

P 578

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÂNE
INSTITUTUL DE MATEMATICĂ

STUDII ȘI CERCETĂRI M A T E M A T I C E

Impr. 0.82/1953.



1—2
ANUL III
IANUARIE—IUNIE
1952

BCU Cluj-Napoca



PMATE 2014 01016

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÂNE

STUDII ȘI CERCETĂRI MATEMATICE

Tomul III, Nr. 1—2

Ianuarie—Iunie 1952

S U M A R

	<u>Pag.</u>
MIRON NICOLESCU, Contribuțiuni la o analiză de tip hiperbolic a planului	7
TIBERIU POPOVICIU, Asupra restului în unele formule de derivare numerică. I. Câteva proprietăți ale formulelor de derivare numerică de exactitate maximă	53
MILLU ROTH, Studiul direcțiilor înfășurătoare într'un spațiu cu conexiune afină	123
MIHAIL BENADO, Asupra teoremelor de descompunere ale algebrei	263

ASUPRA RESTULUI ÎN UNELE FORMULE DE DERIVARE
NUMERICĂ(I) CÂTEVA PROPRIETĂȚI ALE FORMULELOR DE DERIVARE
NUMERICĂ DE EXACTITATE MAXIMĂ

DE

TIBERIU POPOVICIU

MEMBRU CORRESPONDENT AL ACADEMIEI R.P.R.

§ 1. Formule de exactitate maximă

1. O formulă de *derivare numerică* este o formulă care permite evaluarea aproximativă a valorii derivatei de un anumit ordin dat al unei funcții, într'un punct dat, printr'o combinație lineară dată a valorilor funcției și a unui număr finit dintre derivatele sale succesive, luate într'un număr finit de puncte date.

O formulă de derivare numerică este deci o formulă de forma

$$f^{(m+r)}(x_0) = \sum_{j=0}^{r-1} a_j f^{(j)}(x_0) + \sum_{i=1}^s \sum_{j=0}^{r_i-1} a_{i,j} f^{(j)}(x_i) + R \quad (1)$$

care permite să atribuim lui $f^{(m+r)}(x_0)$, ca valoare aproximativă, suma din membrul al doilea (fără R). În această formulă coeficienții a_j , $j = 0, 1, \dots, r-1$, $a_{i,j}$, $j = 0, 1, \dots, r_i-1$, $i = 1, 2, \dots, s$ sunt niște constante reale date, iar $f^{(j)}(x_0)$, $j = 0, 1, \dots, r-1$, $f^{(j)}(x_i)$, $j = 0, 1, \dots, r_i-1$, $i = 1, 2, \dots, s$ sunt valorile funcției $f(x)$ și ale derivatelor sale succesive $f'(x)$, $f''(x)$, ... în punctele date $x_0, x_1, x_2, \dots, x_s$.

Numărul R din membrul al doilea al formulei (1), este *restul* acestei formule. O expresie a restului, rezultată din natura funcției $f(x)$, permite o evaluare a erorii care se comite prin aproximația indicată a membrului întâi.

2. Trebuie să precizăm dela început ipotezele care vor fi păstrate în toată lucrarea și care sunt referitoare la datele formulei (1). Totodată, vom fixa și câteva denumiri în legătură cu aceste date.

1°. Punctele

$$x_1, x_2, \dots, x_s$$

(2)

de pe axa reală, presupuse *distincte* și în număr de $s \geq 1$, le vom numi *nodurile* formulei de derivare numerică.

2°. Fiecărui nod x_i îi este atașat un *ordin de multiplicitate* r_i . Numerele $r_1, r_2, \dots, r_s$ sunt numere *întregi pozitive*.

3°. Punctul x_0 este *diferit* de nodurile (2) și îl vom numi *punctul de derivare* al formulei (1).

4°. Punctului de derivare x_0 i se atașează un *ordin de multiplicitate* r , presupus *întreg pozitiv sau nul*.

5°. Numărul m , *întreg pozitiv sau nul*, îl vom numi *indicele de derivare* al formulei (1).

În fine relativ la funcția $f(x)$ vom face următoarea ipoteză, notând cu $[a, b]$ cel mai mic interval închis care conține nodurile și punctul de derivare.

6°. Funcția reală $f(x)$, de variabila reală x , este definită și *continuuă* în intervalul $[a, b]$. Afară de aceasta, se presupune că ea admite derivatele care intervin efectiv în formula (1) și cel puțin în punctele în care valorile acestor derivate figurează efectiv în formula (1)¹⁾.

Ipoteza continuității este făcută în vederea studiului restului formulei (1).

Orice altă ipoteză făcută asupra datelor problemei va fi menționată în mod expres.

Există o mulțime infinită $\mathfrak{N}$ de formule de derivare numerică (1), care sunt obținute dând coeficienților $a_j, a_{i,j}$ toate valorile reale posibile și având toate următoarele *caracteristice* comune:

1°. Nodurile, 2°. Ordinele de multiplicitate respective ale nodurilor, 3°. Punctul de derivare, 4°. Ordinul de multiplicitate al punctului de derivare, 5°. Indicele de derivare.

Este util să notăm cu $p + 1$ suma ordinelor de multiplicitate ale nodurilor, deci $r_1 + r_2 + \dots + r_s = p + 1$. Atunci $p \geq 0$ și $p + 1$ reprezintă *numărul total al nodurilor*, fiecare socotit cu ordinul său de multiplicitate.

Pentru toate formulele din $\mathfrak{N}$, numerele p, r, m sunt aceleași.

Fiecărei formule (1) din $\mathfrak{N}$ îi vom atașa două numere caracteristice importante: *ordinul* formulei și *gradul de exactitate* al formulei.

③ Ordinul formulei (1) servește la precizarea sumei ordinelor de derivare, care intervin efectiv în membrul al doilea. Pentru aceasta, vom defini în felul următor numerele $r'_1, r'_2, \dots, r'_s, r'$ atașate nodurilor și punctului de derivare:

$r'_i - 1$ este ordinul cel mai înalt de derivare care intervine efectiv în nodul x_i , deci,

$r'_i = 0$, dacă toți coeficienții $a_{i,j}, j = 0, 1, \dots, r_i - 1$ sunt nuli;

$a_{i,r'_i-1} \neq 0, a_{i,j} = 0, j = r'_i, r'_i + 1, \dots, r_i - 1$, dacă coeficienții $a_{i,j}$ nu sunt toți nuli, $i = 1, 2, \dots, s$.

$r' - 1$ este ordinul cel mai înalt de derivare care intervine efectiv în punctul x_0 în membrul al doilea, deci,

$r' = 0$, dacă $r = 0$ sau dacă toți coeficienții $a_j, j = 0, 1, \dots, r - 1$ sunt nuli,

$a_{r'-1} \neq 0, a_j = 0, j = r', r' + 1, \dots, r - 1$ dacă coeficienții a_j nu sunt toți nuli.

¹⁾ Acest fapt înseamnă că coeficientul a_j sau $a_{i,j}$ corespunzător este diferit de zero.

Avem atunci:

$$0 \leq r' \leq r, 0 \leq r'_i \leq r_i, i = 1, 2, \dots, s.$$

Egalitatea $r' = 0$, respectiv $r'_i = 0$, înseamnă că punctul de derivare, respectiv nodul x_i , nu figurează efectiv în membrul al doilea al formulei (1). Egalitatea $r' = r (> 0)$, respectiv $r'_i = r_i$, înseamnă că coeficientul a_{r-1} , respectiv a_{r_i-1} , este diferit de zero.

Prin definiție, suma $r'_1 + r'_2 + \dots + r'_s + r'$ se va numi *ordinul* formulei de derivare numerică (1).

Ordinul formulei (1) este cel mult egal cu $p + r + 1$.

În mulțimea $\mathfrak{N}$ există o formulă care are ordinul egal cu 0. Aceasta este *formula trivială* din $\mathfrak{N}$ care are toți coeficienții $a_j, a_{i,j}$ nuli. Orice altă formulă din $\mathfrak{N}$ are ordinul pozitiv.

Formula trivială nu prezintă niciun interes pentru problema derivării numerice.

4. Gradul de exactitate al formulei (1) ne arată cât de bună este aproximația studiată în cazul particular, când funcția $f(x)$ se reduce la un polinom de grad suficient de mic.

Restul R al formulei (1) este valoarea, dată de această formulă, a unei funcționale aditive și omogene. Pentru a pune în evidență funcția $f(x)$, vom nota această funcțională cu $R[f]$.

Funcționala $R[f]$ este definită în câmpul funcțiilor $f(x)$, care verifică ipotezele de mai sus. Acest câmp este un câmp vectorial, care conține toate funcțiile derivabile de un număr suficient de ori în intervalul $[a, b]$ și deci, în particular, toate polinoamele.

Prin definiție, gradul de exactitate al funcționalei $R[f]$, sau al formulei (1), este un număr întreg $n \geq -1$, astfel că:

1°. $R[P] = 0$, pentru orice polinom $P(x)$ de gradul n ¹⁾.

2°. $R[P] \neq 0$, pentru cel puțin un polinom $P(x)$ de gradul $n + 1$.

Definiția se aplică evident oricărei funcționale care este definită pentru toate polinoamele.

Din cauza aditivității și omogeneității funcționalei, gradul de exactitate n se poate defini și prin următoarele proprietăți:

1°. Dacă $R[1] \neq 0$, avem $n = -1$.

2°. Dacă $R[1] = 0$, n este cel mai mic număr întreg, astfel ca

$$R[x^i] = 0, i = 0, 1, \dots, n, R[x^{n+1}] \neq 0.$$

Este utilă următoarea observație: pentru ca gradul de exactitate al funcționalei $R[f]$ să fie $> n$, este necesar și suficient ca să avem $R[P] = 0$ pentru orice polinom $P(x)$ de gradul n și $R(P_1) = 0$ pentru cel puțin un polinom $P_1(x)$ de grad efectiv $n + 1$. Într-adevăr, orice polinom $Q(x)$ de gradul $n + 1$ este de forma $Q(x) = CP_1(x) + P(x)$, unde C este o constantă și $P(x)$ un polinom de gradul n . Avem atunci $R[Q] = CR[P_1] + R[P] = 0$.

Să introducem polinomul

$$l(x) = (x - x_1)^{r_1} (x - x_2)^{r_2} \dots (x - x_s)^{r_s}. \quad (3)$$

¹⁾ Un polinom de gradul -1 coincide cu polinomul identic nul.

Un calcul imediat ne dă atunci (conf. u).

$$R[(x-x_0)^{m'+r} l(x)] = [(x-x_0)^{m'+r} l(x)]_{x=x_0}^{(m+r)} = \frac{(m+r)!}{(m-m')!} l^{(m-m')}(x_0) \quad (4)$$

dacă m' este un număr întreg ≥ 0 . Pentru $m' > m$ această expresie este egală cu 0.

Pentru $m' = m$, numărul (4) este diferit de 0 pe baza ipotezelor făcute. Rezultă de aici existența gradului de exactitate al funcționalei $R[f]$. Mai rezultă că acest grad de exactitate este $\leq p+r+m$.

Este clar că gradul de exactitate este determinat în mod unic.

Gradul de exactitate al formulei triviale din $\mathfrak{M}$ este egal cu $m+r-1$, lucru ce se poate constata ușor.

5. Să considerăm polinomul de interpolare de gradul $p+r$

$$L(\underbrace{x_0, x_0, \dots, x_0}_r, x'_1, x'_2, \dots, x'_{p+1}; f|x) \quad (5)$$

relativ la funcția $f(x)$ și la sistemul de $p+r+1$ noduri, format din punctul x_0 repetat de r ori și din punctele

$$x'_1, x'_2, \dots, x'_{p+1} \quad (6)$$

care reprezintă nodurile (2), fiecare repetat de atâtea ori cât indică ordinul său de multiplicitate. Sistemul (6) reprezintă deci o renumerotare a nodurilor (2), ținând seama de multiplicitățile lor. Pentru fixarea notațiilor se poate presupune că:

$$x'_{r_1+r_2+\dots+r_{i-1}+j} = x_i, j=1, 2, \dots, r_i, i=1, 2, \dots, s. \quad (7)$$

Dacă $r=0$, punctul x_0 nu este nod al polinomului și nu figurează în notația (5).

Polinomul (5) este polinomul de gradul cel mai mic care coincide cu funcția $f(x)$ în cele $p+r+1$ noduri date. Prin aceasta se înțelege că, dacă un nod se repetă de k ori, polinomul (5), împreună cu primele sale $k-1$ derivate, coincide cu funcția $f(x)$ și cu primele sale $k-1$ derivate respective în acest nod. Polinomul (5) este deci în general polinomul lui Lagrange-Hermite [2], [3], care corespunde funcției și nodurilor puse în evidență prin notația (5), adică polinomul (unic) de gradul cel mai mic care verifică condițiile:

$$L^{(j)}(\underbrace{x_0, x_0, \dots, x_0}_r, x'_1, x'_2, \dots, x'_{p+1}; f|x_i) = f^{(j)}(x_i), \\ j=0, 1, \dots, r_i-1, i=0, 1, \dots, s \quad (r_0=r).$$

Forma explicită a polinomului (5) este bine cunoscută [3], [14]. Vom reaminti câteva din aceste rezultate sub forma utilizată aici.

Polinomul (5) este de forma

$$L(\underbrace{x_0, x_0, \dots, x_0}_r, x'_1, x'_2, \dots, x'_{p+1}; f|x) = \sum_{j=0}^{r-1} C_j(x) f^{(j)}(x_0) + \\ + \sum_{i=1}^s \sum_{j=0}^{r_i-1} C_{i,j}(x) f^{(j)}(x_i),$$

unde prima sumă din membrul al doilea dispare dacă $r=0$. Aici $C_j(x) = C_{0,j}(x)$, $C_{i,j}(x)$ sunt polinoame de gradul $p+r$, complet determinate de condițiile

$$\left. \begin{aligned} 1^\circ. C_{i,j}^{(j)}(x_i) &= 1, \\ 2^\circ. C_{i,j}^{(u)}(x_v) &= 0, \text{ pentru } |u-j| + |v-i| \neq 0. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

$$j=0, 1, \dots, r_i-1, i=0, 1, \dots, s \quad (r_0=r).$$

Dacă punem

$$\left. \begin{aligned} c_j &= C_j^{(m+r)}(x_0), j=0, 1, \dots, r-1, \\ c_{i,j} &= C_{i,j}^{(m+r)}(x_0), j=0, 1, \dots, r_i-1, i=1, 2, \dots, s \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

avem

$$L^{(m+r)}(\underbrace{x_0, x_0, \dots, x_0}_r, x'_1, x'_2, \dots, x'_{p+1}; f|x_0) = \sum_{j=0}^{r-1} c_j f^{(j)}(x_0) + \\ + \sum_{i=1}^s \sum_{j=0}^{r_i-1} c_{i,j} f^{(j)}(x_i) \quad (10)$$

și rezultă că

$$f^{(m+r)}(x_0) = L^{(m+r)}(\underbrace{x_0, x_0, \dots, x_0}_r, x'_1, x'_2, \dots, x'_{p+1}; f|x_0) + R \quad (E)$$

este o formulă de derivare numerică aparținând mulțimei $\mathfrak{M}$.

Pe baza formulelor (9) este clar că pentru $m > p$, formula (E) se reduce la formula banală.

6. Ne propunem să determinăm gradul de exactitate al formulei (E). Pentru aceasta vom avea nevoie de următoarea leamă:

Lema 1. Dacă două derivate de ordine consecutive $i, i+1$ ale unui polinom cu toate rădăcinile reale au o rădăcină comună, această rădăcină este o rădăcină a polinomului de ordin de multiplicitate cel puțin egal cu $i+2$.

Intr'adevăr, dacă rădăcina comună a derivatelor este a , polinomul se poate scrie sub forma

$$\alpha_0 + \alpha_1(x-a) + \alpha_2(x-a)^2 + \dots + \alpha_{i-1}(x-a)^{i-1} + \alpha_{i+2}(x-a)^{i+2} + \dots$$

și dacă coeficienții $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}$ nu ar fi toți nuli, polinomul ar prezenta o lacună de cel puțin 2 termeni, ceea ce este în contradicție cu realitatea tuturor rădăcinilor. Presupunem, bineînțeles, că ordinul efectiv al polinomului este cel puțin i .

Observăm acum că, dacă $f(x)$ este un polinom de gradul $p+r$, avem

$$L(\underbrace{x_0, x_0, \dots, x_0}_r, x'_1, x'_2, \dots, x'_{p+1}; f|x) = f(x) \quad (11)$$

și pentru formula (E) avem atunci $R[f] = 0$. Aceasta ne arată că gradul de exactitate al formulei (E) este $\geq p+r$. Se vede imediat că concluzia se menține și dacă (E) se reduce la formula banală.

Dacă $m \leq p$, formula (4) ne dă, în particular,

$$R[(x - x_0)^r l(x)] = \frac{(m+r)!}{m!} l^{(m)}(x_0), R[(x - x_0)^{r+1} l(x)] = \frac{(m+r)!}{(m-1)!} l^{(m-1)}(x_0) \quad (12)$$

și polinoamele $(x - x_0)^r l(x)$, $(x - x_0)^{r+1} l(x)$ sunt respectiv de gradele efective $p + r + 1$, $p + r + 2$.

