + r \leq 0$ est mis sous la forme d'une combinaison linéaire de différences divisées ($x = x_0$)

$$\left[\frac{f(x_0, x_1, \dots, x_i, x_{i+1}, \dots, x_{p+1})}{i!} \right]_{i=0}^{m-1} \quad i = 0, 1, \dots, m$$

où $x_1, x_2, \dots, x_m$ sont les noeuds (2), écrit chacun avec sa multiplicité respective, alors ce reste est de forme simple si les coefficients $A_{m,i}(x_0)$, $i = 0, 1, \dots, m$, donnés par les formules (74), sont du même signe (théorème 14). On a une propriété analogue, si la formule est exceptionnelle du degré d'exactitude $p + r + 1$ (théorème 15). En particulier, on trouve, sous une forme plus générale que le reste est de forme simple si x_0 est en dehors du plus petit intervalle ouvert qui contient les noeuds (théorème 16). On démontre également, et c'est le principal résultat de ce travail, que le reste est de forme simple, si dans (E) les noeuds sont symétriquement distribués par rapport au point x_0 (théorème 17). Ce résultat résout complètement le problème du reste

4. Michelsdze B. B., *Cistenne integriruvanie*. Uspeli Mat. Nauk, 1948, III, 6 (28), 3—88.
5. Norlund N. E., *Differenzenrechnung*, 1924.
6. Popoviciu T., *Introduction à la théorie des différences divisées*, Bull. Math. Soc. Roum. Sc. 1940, 42, 65—78.
7. — *Notes sur les fonctions convexes d'ordre supérieur* (XX). *Ibid.* 1941, 43, 85—141.
8. — *Sur certaines inégalités entre les zéros, supposés tous réels, d'un polynôme et ceux de sa dérivée*. *Annales Sc. de l'Univ. Jassy*, 1948, XXX, 191—218.
9. — *Asupra restului în unele formule de aproximare ale analizei*. *Lucrările Sesiunii Generale Științifice a Academiei R.P.R.*, 1950, p. 183—186.
10. Steffensen J. P. *Interpolation*, 1927.
11. Zampieri Gy., *Etude sur l'interpolation et la décomposition des fonctions rationnelles en fractions partielles*. *Archiv der Mathematik und Physik*, 1905, (3) 8, 214—226.