Dacă $m = 0$, avem $l(x_0) \neq 0$, pe baza ipotezelor făcute, iar dacă $m > 0$, ținând seamă și de lema 1, se vede că nu putem avea în același timp

$$l^{(m)}(x_0) = 0, \quad l^{(m-1)}(x_0) = 0.$$

Deducem deci următoarea teoremă:

Teorema 1. Gradul de exactitate al formulei (E) este totdeauna $\geq p + r$.

Dacă $m > p$ acest grad de exactitate este egal cu $m + r - 1$.

Dacă $m \leq p$, gradul de exactitate este egal cu $p + r$ dacă $l^{(m)}(x_0) \neq 0$ și este egal cu $p + r + 1$ dacă $l^{(m)}(x_0) = 0$.

Mai rezultă de aici că (E) se reduce la formula trivială dacă și numai dacă $m > p$.

7. Fie (1) o formulă din $\mathfrak{N}$, cu gradul de exactitate $\geq p + r$. Vom arăta că această formulă se reduce la formula (E). Pentru aceasta, să presupunem contrariul. Atunci, cel puțin unul din coeficienții $a_j = a_{0,j}$, $a_{i,j}$ este diferit de coeficientul $c_j = c_{0,j}$, $c_{i,j}$ respectiv. Pentru moment, să notăm cu $R[f]$ restul formulei (1) și cu $R_1[f]$ restul formulei (E).

Pentru fixarea ideilor să presupunem că

$$a_{\beta,j} - c_{\beta,j} \begin{cases} \neq 0, & j = \alpha \\ = 0, & j = \alpha + 1, \alpha + 2, \dots, r_i - 1. \end{cases} \quad (r_0 = r) \quad (13)$$

Scăzând membru cu membru formula (E) din formula (1) și rezolvând în raport cu $f^{(\alpha)}(x_\beta)$, găsim o formulă de forma

$$f^{(\alpha)}(x_\beta) = \sum_{j=0}^{\alpha-1} a'_j f^{(j)}(x_\beta) + \sum_{i=1}^s \sum_{j=0}^{r_i-1} a'_{i,j} f^{(j)}(x_i) + R_2[f] \quad (14)$$

unde, dacă $\beta \neq 0$ în a doua sumă din membrul al doilea în loc de x_β , r_β se înțelege x_0 , r respectiv. Restul $R_2[f]$ al formulei (14) este

$$R_2[f] = \frac{R_1[f] - R[f]}{a_{\beta,\alpha} - c_{\beta,\alpha}} \quad (15)$$

Avem, bineînțeles, $\alpha \leq r_\beta - 1$ ($r_0 = r$).

Pentru formula (14), numerele p, r, m devin $p + r - r_\beta$, $\max\{\alpha - 1, 0\}$, 0 respectiv, deci, pe baza unei observații dela punctul 4, gradul de exactitate

al acestei formule este $\leq p + r - r_\beta + \max\{\alpha - 1, 0\} \leq p + r - r_\beta + \alpha \leq \leq p + r - 1$. Însă din (15) se vede că gradul de exactitate este $\geq p + r$. Această contradicție ne arată că ipoteza (13) este inadmisibilă.

Putem dar enunța teorema următoare:

Teorema 2. În mulțimea $\mathfrak{N}$ a formulelor de derivare numerică (1) există o formulă, și numai una singură, de grad de exactitate maxim și această formulă este formula (E).

Pentru acest motiv, formula (E) se va numi o formulă de derivare numerică de exactitate maximă.

8. Putem acum preciza ordinul formulei (E). Acest ordin este $\leq p + r + 1$. Ordinul formulei poate să fie însă și mai mic decât $p + r + 1$, pentru că anumiți coeficienți c_j , $c_{i,j}$ pot fi nuli.

Dacă $m > p$, ordinul este 0.

Dacă $m \leq p$, ordinul este un număr pozitiv. Să presupunem că acest ordin ar fi $p + r + 1 - \alpha$, unde $\alpha \geq 0$. În acest caz, formula (E) este în același timp o formulă de derivare numerică dintr-o mulțime $\mathfrak{N}_1$, care se deduce din $\mathfrak{N}$, modificând caracteristicile prin reducerea unui număr α de noduri (6) sau și punctul x_0 de un anumit număr de ori, menținând însă suma $m + r$. Numărul $p + r$, prin trecerea în $\mathfrak{N}_1$ devine $p + r - \alpha$. Dar formula având gradul de exactitate $\geq p + r \geq p + r - \alpha$ este o formulă de exactitate maximă în $\mathfrak{N}_1$. În consecință, sau formula se reduce la formula trivială din $\mathfrak{N}_1$, sau are gradul de exactitate cel mult egal cu $p + r + 1 - \alpha$. Prima ipoteză este inadmisibilă pentru că ar rezulta ca formula să se reducă la formula trivială din $\mathfrak{N}$, ceea ce este în contradicție cu ipoteza $m \leq p$. Din a doua ipoteză rezultă că $\alpha \leq 1$, deci $\alpha = 0$, sau $\alpha = 1$.

Cazul $\alpha = 1$ are loc dacă unul dintre coeficienții c_{r-1} , $c_{i,r-1}$, $i = 1, 2, \dots, s$ este nul. De altfel, dacă unul dintre acești coeficienți este nul, ceilalți sunt în mod necesar diferiți de zero. În cazul acesta, formula trece din mulțimea $\mathfrak{N}$ în mulțimea $\mathfrak{N}_1$, prin suprimarea odată a punctului de derivare sau odată a unui nod x_i . Prin această trecere, numerele m, r devin $m + 1, r - 1$ respectiv, sau rămân neschimbate. Primul caz nu poate avea loc decât dacă $m < p$, pentru că altfel am ajunge în contradicție cu faptul că formula în $\mathfrak{N}_1$ nu se reduce la formula trivială.

De asemenea, prin trecerea în $\mathfrak{N}_1$, polinomul $l(x)$ rămâne neschimbat sau devine $\frac{l(x)}{x - x_i}$.

Formula considerată are în $\mathfrak{N}_1$ gradul de exactitate $\leq p + r$ și rezultă că acest grad de exactitate este chiar $p + r$, adică în $\mathfrak{N}_1$ formula se găsește în cazul când gradul său de exactitate se mărește cu o unitate.

Din cele ce preced rezultă că vom avea $c_{r-1} = 0$, dacă și numai dacă $l^{(m+1)}(x_0) = 0$. Acest caz nu este posibil decât dacă $r > 0$ și atunci toți coeficienții $c_{i,r-1}$, $i = 1, 2, \dots, s$ sunt diferiți de zero, iar dacă $r > 1$ avem și

$c_{r-2} \neq 0$. De asemenea, avem $c_{i,r-1} = 0$, dacă și numai dacă $\left[\frac{l(x)}{x - x_i} \right]_{x=x_0}^{(m)} = 0$

și atunci toți coeficienții $c_{\alpha,r-1} \neq 0$, $\alpha = 1, 2, \dots, i - 1, i + 1, \dots, s$. Avem de asemenea $c_{r-1} \neq 0$ dacă $r > 0$ și $c_{i,r-2} \neq 0$ dacă $r_i > 1$.

Din discuția de mai sus rezultă următoarea teoremă:

Teorema 3. Dacă $m \leq p$, gradul de exactitate al formulei (E) este cel mult egal cu ordinul său. Gradul de exactitate și ordinul, sunt egale dacă și numai dacă x_0 este o rădăcină, diferită de noduri, a unuia din polinoamele

$$l^{(m)}(x), l^{(m+1)}(x), \left[\frac{l(x)}{x-x_i} \right]^{(m)}, \quad i = 1, 2, \dots, s \quad (16)$$

În general, gradul de exactitate este $p+r$ și ordinul este $p+r+1$. Gradul de exactitate și ordinul sunt ambii egali cu $p+r+1$, dacă x_0 este o rădăcină a primului polinom (16). Gradul de exactitate și ordinul sunt ambii egali cu $p+r$, dacă x_0 este o rădăcină a unuia din ultimele $s+1$ polinoame (16).

9. Din analiza precedentă rezultă că două oarecare dintre polinoamele (16) nu pot avea o rădăcină comună diferită de un nod. Acest lucru se poate demonstra și direct. Dacă $m=0$, polinoamele, afară eventual de al doilea, nu au rădăcini diferite de noduri. De asemenea, proprietatea este imediată dacă $m=p$, pentru că atunci

$$l^{(p+1)}(x_0) = (p+1)! \neq 0, \left[\frac{l(x)}{x-x_i} \right]^{(p)} = p! \neq 0, \quad i = 1, 2, \dots, s$$

Să examinăm cazul general.

Din lema 1 rezultă că orice rădăcină comună a primelor două polinoame (16) este un nod de ordin de multiplicitate cel puțin egal cu $m+2$.

Punând în evidență unul din ultimele s polinoame (16), putem scrie

$$l^{(m)}(x) = \left[\frac{l(x)}{x-x_i} \right]^{(m)} (x-x_i) + m \left[\frac{l(x)}{x-x_i} \right]^{(m-1)}$$

Se vede de aici că orice rădăcină comună a polinoamelor $l^{(m)}(x)$, $\left[\frac{l(x)}{x-x_i} \right]^{(m)}$

este o rădăcină comună a polinoamelor $\left[\frac{l(x)}{x-x_i} \right]^{(m)}$, $\left[\frac{l(x)}{x-x_i} \right]^{(m-1)}$ și, pe baza

lemei 1, aceasta nu poate să fie decât un nod de ordin de multiplicitate cel puțin egal cu $m+1$.

Avem de asemenea

$$\left[\frac{l(x)}{x-x_\alpha} \right]^{(m)} = \left[\frac{l(x)}{(x-x_\alpha)(x-x_\beta)} \right]^{(m)} (x-x_\beta) + m \left[\frac{l(x)}{(x-x_\alpha)(x-x_\beta)} \right]^{(m-1)}$$

$$\left[\frac{l(x)}{x-x_\beta} \right]^{(m)} = \left[\frac{l(x)}{(x-x_\alpha)(x-x_\beta)} \right]^{(m)} (x-x_\alpha) + m \left[\frac{l(x)}{(x-x_\alpha)(x-x_\beta)} \right]^{(m-1)}$$

de unde se vede că, dacă $\alpha \neq \beta$, orice rădăcină comună a acestor polinoame este o rădăcină comună a polinoamelor

$$\left[\frac{l(x)}{(x-x_\alpha)(x-x_\beta)} \right]^{(m)}, \left[\frac{l(x)}{(x-x_\alpha)(x-x_\beta)} \right]^{(m-1)}$$

și deci, pe baza lemei 1, este un nod de ordin de multiplicitate cel puțin egal cu $m+1$.

În fine avem și

$$l^{(m+1)}(x) = \left[\frac{l(x)}{x-x_i} \right]^{(m+1)} (x-x_i) + (m+1) \left[\frac{l(x)}{x-x_i} \right]^{(m)} \quad (17)$$

care ne arată că orice rădăcină comună a polinoamelor

$$l^{(m+1)}(x), \left[\frac{l(x)}{x-x_i} \right]^{(m)} \quad (18)$$

este o rădăcină comună a polinoamelor

$$\left[\frac{l(x)}{x-x_i} \right]^{(m+1)} (x-x_i), \left[\frac{l(x)}{x-x_i} \right]^{(m)}.$$

Rezultă că orice rădăcină a polinoamelor (18) este sau nodul x_i , sau, pe baza lemei 1, un nod de ordin de multiplicitate cel puțin egal cu $m+2$.

Din analiza precedentă mai rezultă că proprietatea coeficienților c_{r-1} , c_{r-2} (dacă $r > 1$) de a nu putea fi ambii nuli este o consecință a faptului că polinoamele $l^{(m+1)}(x)$, $l^{(m+2)}(x)$ nu pot avea o rădăcină comună diferită de un nod. Acest din urmă fapt rezultă din lema 1, pe baza căreia orice rădăcină comună a acestor polinoame este un nod de ordin de multiplicitate cel puțin egal cu $m+3$.

De asemenea, faptul că c_{i,r_i-1} , c_{i,r_i-2} (dacă $r_i > 1$) nu pot fi ambii nuli rezultă din faptul că polinoamele

$$\left[\frac{l(x)}{x-x_i} \right]^{(m)}, \left[\frac{l(x)}{(x-x_i)^2} \right]^{(m)} \quad (19)$$

nu pot avea o rădăcină comună diferită de un nod. Avem însă

$$\left[\frac{l(x)}{x-x_i} \right]^{(m)} = \left[\frac{l(x)}{(x-x_i)^2} \right]^{(m)} (x-x_i) + m \left[\frac{l(x)}{(x-x_i)^2} \right]^{(m-1)}$$

de unde se vede că orice rădăcină comună a polinoamelor (19) este o rădăcină comună a polinoamelor

$$\left[\frac{l(x)}{(x-x_i)^2} \right]^{(m)}, \left[\frac{l(x)}{(x-x_i)^2} \right]^{(m-1)}$$

deci, pe baza lemei 1, un nod de ordin de multiplicitate egal cel puțin cu $m+1$.

Teorema 3 și rezultatele precedente se pot stabili și direct, calculând coeficienții c_{r-1} , c_{r-2} , c_{i,r_i-1} , c_{i,r_i-2} $i = 1, 2, \dots, s$ ai polinomului (10).

10. Să revenim la formula (E). Vom spune că această formulă este *excepțională*, dacă ordinul său este egal cu gradul său de exactitate.

Formula (E) devine excepțională sub trei aspecte diferite: 1°. Gradul de exactitate se mărește cu o unitate, 2°. Numărul r' , atașat punctului de derivare, scade cu o unitate dela r ($r' = r - 1$), 3°. Numărul r'_i , atașat unui nod x_i , scade cu o unitate dela r'_i ($r'_i = r_i - 1$).

Din rezultatele dela punctul 8 rezultă însă că cele trei aspecte revin unul la altul prin trecerea formulei din mulțimea $\mathfrak{N}$ într-o mulțime analoagă $\mathfrak{N}_1$, prin următoarele modificări ale caracteristicilor lui $\mathfrak{N}$.

Dacă formula (E) prezintă aspectul 1° în $\mathfrak{N}$, atunci ea prezintă:

Aspectul 2° în mulțimea $\mathfrak{N}_1$, obținută prin mărirea cu o unitate a ordinului de multiplicitate a punctului de derivare și micșorarea cu o unitate a indicelui de derivare.

Aspectul 3° în mulțimea $\mathfrak{N}_1$, obținută prin mărirea cu o unitate a ordinului de multiplicitate a nodului respectiv.

Dacă formula prezintă aspectul 2° în $\mathfrak{N}$, ea prezintă:

Aspectul 1° în mulțimea $\mathfrak{N}_1$, obținută prin micșorarea cu o unitate a ordinului de multiplicitate a punctului de derivare și mărirea cu o unitate a indicelui de derivare.

Aspectul 3° în mulțimea $\mathfrak{N}_1$, obținută prin micșorarea cu o unitate a ordinului de multiplicitate a punctului de derivare, mărirea cu o unitate a indicelui de derivare și mărirea cu o unitate a ordinului de multiplicitate a nodului respectiv.

Dacă formula prezintă aspectul 3° în $\mathfrak{N}$, ea prezintă:

Aspectul 1° în mulțimea $\mathfrak{N}_1$, obținută prin micșorarea cu o unitate a ordinului de multiplicitate a nodului respectiv.

Aspectul 2° în mulțimea $\mathfrak{N}_1$, obținută prin mărirea cu o unitate a ordinului de multiplicitate a punctului de derivare, micșorarea cu o unitate a indicelui de derivare și micșorarea cu o unitate a ordinului de multiplicitate a nodului respectiv.

11. Echivalența celor trei aspecte ale excepționalității se poate exprima prin formule. Pentru a stabili aceste formule să considerăm formulele generale:

$$L(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{k+1}; f|x) = L(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k; f|x) + \prod_{i=1}^k (x - x_i) \cdot [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{k+1}; f], \quad (20)$$

$$L(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{k+1}; f|x) = L(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k, \beta; f|x) + (\alpha_{k+1} - \beta) \prod_{i=1}^k (x - x_i) \cdot [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{k+1}, \beta; f] \quad (21)$$

În aceste formule, $[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{k+1}; f]$ este *diferența divizată* de ordinul k a funcției $f(x)$ pe cele $k + 1$ noduri $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{k+1}$, distincte sau nu. Presupunem că se cunoște definitia și principalele proprietăți ale diferențelor divizate, precum și de altfel ale polinoamelor de interpolare pe noduri distincte sau nu [6].

Formula (20) ne dă, în particular

$$\begin{aligned} L(\underbrace{x_0, x_0, \dots, x_0}_r, x'_1, x'_2, \dots, x'_{p+1}; f|x) &= \\ &= L(\underbrace{x_0, x_0, \dots, x_0}_{r+1}, x'_1, x'_2, \dots, x'_{p+1}; f|x) - \\ &\quad - (x - x_0)^r l(x) [\underbrace{x_0, x_0, \dots, x_0}_{r+1}, x'_1, x'_2, \dots, x'_{p+1}; f] = \\ &= L(\underbrace{x_0, x_0, \dots, x_0}_r, x'_1, x'_2, \dots, x'_{p+1}, x_i; f|x) - \\ &\quad - (x - x_0)^r l(x) [\underbrace{x_0, x_0, \dots, x_0}_r, x'_1, x'_2, \dots, x'_{p+1}, x_i; f]. \end{aligned}$$

Derivând de $m + r$ ori și ținând seamă de $l^{(m)}(x_0) = 0$, deducem

$$\begin{aligned} L^{(m+r)}(\underbrace{x_0, x_0, \dots, x_0}_r, x'_1, x'_2, \dots, x'_{p+1}; f|x_0) &= \\ &= L^{(m+r)}(\underbrace{x_0, x_0, \dots, x_0}_{r+1}, x'_1, x'_2, \dots, x'_{p+1}; f|x_0) = \\ &= L^{(m+r)}(\underbrace{x_0, x_0, \dots, x_0}_r, x'_1, x'_2, \dots, x'_{p+1}, x_i; f|x_0), [l^{(m)}(x_0) = 0] \end{aligned}$$

care indică trecerea formulei dela aspectul 1° la aspectele 2° și 3° respectiv.

De asemenea, formulele (20), (21) ne dau

$$\begin{aligned} L(\underbrace{x_0, x_0, \dots, x_0}_r, x'_1, x'_2, \dots, x'_{p+1}; f|x) &= \\ &= L(\underbrace{x_0, x_0, \dots, x_0}_{r-1}, x'_1, x'_2, \dots, x'_{p+1}; f|x) + \\ &\quad + (x - x_0)^{r-1} l(x) [\underbrace{x_0, x_0, \dots, x_0}_r, x'_1, x'_2, \dots, x'_{p+1}; f] = \\ &= L(\underbrace{x_0, x_0, \dots, x_0}_{r-1}, x'_1, x'_2, \dots, x'_{p+1}, x_i; f|x) + \\ &\quad + (x_0 - x_i) (x - x_0)^{r-1} l(x) [\underbrace{x_0, x_0, \dots, x_0}_r, x'_1, x'_2, \dots, x'_{p+1}, x_i; f] \end{aligned}$$

Derivând de $m + r$ ori și ținând seamă de $l^{(m+1)}(x_0) = 0$, deducem

$$\begin{aligned} L^{(m+r)}(\underbrace{x_0, x_0, \dots, x_0}_r, x'_1, x'_2, \dots, x'_{p+1}; f| x_0) &= \\ &= L^{(m+r)}(\underbrace{x_0, x_0, \dots, x_0}_{r-1}, x'_1, x'_2, \dots, x'_{p+1}; f| x_0) = \\ &= L^{(m+r)}(\underbrace{x_0, x_0, \dots, x_0}_{r-1}, x'_1, x'_2, \dots, x'_{p+1}, x_i; f| x_0), [l^{(m+1)}(x_0) = 0] \end{aligned}$$

care indică trecerea formulei dela aspectul 2° la aspectele 1° și 3° respectiv. Tot formulele (20), (21) ne dau

$$\begin{aligned} L(\underbrace{x_0, x_0, \dots, x_0}_r, x'_1, x'_2, \dots, x'_{p+1}; f| x) &= \\ &= L(\underbrace{x_0, x_0, \dots, x_0}_r, x'_1, x'_2, \dots, x'_p; f| x) + \\ &\quad + (x - x_0)^r \frac{l(x)}{x - x_i} \underbrace{[x_0, x_0, \dots, x_0, x'_1, x'_2, \dots, x'_{p+1}; f| x]}_r = \\ &= L(\underbrace{x_0, x_0, \dots, x_0}_{r+1}, x'_1, x'_2, \dots, x'_p; f| x) + \\ &\quad + (x_i - x_0)(x - x_0)^r \frac{l(x)}{x - x_i} \underbrace{[x_0, x_0, \dots, x_0, x'_1, x'_2, \dots, x'_{p+1}; f]}_{r+1} \end{aligned}$$

unde $x'_1, x'_2, \dots, x'_p$ sunt nodurile (6), dintre care s'a suprimat odată nodul x_i . Derivând de $m + r$ ori și ținând seamă de $\left[\frac{l(x)}{x - x_i} \right]_{x=x_0}^{(m)} = 0$, se deduce

$$\begin{aligned} L^{(m+r)}(\underbrace{x_0, x_0, \dots, x_0}_r, x'_1, x'_2, \dots, x'_{p+1}; f| x_0) &= \\ &= L^{(m+r)}(\underbrace{x_0, x_0, \dots, x_0}_r, x'_1, x'_2, \dots, x'_p; f| x_0) = \\ &= L^{(m+r)}(\underbrace{x_0, x_0, \dots, x_0}_{r+1}, x'_1, x'_2, \dots, x'_p; f| x_0), \left[\left(\frac{l(x)}{x - x_i} \right)_{x=x_0}^{(m)} = 0 \right] \end{aligned}$$

care indică trecerea dela aspectul 3° la aspectele 1° și 2° respectiv.

Noțiunea de formulă de exactitate maximă excepțională este astfel complet clarificată.

12. Fie $\mathfrak{N}^0$ reunirea mulțimilor $\mathfrak{N}$, obținute variind punctul de derivare x_0 și lăsând neschimbate celelalte caracteristici ale lui $\mathfrak{N}$. Există atunci un număr finit de formule excepționale în $\mathfrak{N}^0$. Acest număr este egal cu numărul total al rădăcinilor distincte de noduri ale polinoamelor (16) dacă $r > 0$ și este egal cu numărul total al rădăcinilor distincte de noduri ale primului și ultimelor s polinoame (16) dacă $r = 0$.

Rădăcinile polinomului $l^{(m)}(x)$ sunt de două feluri. Unele, să le zicem *improprii*, provin din multiplicitatea nodurilor. Acestea sunt toate nodurile, dacă $m = 0$, și sunt acele noduri care sunt și rădăcini ale polinomului $l^{(m-1)}(x)$, dacă $m > 0$. Orice rădăcină improprie este socotită cu ordinul său de multiplicitate și coincide, pe baza lemei 1, cu un nod de ordin de multiplicitate egal cu $m + 1$, cel puțin. Mai precis, numărul rădăcinilor improprii care coincid cu nodul x_i este egal cu $\max \{0, r_i - m\}$. Astfel, numărul total al rădăcinilor improprii ale polinomului $l^{(m)}(x)$ este egal cu

$$\sum_{i=1}^s \max \{0, r_i - m\}. \quad (22)$$

Celelalte rădăcini ale lui $l^{(m)}(x)$, să le zicem *proprii*, sunt rădăcini simple. Astfel de rădăcini pot exista numai dacă $m > 0$. O rădăcină proprie poate coincide cu un nod, însă în orice caz nu cu cel mai mic sau cu cel mai mare dintre aceste noduri. Această din urmă proprietate rezultă din faptul că, rădăcinile derivatei unui polinom cu toate rădăcinile reale aparțin totdeauna celui mai mic interval închis care conține toate rădăcinile polinomului. Pe baza acestei proprietăți, dacă $l^{(m)}(x)$ se anulează într'un nod extrem, $l^{(m-1)}(x)$ se anulează de asemenea în acest nod. Acest nod are deci ordinul de multiplicitate cel puțin egal cu $m + 1$ și deci este o rădăcină improprie. Dacă x_i este rădăcină proprie, trebuie să avem $r_i \leq m - 1$. Pentru $r_i = m$ avem $l^{(m)}(x_i) \neq 0$.

Numărul rădăcinilor proprii ale lui $l^{(m)}(x)$ este egal cu

$$N_m = p + 1 - m - \sum_{i=1}^s \max \{0, r_i - m\}.$$

Dacă $m = 0$, avem $N_m = 0$. Dacă $m = 1$, avem $N_m = s - 1$ și toate rădăcinile proprii sunt distincte de noduri. Dacă $m > 1$, cel mult $\max \{0, s - 2\}$ și bineînțeles cel mult $p + 1 - m$, rădăcini proprii coincid cu un nod.

Numărul rădăcinilor improprii ale polinomului $\left[\frac{l(x)}{x - x_i} \right]^{(m)}$ va fi egal cu

$$\sum_{i=1}^s \max \{0, r_i - m\} - \max \{0, r_i - m\} + \max \{0, r_i - m - 1\}.$$

Rădăcinile proprii ale acestui polinom sunt simple și, pentru același motiv ca mai sus, diferite de cel mai mic și de cel mai mare nod. Rezultă că numărul total al rădăcinilor proprii ale ultimelor s polinoame (16) este egal cu $(s - 1)(N_m - 1) + N_{m+1}$. Rezultatele dela punctul 9 ne arată că două oarecare din polinoamele (16) nu pot avea o rădăcină comună diferită de un nod. De asemenea, formula (17) ne arată că, dacă x_i este o rădăcină proprie a unuia din polinoamele (18), atunci este rădăcină proprie a ambelor polinoame (18), dar nu este rădăcină proprie a niciunui alt polinom (16). Dacă

un nod este o rădăcină proprie a polinomului $l^{(m)}(x)$, atunci acest nod nu este rădăcină a niciunui alt polinom (16). Observăm, în fine, că cel mult $\max \{0, s-2\}$ noduri pot fi rădăcini proprii ale polinoamelor (16).

Din cele ce preced rezultă că putem enunța teorema următoare:

Teorema 4. Numărul N' al formulelor (E) din $\mathfrak{N}^0$, al căror grad de exactitate este egal cu $p+r+1$, este egal cu 0 pentru $m=0$, egal cu $s-1$ pentru $m=1$ și verifică inegalitățile

$$N_m - \max \{0, s-2\} \leq N' \leq N_m$$

pentru $m > 1$.

Numărul N'' al formulelor (E) din $\mathfrak{N}^0$, al căror ordin este egal cu $p+r$, este egal cu 0 dacă $m=0$, $r=0$, egal cu $s-1$ dacă $m=0$, $r > 0$ și verifică inegalitățile.

$$\begin{aligned} (s-1)(N_m-1) + N_{m+1} - \max \{0, s-2\} &\leq \\ &\leq N'' \leq \begin{cases} (s-1)(N_m-1) + N_{m+1}, & \text{dacă } r=0 \\ (s-1)(N_m-1) + 2N_{m+1}, & \text{dacă } r>0 \end{cases} \end{aligned}$$

pentru $m > 0$.

Numărul N al formulelor (E) excepționale din $\mathfrak{N}^0$ este egal cu 0 dacă $m=r=0$, egal cu $s-1$ dacă $m=0$, $r > 0$ și verifică inegalitățile

$$\begin{aligned} (s-1)(N_m-1) + N_m + N_{m+1} - \max \{0, s-2\} &\leq \\ &\leq N \leq \begin{cases} (s-1)(N_m-1) + N_m + N_{m+1}, & \text{dacă } r=0 \\ (s-1)(N_m-1) + N_m + 2N_{m+1}, & \text{dacă } r>0 \end{cases} \end{aligned}$$

pentru $m > 0$.

Numărul $\max \{0, s-2\}$ din delimitările inferioare se poate ameliora în funcție de p, m, s , dar nu ne ocupăm de această chestiune.

13. Putem delimita în mod destul de convenabil numărul (22) în funcție numai de p, m, s . Pentru aceasta ne vom folosi de următoarea leamă:

Lema 2. Dacă numerele $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k, \beta$ sunt nenegative avem inegalitățile.

$$\max \left\{ 0, \sum_{i=1}^k \alpha_i - k\beta \right\} \leq \sum_{i=1}^k \max \{0, \alpha_i - \beta\} \leq \max \left\{ 0, \sum_{i=1}^k \alpha_i - \beta \right\}. \quad (23)$$

Este destul să demonstrăm proprietatea pentru $k=2$, căci pentru k oarecare va rezulta prin inducție completă.

Pentru $k=2$, inegalitățile revin la ¹⁾

$$|\alpha_1 + \alpha_2 - 2\beta| \leq |\alpha_1 - \beta| + |\alpha_2 - \beta| \leq |\alpha_1 + \alpha_2 - \beta| + \beta$$

care se verifică imediat ²⁾.

¹⁾ Avem $\max \{0, \alpha\} = \frac{1}{2}(\alpha + |\alpha|)$.

²⁾ Fiecare membru este linear în β , în intervalele determinate de punctele $0, \alpha_1, \alpha_2, \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}, \alpha_1 + \alpha_2, +\infty$. Este deci destul să se verifice inegalitățile pentru extremitățile finite ale acestor intervale și pentru $\beta > \alpha_1 + \alpha_2$.

Prima inegalitate (23) revine la o inegalitate clasică și este adevărată oricare ar fi numerele $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k, \beta$.

Revenind la delimitarea sumei (22), care pentru $m=0$ este egală cu $p+1$, avem, pe baza lemei 2,

$$\max \{0, p+1-sm\} \leq \sum_{i=1}^s \max \{0, r_i - m\} \leq \max \{0, p+2-s-m\} \quad (m > 0),$$

deoarece $r_i - 1 \geq 0, m - 1 \geq 0$.

Observăm acum că ¹⁾ $\alpha - \max \{\beta, \gamma\} = \min \{\alpha - \beta, \alpha - \gamma\}$ și deducem

$$\min \{p+1-m, s-1\} \leq N_m \leq \min \{p+1-m, (s-1)m\}, \quad (24)$$

$$m > 0 \quad (N_0 = 0).$$

Numerele $(s-1)(N_m-1), N_m, N_{m+1}$ sunt nule pentru $s=1$.

Dacă $m=p$, singurul punct x_0 pentru care formula poate să fie excepțională este

$$\frac{1}{p+1} \sum_{i=1}^s r_i x_i \quad (25)$$

pentru că aceasta este rădăcina lui $l^{(p)}(x)$.

Dacă $s > 1, 0 < m < p$, avem

$$(s-1) [\min \{p+1-m, s-1\} - 1] - \max \{0, s-2\} \geq 0, \min \{p-m, s-1\} \geq 1$$

care ne arată, ținând seamă de (24), că avem

$$(s-1)(N_m-1) + N_{m+1} - \max \{0, s-2\} \geq 1.$$

Ținând deci seama de teorema 4, deducem teorema următoare:

Teorema 5. În mulțimea $\mathfrak{N}^0$ există totdeauna formule (E) excepționale, afară de următoarele trei cazuri:

1° $s=1$. 2° $m=p$ și punctul (25) coincide cu un nod. 3° $m=0$ și $r=0$.

14. Dacă în formula (1) avem $m+r > 0$ și dacă coeficienții a_0 (dacă $r > 0$) $a_{i,0}, i=1, 2, \dots, s$ sunt toți nuli, formula este în același timp o formulă de derivare numerică pentru derivata $f'(x)$ a funcției $f(x)$. În acest caz, vom spune că formula (1) este *reductibilă*. În cazul contrar, vom spune că formula este *irreductibilă*. Formula (1) este deci reductibilă, respectiv irreductibilă, după cum în această formulă nu figurează niciuna, respectiv figurează efectiv cel puțin una, din valorile funcției în noduri și în punctul de derivare.

Este interesant să examinăm care sunt formulele de exactitate maximă reductibile. Pentru aceasta, să examinăm reductibilitatea formulei (E). Să presupunem că formula (E) nu este trivială și este reductibilă. Trebuie atunci să avem $r=0$, sau $r > 1$ și $m+r > 0$. Să notăm cu (E^*) această for-

¹⁾ Avem

$$\max \{\alpha, \beta\} = \frac{\alpha + \beta + |\alpha - \beta|}{2}, \min \{\alpha, \beta\} = \frac{\alpha + \beta - |\alpha - \beta|}{2}.$$

mulă, privită ca o formulă de derivare numerică pentru funcția $f'(x) = g(x)$. Folosind deci notațiile (10), avem

$$g^{(m+r-1)}(x_0) = \sum_{i=1}^{r-1} c_i g^{(i-1)}(x_0) + \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^{r_i-1} c_{i,j} g^{(j-1)}(x_0) + R \quad (E^*)$$

Pe baza celor stabilite mai sus, putem presupune că ordinul formulei (E) este $p+r+1$. Să notăm cu p^*, r^*, s^* numerele p, r, s , corespunzătoare formulei (E*). Toate aceste fapte implică $r_i > 1, i = 1, 2, \dots, s$ și avem atunci $p^* = p - s, s^* = s, r^* = 0$ sau $r^* = r - 1$ după cum $r = 0$ sau $r > 1$.

Gradul de exactitate al formulei (E*) este $p+r-1$ sau $p+r$, după cum formula (E) nu este sau este excepțională, deoarece punând $g(x) = f'(x)$ în (E*) regăsim formula (E), iar $(x^i)' = ix^{i-1}$.

Se verifică acum imediat că $p+r-1 \geq p^*+r^*$, ceea ce ne arată că (E*) este o formulă de exactitate maximă. Deoarece această formulă nu se reduce la formula trivială, gradul său de exactitate este p^*+r^* sau p^*+r^*+1 , după cum ea nu este sau este excepțională. Am evaluat gradul de exactitate în două feluri diferite și rezultatele obținute trebuie să coincidă. Dacă $s = 1$, formulele (E), (E*) nu pot fi excepționale și atunci trebuie să avem $p+r-1 = p^*+r^*$ și se verifică imediat că această egalitate are loc dacă și numai dacă $r = 0$. Dacă $s > 1$, avem $p+r-1 > p^*+r^*$ și egalitate între gradele de exactitate nu poate avea loc decât dacă $p+r-1 = p^*+r^*+1$. Această egalitate are loc numai dacă $r = 0$ și $s = 2$.

În definitiv, formula (E) nu poate fi reductibilă decât în următoarele două cazuri:

1°. $r = 0, s = 1$. În acest caz, niciuna din formulele (E), (E*) nu este excepțională.

2°. $r = 0, s = 2$. În acest caz formula (E*) este excepțională, dar (E) nu este excepțională.

Să se observe că o formulă (E) excepțională este totdeauna ireductibilă.

În cazul 2°, condițiile de excepționalitate se scriu

$$l^{(m)}(x_0) \neq 0, \quad \left[\frac{l(x)}{(x-x_1)(x-x_2)} \right]_{x=x_2}^{(m-2)} = 0. \quad (26)$$

15. Rămâne să mai demonstrăm că în cele două cazuri de mai sus formula (E) este efectiv reductibilă.

În cazul 1° avem

$$L(\underbrace{x_1, x_1, \dots, x_1}_{r_1}; f|x) = \sum_{j=0}^{r_1-1} \frac{(x-x_1)^j}{j!} f^{(j)}(x_1)$$

deci $C_{1,0}(x) = 1$, de unde $C_{1,0}^{(m)}(x_0) = c_{1,0} = 0$ ($m > 0$).

În cazul 2°, polinoamele $C_{1,0}(x), C_{2,0}(x)$, de gradul $p-1$, pe baza formulelor (8) se divid cu polinomul

$$\frac{l(x)}{(x-x_1)(x-x_2)} \quad (27)$$

deci ele diferă numai prin niște factori constanți de polinomul (27). Acești factori constanți sunt de altfel diferiți de zero, tot pe baza formulelor (8)¹⁾. Condițiile $c_{1,0} = c_{2,0} = 0$ sunt deci echivalente cu a doua relație (26). Prima relație (26) este o consecință a analizei precedente.

Simultaneitatea condițiilor (26) se poate demonstra și direct. Avem

$$l'(x) = [r_1(x-x_2) + r_2(x-x_1)] \frac{l(x)}{(x-x_1)(x-x_2)}$$

de unde deducem

$$l^{(m)}(x) = [r_1(x-x_2) + r_2(x-x_1)] \left[\frac{l(x)}{(x-x_1)(x-x_2)} \right]^{(m-1)} + (p+1)(m-1) \left[\frac{l(x)}{(x-x_1)(x-x_2)} \right]^{(m-2)}.$$

De aici se vede că orice rădăcină comună a polinoamelor $l^{(m)}(x)$,

$\left[\frac{l(x)}{(x-x_1)(x-x_2)} \right]^{(m-2)}$ este o rădăcină comună a polinoamelor

$$\left[\frac{l(x)}{(x-x_1)(x-x_2)} \right]^{(m-1)}, \quad \left[\frac{l(x)}{(x-x_1)(x-x_2)} \right]^{(m-2)}$$

și o astfel de rădăcină, pe baza lemei 1, coincide neapărat cu unul din nodurile x_1, x_2 .

În definitiv putem enunța teorema următoare:

Teorema 6. Dacă $m \leq p$, formula (E) este reductibilă dacă și numai dacă:

1°. $r = 0, s = 1$, sau

2°. $r = 0, s = 2$ și x_0 este o rădăcină, diferită de nodurile x_1, x_2 ale polinomului

$$\left[\frac{l(x)}{(x-x_1)(x-x_2)} \right]^{(m-1)}.$$

Proprietățile sunt exprimate prin formulele

$$L^{(m)}(\underbrace{x_1, x_1, \dots, x_1}_{r_1}; f|x) = L^{(m-1)}(\underbrace{x_1, x_1, \dots, x_1}_{r_1-1}; f'|x),$$

$$L^{(m)}(\underbrace{x_1, x_1, \dots, x_1}_{r_1}, \underbrace{x_2, x_2, \dots, x_2}_{r_2}; f|x_0) = L^{(m-1)}(\underbrace{x_1, x_1, \dots, x_1}_{r_1-1}, \underbrace{x_2, x_2, \dots, x_2}_{r_2-1}; f'|x_0)$$

unde x_0 verifică a doua condiție (26).

¹⁾ Din $C_{1,0}(x) + C_{2,0}(x) = 1$ rezultă că acești factori sunt de semne contrare și egali în valoare absolută.

§ 2. Câteva considerații asupra restului

16. În anumite cazuri particulare importante, restul R al formulei (1) se pune sub o formă simplă și comodă. În cazul formulei de interpolare a lui Lagrange-Hermite

$$f(x_0) = L(x'_1, x'_2, \dots, x'_{p+1}; f|_{x_0}) + R \quad (28)$$

avem

$$R = R[f] = l(x_0)[x_0, x'_1, x'_2, \dots, x'_{p+1}; f] \quad (29)$$

unde $l(x)$ este polinomul (3) deja definit și care pe baza notațiilor (7) se poate scrie și

$$l(x) = (x - x'_1)(x - x'_2) \dots (x - x'_{p+1}).$$

Restul formulei (28), sub forma (29), se exprimă ca un produs dintre un număr diferit de zero și independent de funcția $f(x)$ și o diferență divizată de ordinul $p + 1$ al funcției $f(x)$.

Pe baza formulelor

$$[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{k+1}; x^i] = \begin{cases} 0, & \text{pentru } i=0, 1, \dots, k-1 \\ 1, & \text{pentru } i=k \end{cases} \quad (30)$$

este vizibil că formula (28) are gradul de exactitate p . Punând $f(x) = l(x) = x^{p+1} + \dots$ în (28) și ținând seamă de formula (11), vedem că factorul diferenței divizate din (29) este egal cu

$$R[l] = R[x^{p+1}] = l(x_0).$$

17. Vom spune că restul formulei (1) sau că funcționala $R[f]$ este de formă simplă dacă avem

$$R[f] = M \cdot [\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+2}; f] \quad (31)$$

oricare ar fi funcția $f(x)$, unde n este gradul de exactitate al formulei, M o constantă diferită de zero și independentă de funcția $f(x)$, iar $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+2}$, $n + 2$ puncte distincte din intervalul deschis (a, b) .

În acest caz, pe baza formulelor (30), coeficientul M este dat de egalitatea $M = R[x^{n+1}] = R[P]$, unde $P(x)$ este un polinom oarecare de gradul $n + 1$, cu primul coeficient 1.

Punctele ξ_i depind în general de funcția $f(x)$, iar intervalul $[a, b]$ este cel precizat în § 1.

De exemplu, așa cum vom vedea mai jos, restul formulei (28) este de formă simplă.

Pentru simplificarea notațiilor, vom nota cu $D_k[f]$ o diferență divizată de ordinul k a funcției $f(x)$ pe $k + 1$ noduri distincte arbitrare din intervalul (a, b) . Dacă deci formula (1) are gradul de exactitate n și dacă restul este de formă simplă, avem $R[f] = R[x^{n+1}] \cdot D_{n+1}[f]$.

Definiția precedentă subsistă pentru $n \geq 0$. O vom menține și pentru $n = -1$, cu restricția că în acest caz, punctul ξ_1 poate coincide și cu una din

extremitățile intervalului $[a, b]$. Această convenție simplifică expunerea. De altfel, în cazul, aproape banal, când $n = -1$, este în general ușor să se recunoască dacă se poate alege sau nu punctul ξ_1 , în interiorul intervalului.

În cazul când restul este de formă simplă, formula (31) ne dă indicații suficiente asupra structurii acestui rest, pe baza proprietăților de medii ale diferențelor divizate, proprietăți pe care le expunem într-o altă lucrare. Aceste proprietăți permit să se exprime restul în mod analog, cu ajutorul diferențelor divizate ale derivatei de un anumit ordin dat a funcției $f(x)$, când această derivată există în intervalul (a, b) .

18. Pe baza unui rezultat anterior [9], pentru recunoașterea formei simple a restului putem aplica următorul criteriu:

C. Pentru ca funcționala $R[f]$ aditivă și omogenă, cu gradul de exactitate n , să fie de formă simplă este necesar și suficient ca $R[f]$ să fie diferit de zero pentru orice funcție $f(x)$ convexă de ordinul n în $[a, b]$ ¹⁾.

Definiția formei simple și criteriul C se aplică nu numai restului formulei (1) dar și unei funcționale aditive și omogene $R[f]$, definită într-un câmp vectorial F de funcții continue în intervalul $[a, b]$ și conținând toate polinoamele.

O funcție $f(x)$ se zice neconcavă de ordinul n în intervalul $[a, b]$, dacă toate diferențele sale divizate pe $n + 2$ puncte distincte din $[a, b]$ sunt nenegative. Funcția se zice, în particular, convexă de ordinul n în acest interval, dacă toate aceste diferențe divizate sunt pozitive. Vom semna la locul lor proprietățile utilizate aici ale funcțiilor neconcave și convexe.

O funcție neconcavă de ordinul $n \geq 1$, deci în particular o funcție convexă de ordinul $n \geq 1$, este continuă în intervalul deschis (a, b) . Dacă $n > 1$, ea admite derivate continue de ordinele $1, 2, \dots, n - 1$ în intervalul (a, b) . În general, o astfel de funcție nu are însă o derivată de ordinul n în toate punctele intervalului (a, b) .

În general, câmpul F al funcționalei $R[f]$ nu conține toate funcțiile convexe de ordinul n în (a, b) pentru că, pe de o parte, prin ipoteză câmpul F este format din funcții continue în $[a, b]$, pe de altă parte funcționala poate depinde de valori ale derivatelor de ordin $> n - 1$ ale funcției $f(x)$. Criteriul C este însă întotdeauna aplicabil deoarece din demonstrația acestui criteriu [7], rezultă că este suficient să considerăm numai funcțiile convexe de ordinul n care aparțin lui F .

19. În enunțul criteriului C condiția $R[f] \neq 0$ se poate înlocui cu condiția $R[f_1] R[f_2] > 0$ pentru două funcții oarecare $f_1(x)$ și $f_2(x) \in F$, convexe de ordinul n . Această proprietate rezultă din următoarea leamă, foarte utilă în aplicarea criteriului C.

Lemma 3. Dacă n este gradul de exactitate al funcționalei $R[f]$ aditivă și omogenă și dacă putem găsi două funcții $f_1(x)$, $f_2(x)$ neconcave de ordinul $n' \leq n$ în intervalul $[a, b]$ astfel ca

$$R[f_1] R[f_2] < 0 \quad (32)$$

atunci există o funcție $f(x)$, convexă de ordinul n' în $[a, b]$, astfel ca

$$R[f] = 0. \quad (33)$$

¹⁾ Criteriul sub această formă este suficient aici. În general, din faptul că $R[f] \neq 0$, pentru orice funcție convexă de ordinul n , rezultă că gradul de exactitate este n .

Se știe că o combinație lineară, cu coeficienți pozitivi, de mai multe (un număr finit) funcții neconcave de ordinul n' , dintre care cel puțin una este convexă de ordinul n' , este o funcție convexă de ordinul n' . Să observăm acum că funcția $(x-a)^{n+1}$ este convexă de ordinul n' în intervalul $[a, b]$ ¹⁾. Pe de altă parte, $R[(x-a)^{n+1}] \neq 0$, din cauza definiției gradului de exactitate. Rezultă că funcțiile

$$f_1^*(x) = f_1(x) + \frac{1}{2} \left| \frac{R[f_1]}{R[(x-a)^{n+1}]} \right| (x-a)^{n+1}$$

$$f_2^*(x) = f_2(x) + \frac{1}{2} \left| \frac{R[f_2]}{R[(x-a)^{n+1}]} \right| (x-a)^{n+1}$$

sunt convexe de ordinul n' .

Ținând seamă de (32), un calcul simplu ne arată că

$$R[f_1^*] R[f_2^*] = \frac{3}{4} R[f_1] R[f_2] < 0.$$

Rezultă că funcția

$$f(x) = f_1^*(x) - \frac{R[f_1^*]}{R[f_2^*]} f_2^*(x)$$

este convexă de ordinul n' și, se verifică imediat, satisface egalitatea (33).

Lema 3 este deci demonstrată.

Pentru $n' = n$, aplicând criteriul C, se deduce următoarea teoremă:

Teorema 7. Dacă n este gradul de exactitate al funcționalei $R[f]$, aditivă și omogenă și dacă putem găsi două funcții $f_1(x), f_2(x) \in F$, neconcave de ordinul n în $[a, b]$, astfel ca să avem (32), atunci funcționala nu este de formă simplă.

20. Restul R al formulei (1) se poate studia sub forma mai simetrică

$$R[f] = \sum_{i=0}^s \sum_{j=0}^s b_{i,j} f^{(j)}(x_i) \quad (34)$$

unde pentru moment putem presupune

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_s = b.$$

Bineînțeles, câmpul F al funcționalei (34) este format din funcțiile $f(x)$ continue în $[a, b]$ și admitând derivatele în punctele unde intervin efectiv în expresia lui $R[f]$.

Vom căuta să stabilim câteva proprietăți în legătură cu forma simplă a funcționalei (34).

Să presupunem că gradul de exactitate este n . Vom arăta că funcționala nu poate depinde efectiv de derivatele de ordin $> n+1$ în caz că forma ei este simplă. Pentru aceasta va fi destul, pe baza teoremei 7, ca în cazul contrar să construim două funcții $f_1(x), f_2(x) \in F$ neconcave de ordinul n , astfel ca să avem inegalitatea (32).

¹⁾ Se poate arăta, de exemplu, că derivata de ordinul $n'+1$ a funcției este pozitivă în intervalul $[a, b]$.

Să presupunem deci că $b_{i,k} \neq 0$, $b_{i,j} = 0$, $j = k+1, k+2, \dots$, unde $k \geq n+2$.

Fie ε un număr pozitiv destul de mic și care în cursul demonstrației va fi precizat și mai mult.

Să definim funcția continuă $\varphi_\varepsilon(x)$ în felul următor:

1°. $\varphi_\varepsilon(x_i) = 1$.

2°. $\varphi_\varepsilon(x) = 0$ pentru $x \in [a, x_i - \varepsilon] \cup [x_i + \varepsilon, b]$, $x \in [a + 2\varepsilon, b]$, respectiv $x \in [a, b - 2\varepsilon]$, după cum $0 < i < s$, $i = 0$, respectiv $i = s$.

3°. $\varphi_\varepsilon(x)$ este linear în fiecare din intervalele rămase din $[a, b]$ deci în $[x_i - \varepsilon, x_i]$ și $[x_i, x_i + \varepsilon]$, $[a, a + 2\varepsilon]$, respectiv $[b - 2\varepsilon, b]$, după cum $0 < i < s$, $i = 0$, respectiv $i = s$.

Avem atunci $\varphi_\varepsilon(x) \geq 0$ pentru $x \in [a, b]$.

Să considerăm acum funcția

$$f_\varepsilon(x) = \int_a^x \frac{(x-t)^{k-1}}{(k-1)!} \varphi_\varepsilon(t) dt.$$

Atunci, dacă $\varepsilon < \max \left\{ x_1 - x_0, x_s - x_{s-1}, \frac{x_s - x_0}{2} \right\}$ avem

$$f_\varepsilon^{(k)}(x) = \varphi_\varepsilon(x), \text{ pentru } x \in [a, b],$$

$$0 = f_\varepsilon^{(k-1)}(a) \leq f_\varepsilon^{(k-1)}(x) \leq f_\varepsilon^{(k-1)}(b) = \int_a^b \varphi_\varepsilon(t) dt = \varepsilon, \text{ pentru } x \in [a, b]$$

$$f_\varepsilon^{(j)}(x) = \int_a^x \frac{(x-t)^{k-2-j}}{(k-2-j)!} f_\varepsilon^{(k-1)}(t) dt, \text{ pentru } j = 0, 1, \dots, k-2.$$

Rezultă atunci imediat că

$$0 \leq f_\varepsilon^{(j)}(x) \leq \varepsilon \frac{(b-a)^{k-1-j}}{(k-1-j)!}, \text{ pentru } x \in [a, b] \text{ și } j = 0, 1, \dots, k-1. \quad (35)$$

Fie acum A o constantă oarecare diferită de zero și să considerăm funcția

$$f(x) = Af_\varepsilon(x) + |A| \frac{\varepsilon (b-a)^{k-n-2}}{(n+1)!(k-n-2)!} (x-a)^{n+1}. \quad (36)$$

Avem atunci

$$f^{(n+1)}(x) = Af_\varepsilon^{(n+1)}(x) + |A| \frac{\varepsilon (b-a)^{k-n-2}}{(k-n-2)!}$$

și deci, pe baza lui (35),

$$f^{(n+1)}(x) \geq 0, \text{ } x \in [a, b].$$

Această inegalitate ne arată că funcția $f(x)$ este neconcavă de ordinul n în $[a, b]$.

Ținând seama de (36), deducem

$$f^{(j)}(x) = \begin{cases} A f_e^{(j)}(x) + |A| \frac{\varepsilon (b-a)^{k-n-2}}{(n+1-j)! (k-n-2)!} (x-a)^{n+1-j}, & j=0, 1, \dots, n+1 \\ A f_e^{(j)}(x), & j=n+2, n+3, \dots, k-1 \end{cases}$$

pentru $x \in [a, b]$.

Ținând seama de (35), avem

$$|f^{(j)}(x)| \leq 2 |A| (b-a)^{k-1-j} \zeta, \quad j=0, 1, \dots, k-1, \quad x \in [a, b]. \quad (37)$$

Dacă acum presupunem că

$$\frac{1}{2} \min_{i=0, 1, \dots, s} \{x_{i+1} - x_i\}. \quad (38)$$

avem și

$$f^{(j)}(x_\alpha) = 0, \text{ pentru } j \geq k, \alpha = 0, 1, \dots, i-1, i+1, \dots, s. \quad (39)$$

Ținând seama de $f^{(k)}(x_i) = A$ și de (34), (37), (39), deducem

$$|R[f] - b_{i,k} A| < \left(\sum_{i=0}^s \sum_{j=1}^{k-1} |b_{i,j}| \right) 2 |A| \cdot \max \{1, (b-a)^{k-1}\} \cdot \varepsilon.$$

Alegând pe ε destul de mic și în orice caz astfel ca inegalitatea (38) să fie verificată, deducem

$$|R[f] - b_{i,k} A| < \frac{|b_{i,k} A|}{2}$$

care ne arată că atunci $R[f]$ are semnul lui $b_{i,k} A$. Dar A a fost ales oarecare. Luând $A = 1$ și notând cu $f_1(x)$ funcția (36) astfel obținută, și luând apoi $A = -1$ și notând cu $f_2(x)$ funcția (36) astfel obținută, inegalitatea (32) este verificată.

Putem dar enunța următoarea teoremă:

Teorema 8. Dacă gradul de exactitate al funcționalei (34) este n , această funcțională nu poate fi de formă simplă decât dacă nu conține efectiv derivate de ordin $> n+1$.

Cu alte cuvinte, funcționala nu poate fi de formă simplă decât dacă $b_{i,j} = 0$ pentru $j > n+1$, $i = 0, 1, \dots, s$.

Vom examina în particular funcționala (32) cu gradul de exactitate -1 , 0 sau 1.

21. Să presupunem că gradul de exactitate este -1 . Teorema 8, care se aplică și aici, ne arată că funcționala (32) este în mod necesar de forma

$$R[f] = \sum_{i=0}^s b_i f(x_i) \quad (40)$$

dacă ea este de formă simplă.

Pentru ca funcționala (40) să fie de formă simplă, este necesar ca coeficienții $b_0, b_1, \dots, b_s$ să fie de același semn ¹⁾. Într'adevăr, să presupunem contrariul, și fie $b_\alpha b_\beta < 0$. Atunci, inegalitatea (32) este verificată dacă pentru $f_1(x)$ luăm o funcție continuă nenegativă, astfel ca $f_1(x_\alpha) = 1$, $f_1(x_i) = 0$, $j = 0, 1, \dots, \alpha-1, \alpha+1, \dots, s$ și pentru $f_2(x)$ luăm o funcție continuă nenegativă, astfel ca $f_2(x_\beta) = 1$, $f_2(x_i) = 0$, $j = 0, 1, \dots, \beta-1, \beta+1, \dots, s$. Condiția este și suficientă, căci dacă ea este îndeplinită, din

$$R[1] = \sum_{i=0}^s b_i \neq 0$$

rezultă că $R[f] \neq 0$ pentru orice funcție pozitivă $f(x)$.

Deducem prin urmare următoarea teoremă:

Teorema 9. Condiția necesară și suficientă ca funcționala (40) să fie de gradul de exactitate -1 și să fie de formă simplă este ca toți coeficienții b_i , $i = 0, 1, \dots, s$ să fie de același semn, fără să fie toți nuli.

Dacă condiția este îndeplinită, avem deci

$$\sum_{i=0}^s b_i f(x_i) = \left(\sum_{i=0}^s b_i \right) D_0[f]$$

care exprimă de altfel o proprietate binecunoscută a funcțiilor continue. Aici $D_0[f] = f(\xi)$. Punctul ξ aparține, în general, intervalului închis $[a, b]$. Dacă, de exemplu, $s > 1$ și cel puțin unul din coeficienții $b_2, b_3, \dots, b_{s-1}$ este diferit de zero, punctul ξ se poate alege în intervalul (a, b) .

Ca o aplicație, să se observe că condiția necesară și suficientă pentru ca formula (1) să fie de grad de exactitate -1 și cu restul de formă simplă este ca $m=r=0$ și ca $a_{i,0} \leq 0$, $a_{i,j} = 0$, pentru $j=1, 2, \dots, r_i-1$, $i=1, 2, \dots, s$.

22. Dacă funcționala (34) este de grad de exactitate 0 și de formă simplă, atunci, conform teoremei 8, ea este în mod necesar de forma

$$R[f] = \sum_{i=0}^s [b_i f(x_0) + b'_i f'(x_i)]. \quad (41)$$

Condițiile ca gradul de exactitate să fie 0 sunt

$$\sum_{i=0}^s b_i = 0, \quad \sum_{i=0}^s (b_i x_0 + b'_i) \neq 0. \quad (42)$$

Să căutăm acum condiții necesare pentru ca funcționala să fie și de formă simplă.

Prima relație (42) este necesară căci 1 și -1 sunt ambele funcții nedescrescătoare și avem

$$R[1] \cdot R[-1] = - \left(\sum_{i=0}^s b_i \right)^2$$

și dacă condiția nu ar fi îndeplinită, am satisface la inegalitatea (32).

De asemenea, a doua condiție (42) este necesară, căci altfel am avea $R[x] = 0$, și x este o funcție crescătoare.

¹⁾ Aceasta înseamnă că numerele sunt toate nenegative sau toate nepozitive. Un singur număr este considerat ca având totdeauna același semn.

Fie acum $f(x)$ o funcție continuă, nedescrescătoare, egală cu 0 pentru $x \in [a, x_{i-1} + \varepsilon]$ și egală cu 1 pentru $x \in [x_i - \varepsilon, b]$, ε fiind un număr pozitiv destul de mic $[\varepsilon < \frac{1}{2}(x_i - x_{i-1})]$. Avem atunci

$$R[f] = b_i + b_{i+1} + \dots + b_s.$$

Pe baza teoremei 7, trebuie deci ca numerele

$$b_i + b_{i+1} + \dots + b_s, \quad i = 1, 2, \dots, s \quad (43)$$

să fie de același semn.

Fie apoi funcția $f(x)$ egală cu 0 pentru $x \leq x_i - \varepsilon$, egală cu 2ε pentru $x \geq x_i + \varepsilon$ și lineară în intervalul $[x_i - \varepsilon, x_i + \varepsilon]$, unde ε este un număr pozitiv destul de mic, $\varepsilon < \min_{i=1, 2, \dots, s} \{x_i - x_{i-1}\}$. Această funcție este nedescrescătoare și avem

$$R[f] = \varepsilon[(b_i + b_{i+1} + \dots + b_s) + b_{i+1} + b_{i+2} + \dots + b_s] + b'_i.$$

Deoarece ε poate fi luat oricât de mic, se vede, tot pe baza teoremei 7, că numerele

$$b'_0, b'_1, \dots, b'_s \quad (44)$$

împreună cu numerele (43) trebuie să fie de același semn.

În fine, vom pune în evidență încă o condiție necesară. Fie $f(x)$ funcția definită în felul următor:

$$f(x) = x - \frac{(x - x_{i-1})(x - x_i)(2x - x_{i-1} - x_i)}{(x_i - x_{i-1})^2}, \text{ pentru } x \in [x_{i-1}, x_i],$$

$$i = 1, 2, \dots, s.$$

Avem atunci

$$f'(x) = -\frac{6}{(x_i - x_{i-1})^2}(x - x_{i-1})(x - x_i), \text{ pentru } x \in [x_{i-1}, x_i], i = 1, 2, \dots, s$$

și se vede că funcția este continuă și derivabilă în intervalul $[a, b]$. Însă $f(x_i) = x_i, f'(x_i) = 0, i = 0, 1, \dots, s$ și $f'(x) > 0$, pentru $x \in (x_{i-1}, x_i), i = 1, 2, \dots, s$ așa că funcția $f(x)$ este crescătoare și avem

$$R[f] = \sum_{i=0}^s b_i x_i.$$

Deducem prin urmare condiția necesară

$$\sum_{i=0}^s b_i x_i \neq 0. \quad (45)$$

Să arătăm acum că condițiile stabilite sunt și suficiente. Pe baza primei relații (42) putem scrie

$$R[f] = \sum_{i=1}^s (x_i - x_{i-1})(b_i + b_{i+1} + \dots + b_s)[x_{i-1}, x_i; f] + \sum_{i=0}^s b'_i f'(x_i) \quad (46)$$

care se obține aplicând formula de transformare a lui Abel.

Observăm acum că

$$\sum_{i=1}^s (x_i - x_{i-1})(b_i + b_{i+1} + \dots + b_s) = \sum_{i=0}^s b_i x_i \quad 1$$

ceea ce se obține făcând $f(x) = x$ în (41) și (46). Condiția (45) implică deci faptul că numerele (43) nu sunt toate nule.

Dacă acum $f(x)$ este o funcție crescătoare, avem

$$[x_{i-1}, x_i; f] > 0, i = 1, 2, \dots, s, f'(x_i) \geq 0, i = 0, 1, \dots, s$$

asa că prima relație (42), condiția (45) și faptul că numerele (43), (44) sunt de același semn, implică, pe baza formulei (46), că $R[f] \neq 0$.

Să se observe că prima relație (42) și condiția (45) atrag după sine a doua condiție (42), dacă numerele (43), (44) sunt de același semn.

Avem deci următoarea teoremă:

Teorema 10. *Condițiile necesare și suficiente pentru ca funcționala (41) să fie de gradul de exactitate 0 și de formă simplă sunt ca să avem*

$$\sum_{i=0}^s b_i = 0, \quad \sum_{i=0}^s b_i x_i \neq 0$$

și ca numerele

$$b_s, b_s + b_{s-1}, \dots, b_1 + b_2 + \dots + b_s, b'_0, b'_1, \dots, b'_s$$

să fie de același semn.

23. Pentru ca formula (1) să aibă gradul de exactitate 0 și să fie de formă simplă, este necesar să avem $m + r \leq 1$ și $a_{i,j} = 0, j = 2, 3, \dots, r_i - 1, i = 1, 2, \dots, s$. Pentru scrierea celorlalte condiții, trebuie să se țină seama de poziția mutuală a nodurilor și a punctului de derivare.

Pentru fixarea ideilor, putem presupune că nodurile sunt în ordine crescătoare, deci

$$x_1 < x_2 < \dots < x_s. \quad (47)$$

Trebuie să distingem aici trei cazuri:

1°. $m = r = 0$. Presupunând $x_{i-1} < x_0 < x_i$, condițiile necesare și suficiente sunt atunci

$$\sum_{i=1}^s a_{i,0} = 1, \quad \sum_{i=1}^s a_{i,0} x_i \neq x_0$$

și ca numerele

$$\left. \begin{aligned} &-(a_{1,0} + a_{2,0} + \dots + a_{i,0}), j = 1, 2, \dots, i-1, \\ &a_{j,0} + a_{j+1,0} + \dots + a_{s,0}, j = i, i+1, \dots, s \\ &a_{j,1}, j = 1, 2, \dots, s \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

să fie de același semn.

Dacă $i = 1$ sau $i = s + 1$ primul, respectiv al doilea șir de numere (48) dispăre. În aceste cazuri avem $x_0 < x_1$, respectiv $x_0 > x_s$.

2°. $m = 0, r = 1$. Presupunând iarăși $x_{i-1} < x_0 < x_i$ condițiile necesare și suficiente sunt

$$a_0 + \sum_{i=0}^s a_{i,0} = 0, \quad a_0 x_0 + \sum_{i=1}^s a_{i,0} x_i \neq 0$$

și ca toate numerele (48) să fie nepozitive, cu restricția de mai sus, dacă $i = 1$ sau $i = s + 1$.

3°. $m = 1, r = 0$. Condițiile necesare și suficiente sunt

$$\sum_{i=1}^s a_{i,0} = 0, \quad \sum_{i=1}^s a_{i,0} x_i \neq 0$$

și ca numerele

$$a_{i,0} + a_{i+1,0} + \dots + a_{s,0}, \quad i = 2, 3, \dots, s; \quad a_{i,1}, \quad i = 1, 2, \dots, s$$

să fie toate nepozitive.

Există o singură formulă (E) de grad de exactitate 0, care este de formă simplă și pe care o vom semnală la § 5.

24. Dacă funcționala (34) este de gradul de exactitate 1 și de formă simplă, atunci, conform teoremei 8, ea este în mod necesar de forma

$$R[f] = \sum_{i=0}^s [b_i f(x_i) + b'_i f'(x_i) + b''_i f''(x_i)]. \quad (49)$$

Condițiile ca gradul de exactitate să fie 1 sunt

$$\sum_{i=0}^s b_i = 0, \quad \sum_{i=0}^s (b_i x_i + b'_i) = 0, \quad \sum_{i=0}^s (b_i x_i^2 + 2b'_i x_i + 2b''_i) \neq 0. \quad (50)$$

Să căutăm iarăși condițiile necesare pentru ca funcționala (49) să fie de formă simplă.

Primele două condiții (50) sunt necesare, deoarece funcțiile 1, -1 , x , $-x$ sunt neconcave de ordinul 1 și

$$R[1] R[-1] = - \left(\sum_{i=0}^s b_i \right)^2, \quad R[x] R[-x] = - \left[\sum_{i=0}^s (b_i x_i + b'_i) \right]^2.$$

Să considerăm funcția

$$f(x) = \frac{x - x_i + \varepsilon + |x - x_i + \varepsilon|}{2}$$

unde ε este un număr pozitiv $< x_i - x_{i-1}$. Această funcție este neconcavă de ordinul 1 în $[a, b]$ și avem

$$R[f] = \lambda_{i+1} + \lambda_{i+2} + \dots + \lambda_s + b'_i + b'_{i+1} + \dots + b'_s + \varepsilon (b_i + b_{i+1} + \dots + b_s) \quad (51)$$

unde am pus

$$\lambda_i = (x_i - x_{i-1}) (b_i + b_{i+1} + \dots + b_s), \quad i = 1, 2, \dots, s.$$

De asemenea, funcția

$$f(x) = \frac{-x + x_{i-1} + \varepsilon + |x - x_{i-1} - \varepsilon|}{2}$$

este neconcavă de ordinul 1 în $[a, b]$ și avem ($\varepsilon < x_i - x_{i-1}$)

$$R[f] = \lambda_i + \lambda_{i+1} + \dots + \lambda_s + b'_i + b'_{i+1} + \dots + b'_s + \varepsilon (b_i + b_{i+1} + \dots + b_s). \quad (52)$$

Formulele (51), (52) au loc oricât de mic ar fi ε pozitiv. Se deduce imediat, pe baza teoremei 8, că numerele¹⁾

$$\begin{cases} \lambda_i + \lambda_{i+1} + \dots + \lambda_s + b'_i + b'_{i+1} + \dots + b'_s, & i = 1, 2, \dots, s \\ \lambda_{i+1} + \lambda_{i+2} + \dots + \lambda_s + b'_i + b'_{i+1} + \dots + b'_s \end{cases} \quad (53)$$

trebuie să fie de același semn.

Fie acum $f(x)$ funcția nulă pentru $x \leq x_i - \varepsilon$, egală cu $(x - x_i + \varepsilon)^2$ în intervalul $[x_i - \varepsilon, x_i + \varepsilon]$ și egală cu $4\varepsilon(x - x_i)$ pentru $x \geq x_i + \varepsilon$. Aceasta este o funcție continuă neconcavă de ordinul 1 în $[a, b]$ ²⁾ și pentru ε destul de mic ($\varepsilon < x_i - x_{i-1}, x_{i+1} - x_i$) avem

$$R[f] = \varepsilon^2 b_i + 2\varepsilon b'_i + 4\varepsilon (\lambda_{i+1} + \lambda_{i+2} + \dots + \lambda_s + b'_{i+1} + b'_{i+2} + \dots + b'_s) + 2b''_i.$$

Numărul ε putând fi oricât de mic pozitiv, tot pe baza teoremei 8, vedem că numerele

$$b''_0, b''_1, \dots, b''_s \quad (54)$$

sunt de același semn cu numerele (53).

În fine, ca și în cazul $n = 0$, vom pune în evidență încă o condiție necesară. Fie $f(x)$ funcția definită în felul următor:

$$f(x) = x^2 - \frac{(x - x_{i-1})^2 (x - x_i)^2}{(x_i - x_{i-1})^2}, \quad \text{pentru } x \in [x_{i-1}, x_i], \quad i = 1, 2, \dots, s.$$

Avem atunci

$$f''(x) = -\frac{12}{(x_i - x_{i-1})^2} (x - x_{i-1}) (x - x_i), \quad \text{pentru } x \in [x_{i-1}, x_i], \quad i = 1, 2, \dots, s.$$

Se vede că funcția este continuă și are o derivată a doua, continuă în intervalul $[a, b]$. Însă $f(x_i) = x_i^2, f'(x_i) = 2x_i, f''(x_i) = 0, i = 0, 1, \dots, s$ și $f''(x) > 0$ pentru $x \in (x_{i-1}, x_i), i = 1, 2, \dots, s$, așa că funcția $f(x)$ este convexă de ordinul 1 și avem

$$R[f] = \sum_{i=0}^s (b_i x_i^2 + 2b'_i x_i).$$

¹⁾ Pentru $i = s$, al doilea număr se reduce la b'_s .

²⁾ Este util să se facă o reprezentare grafică a acestei funcții, ca și de altfel a celorlalte funcții auxiliare întrebuintate aici.

Avem, așa dar, și condiția necesară

$$\sum_{i=0}^s (b_i x_i^2 + 2b'_i x_i) \neq 0. \quad (55)$$

Să arătăm acum că condițiile găsite sunt și suficiente. Acest lucru rezultă din formula

$$\begin{aligned} R[f] = & \sum_{i=1}^s (x_i - x_{i-1}) (\lambda_i + \lambda_{i+1} + \dots + \lambda_s + b'_i + b'_{i+1} + \\ & + \dots + b'_s) \cdot [x_{i-1}, x_{i-1}, x_i; f] + \sum_{i=1}^s (x_i - x_{i-1}) (\lambda_{i+1} + \lambda_{i+2} + \\ & + \dots + \lambda_s + b'_i + b'_{i+1} + \dots + b'_s) \cdot [x_{i-1}, x_i, x_i; f] + \sum_{i=0}^s b'' f''(x_i) \end{aligned}$$

care este valabilă când primele două condiții (50) sunt îndeplinite. Această formulă este un caz particular al formulei generale de transformare a diferențelor divizate și se obține aplicând de două ori formula de transformare a lui Abel [6]. Dacă punem $f(x) = x^2$, deducem

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^s (x_i - x_{i-1}) (\lambda_i + \lambda_{i+1} + \dots + \lambda_s + b'_i + b'_{i+1} + \dots + b'_s) + \\ & + \sum_{i=1}^s (x_i - x_{i-1}) (\lambda_{i+1} + \lambda_{i+2} + \dots + \lambda_s + b'_i + b'_{i+1} + \dots + b'_s) = \\ & = \sum_{i=0}^s (b_i x_i^2 + 2b'_i x_i) \end{aligned}$$

și atunci, pe baza ipotezei (55), cel puțin unul din numerele (53) este diferit de zero.

Dacă $f(x)$ este o funcție convexă de ordinul 1, avem

$$[x_{i-1}, x_{i-1}, x_i; f] > 0, \quad [x_{i-1}, x_i, x_i; f] > 0, \quad i = 1, 2, \dots, s$$

$$f''(x_i) \geq 0, \quad i = 0, 1, \dots, s$$

așa că primele două egalități (50), condiția (55) și faptul că numerele (53), (54) sunt de același semn implică $R[f] \neq 0$.

Să se observe că în aceleași condițiuni a treia relație (50) rezultă.

Teorema 11. *Condițiile necesare și suficiente pentru ca funcționala (49) să fie de gradul de exactitate 1 și de formă simplă sunt ca primele două relații (50) să fie verificate, ca inegalitatea (55) să fie verificată și ca numerele (53), (54) să fie de același semn.*

25. Pentru ca formula (1) să fie de gradul de exactitate 1 și de formă simplă, este necesar ca $m + r \leq 2$ și ca $a_{i,j} = 0, j = 3, 4, \dots, r_i - 1, i = 1, 2, \dots, s$. Exprimarea celorlalte condiții depinde de pozițiile mutuale ale nodurilor și ale punctului de derivare.

Să presupunem că nodurile sunt în ordine crescătoare, că avem deci (47). Vom putea exprima atunci condițiile necesare și suficiente după valorile lui

m, r și poziția punctului x_0 față de noduri. Aceste condiții sunt destul de complicate. Va fi deci destul să arătăm în fiecare caz cum aducem restul la forma (49), studiată mai sus, și pentru care punctele $x_0, x_1, \dots, x_s$ sunt în ordine crescătoare. Condițiile vor fi exprimate atunci cu ajutorul coeficienților b_i, b'_i, b''_i .

Trebuie să distingem 6 cazuri. Vom presupune în general că $x_{i-1} < x_0 < x_i$.
1°. $m = r = 0$. O serie de condiții necesare și suficiente devin

$$\sum_{i=1}^s a_{i,0} = 1, \quad \sum_{i=1}^s (a_{i,0} x_i + a_{i,1}) = x_0, \quad \sum_{i=2}^s (a_{i,0} x_i^2 + 2a_{i,1} x_i) \neq x_0^2$$

iar celelalte condiții se deduc reducând restul la forma (49)¹⁾ ceea ce revine la înlocuirea în (49) a șirului de puncte $x_0, x_1, \dots, x_s$ cu $x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_0, x_i, \dots, x_s$ și punând apoi

$$\left. \begin{aligned} b_j &= a_{j+1,0}, \quad b'_j = a_{j+1,1}, \quad b''_j = a_{j+1,2}, \quad j = 0, 1, \dots, i-2 \\ b_{i-1} &= -1, \quad b'_{i-1} = b''_{i-1} = 0 \\ b_j &= a_{j,0}, \quad b'_j = a_{j,1}, \quad b''_j = a_{j,2}, \quad j = i, i+1, \dots, s \end{aligned} \right\} \quad (56)$$

2°. $m = 0, r = 1$. Reducere analoagă, numai că a doua serie de formule (56) devine

$$b_{i-1} = a_0, \quad b'_{i-1} = -1, \quad b''_{i-1} = 0.$$

3°. $m = 1, r = 0$. Reducere analoagă, a doua serie de formule (56) devine

$$b_{i-1} = 0, \quad b'_{i-1} = -1, \quad b''_{i-1} = 0.$$

4°. $m = 0, r = 2$. Reducere analoagă cu

$$b_{i-1} = a_0, \quad b'_{i-1} = a_1, \quad b''_{i-1} = -1.$$

5°. $m = r = 1$. Reducere analoagă cu

$$b_{i-1} = a_0, \quad b'_{i-1} = 0, \quad b''_{i-1} = -1.$$

6°. $m = 2, r = 0$. Reducere analoagă cu

$$b_{i-1} = b'_{i-1} = 0, \quad b''_{i-1} = -1.$$

În cazurile 4°, 5°, 6° semnul tuturor numerelor (53), (54) corespunzătoare este nepozitiv.

Dacă $i = 1$ deci $x_0 < x_1$, prima serie de formule (56) se suprimă, iar dacă $i = s + 1$ deci $x_s < x_0$, a treia serie de formule (56) se suprimă.

Există 5 formule (E) de grad de exactitate 1 pe care le vom semna în § 5.

¹⁾ Mai exact (pentru simplificarea expunerii) restul schimbat de semn este adus la această formă, fapt care nu restrânge generalitatea problemei.

§ 3. Un criteriu pentru recunoașterea formei simple a restului unei formule de exactitate maximă

26. Să reluăm formula de derivare numerică (E). Vom presupune întâi $r=0$, deci vom considera formula

$$f^{(m)}(x_0) = L^{(m)}(x'_1, x'_2, \dots, x'_{p+1}; f|_{x_0}) + R. \quad (57)$$

Pentru studiul restului acestei formule, putem pleca de la cazul $m=0$, considerând întâi formula (28).

Deoarece la un moment dat va fi comod să considerăm punctul x_0 ca variabil, îl vom nota atunci, pentru mai multă claritate, cu x . Formula (29) ne arată că dacă punem

$$R(x) = l(x)[x, x'_1, x'_2, \dots, x'_{p+1}; f] \quad (58)$$

restul formulei (28) este $R = R(x_0)$, iar restul formulei (57) va fi dat de egalitatea

$$R = R[f] = R^{(m)}(x_0). \quad (59)$$

Derivata de ordinul m , $R^{(m)}(x)$ se poate calcula din formula (58). Avem

$$R^{(m)}(x) = \sum_{i=0}^m \binom{m}{i} l^{(m-i)}(x)[x, x'_1, x'_2, \dots, x'_{p+1}; f]^{(i)}. \quad (59')$$

Însă [5]

$$[x, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k; f]^{(i)} = i! \underbrace{[x, x, \dots, x, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k; f]}_{i+1} \quad (60)$$

din care se deduce și formula mai generală

$$\underbrace{[x, x, \dots, x, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k; f]^{(i)}}_j = \frac{(i+j-1)!}{(j-1)!} \underbrace{[x, x, \dots, x, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k; f]}_{i+j} \quad (61)$$

unde $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ sunt noduri fixe și x este o variabilă.

Ținând seama de (60), formula (59') devine

$$R^{(m)}(x) = m! \sum_{i=0}^m \frac{l^{(m-i)}(x)}{(m-i)!} \underbrace{[x, x, \dots, x, x'_1, x'_2, \dots, x'_{p+1}; f]}_{i+1}. \quad (62)$$

27. Vom transforma acum formula (62) într-o altă formulă care se va dovedi utilă.

Putem scrie

$$R^{(m)}(x) = \sum_{i=0}^m A_{m,i}(x) \underbrace{[x, x, \dots, x, x'_1, x'_2, \dots, x'_{p+1-i}; f]}_{i+1} \quad (63)$$

unde coeficienții $A_{m,i}(x)$, $i=0, 1, \dots, m$ sunt polinoame în x , complet determinate și independente de funcția $f(x)$.

Această formulă rezultă dintr-o formulă generală de transformare [6] aplicată funcționalei aditive și omogene (62), definită pentru funcțiile $f(x)$ date pe punctele

$$\underbrace{x, x, \dots, x, x'_1, x'_2, \dots, x'_{p+1}}_{m+1} \quad (64)$$

luate în această ordine.

Formula (63) se deduce din formula (62), aplicând în mod convenabil diferențelor divizate din membrul al doilea formula de recurență a diferențelor divizate până ce toate aceste diferențe divizate se exprimă linear și omogen în funcție de diferențe divizate de ordinul $p+1$ luate pe câte $p+2$ puncte consecutive din șirul (64).

Polinoamele $A_{m,i}(x)$, $i=0, 1, \dots, m$ se pot calcula explicit punându-se sub o formă comodă. Derivând formula (63) în raport cu x și ținând seama de formulele (59) și (61), deducem

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{m+1} A_{m+1,i}(x) \underbrace{[x, x, \dots, x, x'_1, x'_2, \dots, x'_{p+1-i}; f]}_{i+1} &= \\ = \sum_{i=0}^m A'_{m,i}(x) \underbrace{[x, x, \dots, x, x'_1, x'_2, \dots, x'_{p+1-i}; f]}_{i+1} + \\ + \sum_{i=0}^m (i+1) A_{m,i}(x) \underbrace{[x, x, \dots, x, x'_1, x'_2, \dots, x'_{p+1-i}; f]}_{i+2}. \end{aligned} \quad (65)$$

Ținând seama de formula de recurență

$$\begin{aligned} \underbrace{[x, x, \dots, x, x'_1, x'_2, \dots, x'_{p+1-i}; f]}_{i+2} &= \\ = \frac{1}{x - x'_{p+1-i}} \left\{ \underbrace{[x, x, \dots, x, x'_1, x'_2, \dots, x'_{p-i}; f]}_{i+2} - \right. \\ \left. - \underbrace{[x, x, \dots, x, x'_1, x'_2, \dots, x'_{p+1-i}; f]}_{i+1} \right\} \end{aligned} \quad (66)$$

și identificând coeficienții în (65) deducem

$$\begin{aligned} A_{m+1,i}(x) &= A'_{m,i}(x) - (i+1) \frac{A_{m,i}(x)}{x - x'_{p+1-i}} + i \frac{A_{m,i-1}(x)}{x - x'_{p+2-i}} \\ i &= 0, 1, \dots, m+1, \quad [A_{m,1}(x) = A_{m,m+1}(x) = 0]. \end{aligned} \quad (67)$$

28. Pentru a găsi forma explicită a polinoamelor $A_{m,i}(x)$ vom mai introduce câteva notații utile. Punem

$$l_0(x) = 1, \quad l_i(x) = (x - x'_1)(x - x'_2) \dots (x - x'_i), \quad i = 1, 2, \dots, p+1.$$

Avem atunci $l_{p+1}(x) = l(x)$ și

$$l_{i+1}(x) = (x - x'_{i+1}) l_i(x), \quad i = 0, 1, \dots, p. \quad (68)$$

Dacă, pentru simplificarea scrierii, convenim să punem

$$l_{i,\alpha}(x) = \frac{1}{(i-\alpha)!} l_i^{(i-\alpha)}(x), \quad \alpha = 0, 1, \dots, i, \quad (69)$$

din (68) deducem imediat relațiile

$$l_{i+1,\alpha+1}(x) = l_{i,\alpha+1}(x) + (x - x'_{i+1}) l_{i,\alpha}(x) \quad (70)$$

$$l_{i,\alpha}^{(\beta)}(x) = \frac{(i-\alpha+\beta)!}{(i-\alpha)!} l_{i,\alpha-\beta}(x). \quad (71)$$

În calcule se ia totdeauna $l_{i,\alpha}(x) = 0$, dacă $\alpha < 0$ sau $\alpha > i$.
Nodurile (6) le putem scrie sub forma

$$x'_i = x_0 + h_i, \quad i = 1, 2, \dots, p+1 \quad (72)$$

atunci $h_1, h_2, \dots, h_{p+1}$ sunt abaterile nodurilor respective de la punctul de derivare x_0 .

Vom nota cu $H_i, i = 0, 1, \dots, p+1$ ($H_0 = 1$) polinoamele simetrice fundamentale ale abaterilor $h_i, i = 1, 2, \dots, p+1$ și vom pune totdeauna $H_i = 0$, dacă $i < 0$ sau $i > p+1$. De asemenea, vom nota cu $H_{i,\alpha}, \alpha = 0, 1, \dots, i$ polinoamele simetrice fundamentale ale primelor i abateri $h_1, h_2, \dots, h_i$ ($H_{i,0} = 1, (i \geq 0)$ și $H_{i,\alpha} = 0$ pentru $\alpha < 0$ și $\alpha > i$). Avem atunci formulele $H_{p+1,\alpha} = H_\alpha, \alpha = 0, 1, \dots, p+1$ și

$$l_{i,\alpha}(x_0) = (-1)^\alpha H_{i,\alpha}, \quad \alpha = 0, 1, \dots, i, \quad i = 0, 1, \dots, p+1. \quad (73)$$

Având în vedere cele expuse mai sus vom demonstra că avem

$$A_{m,i}(x) = m! (x - x'_{p+1-i}) l_{p-i,p-m}(x), \quad i = 0, 1, \dots, m. \quad (74)$$

Pentru aceasta observăm că $A_{0,0}(x) = l(x) = (x - x'_{p+1}) l_{p,p}(x)$ și deci pentru $m = 0$, formulele (74) sunt adevărate. Să presupunem că aceste formule sunt adevărate pentru m și să le demonstrăm pentru $m+1$. Ținând seama de (67) și (74), deducem

$$A_{m+1,i}(x) = m! [l_{p-i,p-m}(x) + (x - x'_{p+1-i}) l'_{p-i,p-m}(x) - (i+1) l_{p-i,p-m}(x) + i l_{p-i+1,p-m}(x)]. \quad (75)$$

Dar din (70), (71) rezultă că

$$l'_{p-i,p-m}(x) = (m-i+1) l_{p-i,p-m-1}(x)$$

$$l_{p-i+1,p-m}(x) = l_{p-i,p-m}(x) + (x - x'_{p+1-i}) l_{p-i,p-m}(x)$$

și înlocuind în (75), găsim

$$A_{m+1,i}(x) = (m+1)! (x - x'_{p+1-i}) l_{p-i,p-m-1}(x), \quad i = 0, 1, \dots, m+1$$

care arată că formulele (74) sunt generale.

29. Aplicând formulei (63) formula de transformare a lui Abel, avem

$$R^{(m)}(x) = \sum_{i=0}^{m-1} \left[\sum_{\alpha=1}^{m-i} A_{m,i+\alpha}(x) \right] \left\{ \underbrace{[x, x, \dots, x, x'_1, x'_2, \dots, x'_{p-i}; f]}_{i+2} - \right. \quad (76)$$

$$\left. - \underbrace{[x, x, \dots, x, x'_1, x'_2, \dots, x'_{p+1-i}; f]}_{i+1} \right\} + \left[\sum_{i=0}^m A_{m,i}(x) \right] [x, x'_1, x'_2, \dots, x'_{p+1}; f].$$

Dacă, însă, în formula (63) punem $f(x) = x^{p+1}$ și ținem seamă de (30) deducem

$$\sum_{i=0}^m A_{m,i}(x) = l^{(m)}(x). \quad (77)$$

Observăm că din (70), (74) rezultă

$$\sum_{\alpha=1}^{m-i} A_{m,i+\alpha}(x) = m! \sum_{\alpha=1}^{m-i} [l_{p+1-i-\alpha,p-m+1}(x) - l_{p+i-\alpha,p-m+1}(x)] =$$

$$= m! l_{p-i,p-m+1}(x).$$

Ținând seama de formula de recurență (66) și de (77), formula (76) devine

$$R^{(m)}(x) = m \sum_{i=0}^{m-1} A_{m-1,i}(x) \underbrace{[x, x, \dots, x, x'_1, x'_2, \dots, x'_{p+1-i}; f]}_{i+2} +$$

$$+ l^{(m)}(x) [x, x'_1, x'_2, \dots, x'_{p+1}; f]. \quad (78)$$

Formulele (63), (78) subsistă, bineînțeles, oricare ar fi x (și dacă x coincide cu unul din nodurile x'_i).

30. Numerele $A_{m,i}(x), i = 0, 1, \dots, m$ nu pot fi toate nule. În cazul contrar, am avea $R[f] = 0$, oricare ar fi funcția $f(x)$, ceea ce este în contradicție cu faptul că formula (57) are, pe baza ipotezelor făcute la punctul 2, un grad de exactitate determinat. Cel puțin unul dintre numerele $A_{m,i}(x), i = 0, 1, \dots, m$ este diferit de zero. Rezultatul acesta, precum și cele ce urmează, subsistă dacă lărgim puțin ipotezele dela punctul 2. Putem să presupunem, mai general, că x_0 poate coincide și cu un nod. Trebuie să presupunem însă atunci că

$$m \geq r_i \text{ dacă } x_0 = x_i, \quad i = 1, 2, \dots, s. \quad (79)$$

Dacă $x_0 = x_i$ și $m < r_i$ restul formulei (57) este nul oricare ar fi funcția $f(x)$.

Să presupunem că numerele $A_{m,i}(x_0)$ sunt toate de același semn¹⁾. Atunci, din observația de mai sus și din (77), rezultă că $l^{(m)}(x_0) \neq 0$. Prin urmare, gradul de exactitate al formulei (57) este p . Pentru fixarea ideilor să presupunem că

$$A_{m,i}(x_0) \neq 0. \quad (80)$$

Din formula (74) rezultă atunci că

$$x_0 \neq x'_{p+1-i}. \quad (81)$$

¹⁾ Vezi trimiterea ¹⁾, dela pagina 75.

Dacă acum $f(x)$ este o funcție convexă de ordinul p , avem

$$\underbrace{[x_0, x_0, \dots, x_0, x'_1, x'_2, \dots, x'_{p+1-i}; f]}_{i+1} \geq 0, \quad i = 0, 1, \dots, m. \quad (82)$$

Dar, o funcție convexă de ordinul p (≥ 0) se bucură de proprietatea că diferențele divizate de ordinul $p+1$ ale sale, pe noduri nu toate confundate, sunt pozitive. Din (81) rezultă deci că

$$\underbrace{[x_0, x_0, \dots, x_0, x'_1, x'_2, \dots, x'_{p+1-j}; f]}_{j+1} > 0. \quad (83)$$

Din formulele (74), (80), (82), (83) rezultă atunci că avem $R[f] \neq 0$.

Pe baza criteriului C putem dar enunța teorema următoare:

Teorema 12. Dacă numerele $A_{m,i}(x_0)$, $i = 0, 1, \dots, m$ sunt toate de același semn, gradul de exactitate al formulei (57) este p și restul este de formă simplă.

În condițiile teoremei, restul este deci de forma

$$R = l^{(m)}(x_0) D_{p+1}[f].$$

Dacă presupunem că $l^{(m)}(x_0) = 0$, o demonstrație absolut analoagă bazată pe formula (78), ne permite să enunțăm

Teorema 13. Dacă $l^{(m)}(x_0) = 0$ și dacă numerele $A_{m-1,i}(x_0)$, $i = 0, 1, \dots, m-1$ sunt de același semn, gradul de exactitate al formulei (57) este egal cu $p+1$ și restul este de formă simplă.

În condițiile teoremei restul este de forma

$$R = m l^{(m-1)}(x_0) D_{p+2}[f]$$

deoarece din (62) deducem

$$R[x^{p+2}] = m l^{(m-1)}(x_0).$$

Teoremele 12, 13 sunt valabile în ipoteza (79). Într'adevăr, dacă $r_i \leq m$ și $x_0 = x_i$, egalitățile $l^{(m)}(x_0) = 0$ și $l^{(m-1)}(x_0) = 0$ sunt incompatibile pe baza lemei 1.

31. Să considerăm acum cazul general al formulei (E). Vom arăta cum se poate reduce acest caz la cazul $r = 0$.

Dacă considerăm polinomul de gradul $r-1$

$$L(x) = L(\underbrace{x_0, x_0, \dots, x_0}_r; f | x) \quad (84)$$

și dacă ținem seama de formulele (28), (29), deducem

$$\frac{f(x) - L(x)}{(x - x_0)^r} = [\underbrace{x, x_0, x_0, \dots, x_0}_r; f]. \quad (85)$$

Aplicând acum formula

$$L(\underbrace{x_0, x_0, \dots, x_0}_r, x'_1, x'_2, \dots, x'_{p+1}; f | x) = \quad (86)$$

$$= l(x) L(\underbrace{x_0, x_0, \dots, x_0}_r; \frac{f(x)}{l(x)} | x) + (x - x_0)^r L(x'_1, x'_2, \dots, x'_{p+1}; \frac{f(x)}{(x - x_0)^r} | x)$$

funcției $f(x) - L(x)$ și ținând seama de relațiile

$$L(\underbrace{x_0, x_0, \dots, x_0}_r; \frac{f(x) - L(x)}{(x - x_0)^r} | x) = 0$$

$$\begin{aligned} L(\underbrace{x_0, x_0, \dots, x_0}_r, x'_1, x'_2, \dots, x'_{p+1}; f(x) - L(x) | x) &= \\ &= L(\underbrace{x_0, x_0, \dots, x_0}_r, x'_1, x'_2, \dots, x'_{p+1}; f | x) - L(x) \end{aligned}$$

deducem

$$\begin{aligned} L(\underbrace{x_0, x_0, \dots, x_0}_r, x'_1, x'_2, \dots, x'_{p+1}; f | x) &= \\ &= L(x) + (x - x_0)^r L(x'_1, x'_2, \dots, x'_{p+1}; [\underbrace{x, x_0, x_0, \dots, x_0}_r; f] | x) \end{aligned}$$

de unde

$$\begin{aligned} L^{(m+r)}(\underbrace{x_0, x_0, \dots, x_0}_r, x'_1, x'_2, \dots, x'_{p+1}; f | x_0) &= \\ &= \frac{(m+r)!}{m!} L^{(m)}(x'_1, x'_2, \dots, x'_{p+1}; [\underbrace{x, x_0, x_0, \dots, x_0}_r; f] | x_0). \end{aligned} \quad (87)$$

Dar, din (85) rezultă și

$$f^{(m+r)}(x_0) = \frac{(m+r)!}{m!} [x, \underbrace{x_0, x_0, \dots, x_0}_r]_{x=x_0}^{(m)}. \quad (88)$$

Să notăm cu $R[f]$ restul formulei (E) și cu $R_1[f]$ restul formulei (57). Avem atunci, ținând seama de (87) și (88),

$$R[f] = \frac{(m+r)!}{m!} R_1[\underbrace{x, x_0, x_0, \dots, x_0}_r; f] \quad (89)$$

iar formula (E) se poate scrie

$$f^{(m+r)}(x_0) = \frac{(m+r)!}{m!} L^{(m)}(x'_1, x'_2, \dots, x'_{p+1}; [x, \underbrace{x_0, x_0, \dots, x_0}_r; f] | x_0) + \\ + \frac{(m+r)!}{m!} R_1[[x, \underbrace{x_0, x_0, \dots, x_0}_r; f]]. \quad (90)$$

32. Pentru a merge mai departe, vom demonstra mai întâi

Lema 4. Dacă funcționala aditivă și omogenă $R_1[f]$ este de grad de exactitate n (≥ 0) și de formă simplă, atunci funcționala aditivă și omogenă

$$R[f] = K \cdot R_1[[x, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k; f]] \quad (91)$$

unde $K \neq 0$ este o constantă (independentă de funcția $f(x)$) și $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ sunt k puncte fixe, este de gradul de exactitate $n+k$ și este de formă simplă.

Demonstrația se face cu ușurință. Avem $[x, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k; x^i] = 0$, pentru $i = 0, 1, \dots, k-1$, iar pentru $i \geq k$ această diferență divizată este un polinom de gradul $i-k$, cu primul coeficient 1, deci

$$[x, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k; x^i] = x^{i-k} + \dots$$

De aici rezultă proprietatea relativă la gradul de exactitate.

Să presupunem acum că $f(x)$ este o funcție convexă de ordinul $n+k$. Spunem atunci că funcția de $x[x, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k; f]$ este convexă de ordinul n . Într'adevăr, avem

$$[\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n+2}; [x, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k; f]] = [\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n+2}, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k; f] > 0$$

dacă nodurile nu sunt toate confundate. Egalitatea (91) ne arată că $R[f] \neq 0$, pentru orice funcție $f(x)$ convexă de ordinul $n+k$, deoarece $R_1[\varphi] \neq 0$ pentru orice funcție $\varphi(x)$ convexă de ordinul n , deci în particular, $R_1[[x, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k; f]] \neq 0$.

Lema 4 este complet demonstrată.

Ținând seama de formula (89), din teoremele 12, 13 deducem, bazându-ne pe lema precedentă

Teorema 14. Dacă $r \geq 0$ este întreg și dacă numerele $A_{m,i}(x_0)$, $i = 0, 1, \dots, m$ sunt de același semn, formula de derivare numerică (E) are gradul de exactitate $p+r$ și restul de formă simplă.

Pe baza formulei (12) restul se scrie atunci

$$R = \frac{(m+r)!}{m!} l^{(m)}(x_0) D_{p+r+1}[f]. \quad (92)$$

Teorema 15. Dacă $r \geq 0$ este întreg, dacă $l^{(m)}(x_0) = 0$ și dacă numerele $A_{m-1,i}(x_0)$, $i = 0, 1, \dots, m-1$ sunt de același semn, formula de derivare numerică (E) are gradul de exactitate $p+r+1$ și restul de formă simplă.

Pe baza formulelor (12) restul se scrie atunci

$$R = \frac{(m+r)!}{(m-1)!} l^{(m-1)}(x_0) D_{p+r+2}[f].$$

Teoremele 14, 15 sunt valabile în ipoteza exprimată de relația (79).

33. Din cele spuse rezultă că formula (E) are cu siguranță restul de formă simplă dacă $m = 0$. Formula (E) pentru $m = 0$ are gradul de exactitate $p+r$ și restul

$$R = l(x_0) D_{p+r+1}[f]$$

în ipotezele dela punctul 2. În aceleași condiții, formula (E) are gradul de exactitate $p+r+1$ și restul

$$R = l(x_0) D_{p+r+2}[f]$$

dacă $m = 1$ și x_0 este o rădăcină, diferită de noduri, a lui $l'(x)$.

Condiția impusă numerelor $A_{m,i}(x_0)$, $i = 0, 1, \dots, m$, respectiv numerelor $A_{m-1,i}(x_0)$, $i = 0, 1, \dots, m-1$, este suficientă pentru ca formula (E) să aibă restul de formă simplă. Formarea numerelor $A_{m,i}(x_0)$ depinde de ordinea în care sunt luate nodurile (6). Mai precis, un sistem de numere $A_{m,i}(x_0)$, $i = 0, 1, \dots, m$ este caracterizat de ordinea în care sunt luate nodurile (6). Pentru ca formula (E) să fie de grad de exactitate $p+r$ și să aibă restul de formă simplă, este suficient ca unul din aceste sisteme să fie format din numere de același semn. Nu examinăm aici necesitatea acestei condiții în general. Rezultă însă din § 4 că în cazul $m = 1$ condiția este și necesară.

§ 4. Asupra câtorva aplicații ale rezultatelor precedente

Vom face aplicații ale formulelor precedente la următoarele 3 exemple:

34. **Exemplul 1.** Punctul de derivare x_0 este înafara celui mai mic interval deschis care conține nodurile (2).

Dacă presupurem că, mai general, ipoteza exprimată de condiția (79) este îndeplinită, avem

$$l^{(m)}(x_0) \neq 0, \quad (93)$$

deci formula (E) este de grad de exactitate $p+r$ și, în particular, nu este niciodată excepțională. Într'adevăr, rădăcinile lui $l^{(m)}(x)$ aparțin celui mai mic interval închis care conține nodurile (2). Dacă x_0 nu aparține acestui interval, (93) este demonstrat. Să presupunem că x_0 coincide cu un nod extrem x_i . În acest caz $l^{(\alpha)}(x_i) \neq 0$ pentru $\alpha \geq r_i$. Dar $m \geq r_i$, pe baza ipotezei (79), așa că (93) rezultă și de data aceasta.

Abaterile ¹⁾ h_i , $i = 1, 2, \dots, p+1$ ale nodurilor de punctul de derivare sunt în acest caz de același semn și anume nepozitive, respectiv nenegative, după cum

$$x_0 \geq x'_i, \quad i = 1, 2, \dots, p+1, \quad \text{respectiv} \quad x_0 \leq x'_i, \quad i = 1, 2, \dots, p+1.$$

Formula (73) ne arată atunci că

$$l_{\alpha,\gamma}(x_0) = (-1)^\gamma H_{\alpha,\gamma} \geq 0, \quad \text{respectiv} \quad (-1)^\gamma l_{\alpha,\gamma}(x_0) = H_{\alpha,\gamma} \geq 0,$$

oricare ar fi α și γ .

¹⁾ Vezi punctul 28.

Ținând seama de formulele (74), avem atunci respectiv,

$$A_{m,i}(x_0) = (-1)^{p-m+1} m! h_{p+1-i} H_{p-i,p-m} \geq 0, \quad i = 0, 1, \dots, m,$$

$$(-1)^{p-m+1} A_{m,i}(x_0) = m! h_{p+1-i} H_{p-i,p-m} \geq 0, \quad i = 0, 1, \dots, m.$$

Toate ipotezele în care a fost stabilită teorema 14 sunt deci îndeplinite și putem enunța

Teorema 16. Dacă $r \geq 0$ este întreg, m satisface condiția exprimată de (79) iar x_0 este în afara celui mai mic interval deschis care conține nodurile (2), avem formula de derivare numerică (E), cu gradul de exactitate $p + r$ și cu restul de forma (92).

Ipotezele în care teorema este adevărată cer ca în cazul când $s = 1$, punctul x_0 să fie diferit de noduri.

35. *Exemplul 2.* Nodurile (2) sunt simetric distribuite față de punctul de derivare x_0 . Pentru a simplifica limbajul vom spune, în acest caz, că formula (E) este o formulă simetrică.

În cazul simetric, putem să presupunem că punctul de derivare x_0 este diferit de noduri, deci că abaterile h_i sunt diferite de zero. Numărul nodurilor este atunci par și egal cu $2q = p + 1$, unde $q > 0$. Pentru mai multă claritate vom nota cu $\pm t_i$, $i = 1, 2, \dots, q$ abaterile, unde $t_1, t_2, \dots, t_q$ sunt q numere pozitive (distincte sau nu). Vom nota cu T_i , $i = 0, 1, \dots, q$ polinoamele simetrice fundamentale ale numerelor $t_1^2, t_2^2, \dots, t_q^2$ ($T_0 = 1$, $T_i = 0$, pentru $i < 0$ și pentru $i > q$). Vom nota de asemenea cu $T_{i,\alpha}$, $\alpha = 0, 1, \dots, i$ polinoamele simetrice fundamentale ale numerelor $t_1^2, t_2^2, \dots, t_i^2$ ($T_{i,0} = 1$, $T_{i,\alpha} = 0$, pentru $\alpha < 0$ și pentru $\alpha > i$). Avem atunci $T_{q,i} = T_i$, $i = 0, 1, \dots, q$.

Avem

$$l^{(m)}(x_0) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } m \text{ este impar} \\ (-1)^{\frac{m}{2}} m! T_{q-\frac{m}{2}}, & \text{dacă } m \text{ este par.} \end{cases}$$

Rezultă că $l^{(m)}(x_0) \neq 0$ sau $= 0$, după cum m este par sau impar. Formula (E) este în acest caz excepțională dacă $r > 0$, iar rezultatele dela punctul 11 ne arată că este destul să considerăm numai cazul când m este par, cazul m impar reducându-se la acesta prin modificarea numărului r .

În cazul când indicele de derivare m este par, îl vom nota cu 2μ , deci $m = 2\mu$, unde $0 \leq \mu < q$.

Să luăm acum nodurile în ordinea următoare:

$$x_0 - t_1, x_0 + t_1, x_0 - t_2, x_0 + t_2, \dots, x_0 - t_q, x_0 + t_q.$$

Avem, așa dar ¹⁾

$$h_\alpha = x'_\alpha - x_0 = (-1)^\alpha t_{\left[\frac{\alpha+1}{2}\right]}, \quad \alpha = 1, 2, \dots, 2q. \quad (94)$$

Pentru a calcula numerele $A_{2\mu,i}(x_0)$ vom calcula întâi numerele (73) corespunzătoare, unde $H_{i,\alpha}$ corespund la abaterile (94).

¹⁾ $[z]$ înseamnă cel mai mare întreg cuprins în z .

Dacă α este par, $H_{\alpha,\gamma}$, $\gamma = 0, 1, \dots, \alpha$ sunt polinoamele simetrice fundamentale ale numerelor $\pm t_i$, $i = 1, 2, \dots, \frac{\alpha}{2}$. Un calcul elementar ne arată că

$$H_{\alpha,\gamma} = \begin{cases} 0, & \text{dacă } \gamma \text{ este impar} \\ (-1)^{\frac{\gamma}{2}} T_{\frac{\alpha}{2}, \frac{\gamma}{2}}, & \text{dacă } \gamma \text{ este par.} \end{cases} \quad (\alpha \text{ par}) \quad (95)$$

Dacă α este impar $H_{\alpha,\gamma}$, $\gamma = 0, 1, \dots, \alpha$ sunt polinoamele simetrice fundamentale ale numerelor $\pm t_i$, $i = 1, 2, \dots, \frac{\alpha-1}{2}$ și $t_{\frac{\alpha+1}{2}}$. Formulele (70), (73) împreună cu (94), (95) ne dau

$$H_{\alpha,\gamma} = \begin{cases} (-1)^{\frac{\gamma-1}{2}} t_{\frac{\alpha+1}{2}} T_{\frac{\alpha-1}{2}, \frac{\gamma-1}{2}}, & \text{dacă } \gamma \text{ este impar} \\ (-1)^{\frac{\gamma}{2}} T_{\frac{\alpha-1}{2}, \frac{\gamma}{2}}, & \text{dacă } \gamma \text{ este par.} \end{cases} \quad (\alpha \text{ impar})$$

Formulele (74) ne arată că avem

$$A_{2\mu,i}(x_0) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } i \text{ este impar} \\ (-1)^{q-\mu} (2\mu)! t_{q-\frac{i}{2}}^2 T_{q-1-\frac{i}{2}, q-\mu-1}, & \text{dacă } i \text{ este par.} \end{cases}$$

Se vede dar că avem

$$(-1)^{q-\mu} A_{2\mu,i}(x_0) \geq 0, \quad i = 0, 1, \dots, 2q$$

și deci că toate condițiile teoremei 14 sunt îndeplinite. Putem dar enunța

Teorema 17. Dacă $r \geq 0$ este un număr întreg, dacă μ este un număr întreg, astfel ca $0 \leq \mu < q$, iar $t_1, t_2, \dots, t_q$, $q \geq 1$ numere pozitive, avem formula de derivare numerică ¹⁾

$$f^{(2\mu+r)}(x_0) = L^{(2\mu+r)}(x_0, \underbrace{x_0, \dots, x_0}_r, x_0 \pm t_1, x_0 \pm t_2, \dots, x_0 \pm t_q; f(x_0) +$$

$$+ (-1)^{q-\mu} (2\mu + r)! T_{q-\mu} D_{2q+r}[f]$$

de gradul de exactitate $2q + r - 1$.

36. *Exemplul 3.* Indicele de derivare m este egal cu 1.

Pentru a examina acest caz, vom presupune că nodurile (2), deci și (6), sunt în ordine nedescrescătoare, deci

$$x'_1 \leq x'_2 \leq \dots \leq x'_{p+1}$$

precum și

$$x_1 < x_2 < \dots < x_s. \quad (96)$$

¹⁾ Pentru simplificarea notațiilor în polinomul de interpolare și în diferența divizată, notăm cu $x_0 \pm t_i$ cele două noduri simetrice $x_0 - t_i$, $x_0 + t_i$.

Condiția $m = 1$ implică $p \geq 1$. Vom presupune $s > 1$, deci că nodurile nu sunt toate confundate. În cazul contrar revenim de altfel la exemplul 1 studiat mai sus, care epuizează atunci problema.

Pentru simplificare, să notăm cu $\varphi(x)$ polinomul $l_p(x)$. Avem deci

$$\varphi(x) = (x - x'_{p+1}) \varphi'(x) \quad (97)$$

și

$$A_{1,0}(x) = (x - x'_{p+1}) \varphi'(x), \quad A_{1,1}(x) = \varphi(x)$$

de unde

$$A_{1,0}(x) A_{1,1}(x) = l(x) \varphi'(x)$$

dacă polinoamele $A_{1,0}(x)$, $A_{1,1}(x)$ sunt construite luând nodurile în ordinea (6).

Condiția ca aceste polinoame să fie de același semn devine deci

$$l(x) \varphi'(x) \geq 0. \quad (98)$$

În mod analog, dacă punem

$$l(x) = (x - x'_1) \psi(x)$$

deci

$$\psi(x) = (x - x'_2)(x - x'_3) \dots (x - x'_{p+1})$$

și dacă formăm polinoamele $A_{1,0}(x)$, $A_{1,1}(x)$ luând nodurile în ordinea inversă $x'_{p+1}, x'_p, \dots, x'_1$, condiția ca aceste polinoame să fie de același semn este ca

$$l(x) \psi'(x) \geq 0. \quad (99)$$

Ipoteza exprimată prin condiția (79) revine aici la faptul că x_0 nu coincide cu un nod care nu este simplu.

Ambele inegalități (98), (99) sunt verificate pentru $x = x_0$, dacă x_0 coincide cu un nod sau dacă x_0 este înafară de cel mai mic interval care conține nodurile. Suntem atunci în cazul exemplului 1 de mai sus.

Dacă avem

$$\varphi'(x) \psi'(x) \leq 0 \quad (100)$$

una din inegalitățile (98), (99) este verificată pentru $x = x_0$. Dacă deci, în acest caz, x_0 nu coincide cu un nod care nu este simplu, formula noastră are gradul de exactitate $p + r$ și restul de formă simplă. Va fi deci destul să examinăm punctul x_0 din intervalul deschis (x_1, x_s) , pentru care inegalitatea (100) nu este verificată. Dacă în plus, în acest caz, gradul de exactitate este $p + r$, vom vedea că restul nu este simplu.

37. Pentru a arăta acest lucru, ne vom baza pe criteriul C și vom demonstra mai întâi

L e m a 5. Dacă $x_0 \in (x_1, x_s)$ și dacă

$$\varphi'(x_0) \psi'(x_0) > 0 \quad (101)$$

putem găsi o funcție convexă $f(x)$ de ordinul $p + r$ în intervalul $[x_1, x_s]$, astfel ca să avem $R[f] = 0$.

Să presupunem condiția (79) îndeplinită.

Pe baza lemei 3, este destul să putem construi două funcții $f_1(x)$, $f_2(x)$ neconcave de ordinul $p + r$, astfel ca inegalitatea (32) să fie verificată. Pentru aceasta, să considerăm funcțiile

$$\varphi_\lambda(x) = \begin{cases} 0, & \text{pentru } x \in [x_1, \lambda] \\ (x - \lambda)^{p+r}, & \text{pentru } x \in [\lambda, x_s] \end{cases} \quad (102)$$

definite pentru $\lambda \in [x_1, x_s]$.

Funcția $\varphi_\lambda(x)$ este neconcavă de ordinul $p + r$ în $[x_1, x_s]$. Dacă privim pe λ ca variabil, $R[\varphi_\lambda]$ este un polinom de gradul $p + r$ în raport cu $x - \lambda$, în orice interval care nu conține pe x_0 și nodurile.

Avem formula

$$R[\varphi_\lambda] = (x_0 - x_s) \varphi'(x_0) \underbrace{[x_0, x_0, \dots, x_0, x'_1, x'_2, \dots, x'_p; \varphi_\lambda]}_{r+1} + \\ + \varphi(x_0) \underbrace{[x_0, x_0, \dots, x_0, x'_1, x'_2, \dots, x'_{p+1}; \varphi_\lambda]}_{r+2}. \quad (103)$$

Dacă presupunem $x_{s-1} < \lambda < x_s$ și $x_s < \lambda$, atunci se vede că $R[\varphi_\lambda]$ este un polinom în $x_s - \lambda$, care se divide cu $(x_s - \lambda)^{p+r-r_s+1}$ și coeficienții acestei puteri a lui $x_s - \lambda$ provin numai din primul termen al membrului al doilea al formulei (103). Avem însă atunci

$$\underbrace{[x_0, x_0, \dots, x_0, x'_1, x'_2, \dots, x'_{p+1}; \varphi_\lambda]}_{r+1} = \\ = \left[\underbrace{x_s, x_s, \dots, x_s}_{r_s}; \frac{(x - \lambda)^{p+r}}{(x - x_0)^{r+1} k_s(x)} \right] = \\ = \frac{1}{(r_s - 1)!} \left[\frac{(x - \lambda)^{p+r}}{(x - x_0)^{r+1} k_s(x)} \right]_{x=x_s}^{(r_s-1)}$$

polinomul $k_s(x)$ fiind dat de $l(x) = (x - x_0)^{r_s} k_s(x)$.

Făcând calculele găsim

$$R[\varphi_\lambda] = (x_s - \lambda)^{p+r-r_s+1} \left[\binom{p+r}{r_s-1} \frac{(x_0 - x_s) \varphi'(x_0)}{(x - x_0)^{r+1} k_s(x_s)} + \dots \right]$$

termenii nescriși fiind divizibili cu $x_s - \lambda$.

De aici se vede că, dacă λ este suficient de aproape de x_s avem $R[\varphi_\lambda] \neq 0$, și mai precis¹⁾

$$\operatorname{sg} R[\varphi_\lambda] = -\operatorname{sg} \varphi'(x_0). \quad (104)$$

¹⁾ Punem $\operatorname{sg} z = -1, 0, 1$, după cum $z < 0, z = 0, z > 0$. Avem relația fundamentală $\operatorname{sg} z_1 z_2 = \operatorname{sg} z_1 \cdot \operatorname{sg} z_2$.

Funcția $\psi_\lambda(x) = \varphi_\lambda(x) - (x - \lambda)^{p+r}$ este de asemenea neconcavă de ordinul $p + r$. Dacă presupunem $\lambda < x_0$, $\lambda \in (x_1, x_2)$ și folosim formula

$$R[\psi_\lambda] = (x_0 - x_1) \varphi'(x_0) \underbrace{[x_0, x_0, \dots, x_0, x'_1, x'_2, \dots, x'_{p+1}; \psi_\lambda]}_{r+1} + \\ + \psi(x_0) \underbrace{[x_0, x_0, \dots, x_0, x'_2, x'_3, \dots, x'_{p+1}; \psi_\lambda]}_{r+2}$$

găsim, ca mai sus, că polinomul $R[\psi_\lambda]$ în $x_1 - \lambda$ este de forma

$$R[\psi_\lambda] = - (x_1 - \lambda)^{p+r-r_1+1} \left[\binom{p+r}{r_1-1} \frac{(x_0 - x_1) \psi'(x_0)}{(x_1 - x_0)^{r+1} k_1(x_1)} + \dots \right]$$

unde polinomul $k_1(x)$ este dat de $l(x) = (x - x_1)^{r_1} k_1(x)$, iar termenii ne-scriși se divid cu $x_1 - \lambda$. De aici se vede că, dacă λ este suficient de aproape de x_1 , avem $R[\psi_\lambda] \neq 0$, și mai precis

$$\text{sg } R[\psi_\lambda] = \text{sg } \psi'(x_0). \quad (105)$$

Formulele (104), (105) au fost deduse pe lângă ipotezele $\varphi'(x_0) \neq 0$, $\psi'(x_0) \neq 0$.

Să considerăm acum funcțiile

$$f_1(x) = \varphi_{\lambda_s}(x), \quad f_2(x) = \psi_{\lambda_s}(x).$$

Atunci, dacă λ_1 este suficient de aproape de x_1 iar λ_s suficient de aproape de x_s , din (101), (104), (105), deducem

$$\text{sg } R[f_1] R[f_2] = - \text{sg } \varphi'(x_0) \psi'(x_0) = -1$$

și inegalitatea (32) este verificată.

Lema 5 este complet demonstrată.

Din cele ce preced rezultă că, dacă $m = 1$ și dacă x_0 nu coincide cu un nod care nu este simplu, formulele de derivare numerică (E) prezintă unul din următoarele 3 aspecte:

1°. Dacă $l'(x_0) = 0$, gradul de exactitate este $p + r + 1$, cu restul de formă simplă.

2°. Dacă $x_0 \in (x_1, x_s)$, $l'(x_0) \neq 0$ și dacă inegalitatea (101) este verificată, gradul de exactitate este $p + r$, însă restul nu este de formă simplă.

3°. Pentru toate celelalte valori ale lui x_0 , gradul de exactitate este $p + r$ și restul de formă simplă.

38. Putem determina cu mai multă precizie poziția punctului x_0 după cele trei cazuri semnalate.

Fie $y_1, y_2, \dots, y_{s-1}$ rădăcinile distincte de noduri, ale derivatei $l'(x)$. Aceste rădăcini sunt separate de nodurile (96) și putem presupune

$$x_j < y_j < x_{j+1}, \quad j = 1, 2, \dots, s-1.$$

Polinomul $\varphi'(x)$ are $s-2$, respectiv $s-1$, rădăcini diferite de noduri după cum $r_s = 1$, respectiv $r_s > 1$. Să notăm aceste rădăcini, în ordinea lor crescătoare, prin $z'_1, z'_2, \dots, z'_{s-1}$, unde z'_{s-1} nu există dacă $r_s = 1$. Avem atunci

$$x_j < z'_j < y_{j+1}, \quad j = 1, 2, \dots, s-2$$

iar dacă $r_s > 1$, aceste inegalități au loc și pentru $j = s-1$.

Din proprietatea binecunoscută a variației rădăcinilor derivatei unui polinom cu toate rădăcinile reale [8], rezultă că

$$y_j < z'_j, \quad j = 1, 2, \dots, s-2 \quad (106)$$

inegalitate care are loc și pentru $j = s-1$, dacă $r_s > 1$.

Să punem acum, prin definiție, $z'_{s-1} = x_s$, dacă $r_s = 1$. Atunci, inegalitatea (106) este adevărată totdeauna și pentru $j = s-1$.

În intervalele dintre noduri, $\varphi'(x)$, deci și $l(x) \varphi'(x)$, schimbă de semn, trecând prin punctele $z'_1, z'_2, \dots$. Dar, din (97) rezultă că

$$l(y_j) \varphi'(y_j) = -\varphi^2(y_j) < 0.$$

Rezultă deci, că inegalitatea (98) este verificată numai în intervalele

$$(-\infty, x_1], [z'_1, x_2], [z'_2, x_3], \dots, [z'_{s-2}, x_{s-1}], [z'_{s-1}, \infty).$$

Să notăm de asemenea cu $z'_1, z'_2, \dots, z'_{s-1}$ rădăcinile, diferite de noduri, ale lui $\psi'(x)$, unde z'_1 nu există dacă $r_1 = 1$. Ca și mai sus, se vede că

$$x_j < z'_j < y_j < x_{j+1}, \quad j = 1, 2, \dots, s-1$$

inegalități care sunt adevărate totdeauna convenind a pune, prin definiție, $z'_1 = x_1$ dacă $r_1 = 1$.

Rezultă atunci, ca și mai sus, că inegalitatea (105) este verificată numai în intervalele

$$(-\infty, z'_1], [x_2, z'_2], [x_3, z'_3], \dots, [x_{s-1}, z'_{s-1}], [x_s, \infty)$$

Din analiza precedentă rezultă în definitiv

Teorema 18. Dacă $r \geq 0$ este un număr întreg, dacă x_0 nu coincide cu un nod care nu este simplu și dacă $m = 1$, formula de derivare numerică (E) este:

1°. Cu gradul de exactitate $p + r + 1$ și cu restul de formă simplă, dacă x_0 coincide cu unul din punctele $y_1, y_2, \dots, y_{s-1}$.

2°. Cu gradul de exactitate $p + r$ și cu restul de formă simplă, dacă x_0 aparține unuia din intervalele

$$(-\infty, z'_1], [z'_{s-1}, \infty), [z'_j, z'_{j+1}], \quad j = 1, 2, \dots, s-2.$$

3°. Cu gradul de exactitate $p + r$, însă cu rest diferit de forma simplă, dacă x_0 aparține unuia din intervalele

$$(z'_j, y_j), (y_j, z'_j), \quad j = 1, 2, \dots, s-1.$$

Restul, în cazurile 1° și 2° respectiv este

$$R = (r+1)! l(x_0) D_{p+r+2}[f], \quad R = (r+1)! l'(x_0) D_{p+r+1}[f].$$

Aceste rezultate au fost găsite, pe altă cale și sub o formă mai puțin generală, de G. D. Birkhoff [1].

39. Din rezultatele precedente se poate trage o concluzie asupra formulei (E) în cazul când $m=2$. În acest caz, dacă $l''(x)=0$ și numerele $A_{1,0}(x_0)$, $A_{1,1}(x_0)$ sunt de același semn, restul formulei este de formă simplă. Pentru realizarea condiției de semn va fi destul să demonstrăm următoarea lema:

Lema 6. Rădăcinile derivatei a doua $l''(x)$ a polinomului $l(x)$ sunt toate cuprinse în intervalele deschise

$$(-\infty, z'_1), (z'_{s-1}, \infty), (z'_j, z''_{j+1}), \quad j=1, 2, \dots, s-2.$$

Demonstrația se face simplu, dacă ne bazăm pe felul cum variază rădăcinile derivatei când rădăcinile polinomului variază [8].

Să demonstrăm, de exemplu, că în intervalul $[y_j, z'_j]$ polinomul $l''(x)$ nu se anulează. Acest lucru este evident dacă $j=s-1$ și $r_s=1$, pentru că atunci y_{s-1} este cea mai mare rădăcină a lui $l'(x)$ și această rădăcină este simplă. În celelalte cazuri observăm că $l''(y_j) \neq 0$ pentru că y_j este rădăcina simplă a lui $l'(x)$, iar din (112) deducem

$$l''(z'_j) = \varphi''(z'_j) (z'_j - x_s) \neq 0$$

pentru că atunci $z'_j \neq x_s$ iar $\varphi''(z'_j) \neq 0$ deoarece z'_j este rădăcină simplă a lui $\varphi'(x)$.

În intervalul deschis (y_j, z'_j) , polinomul $l''(x)$ poate avea cel mult o rădăcină pentru că, altfel, $l'(x)$ ar trebui să aibă o rădăcină în acest interval, ceea ce este imposibil. Să presupunem că ar exista o rădăcină a lui $l''(x)$ în intervalul (y_j, z'_j) . Această rădăcină s'ar menține în intervalul (y_j, z'_j) , în timp ce primele $r_1 + r_2 + \dots + r_j - 1$ noduri și ultimele $r_{j+1} + r_{j+2} + \dots + r_s - 2$ noduri ar varia. Făcând pe primele să tindă către $-\infty$, iar pe ultimele către $+\infty$, vedem că proprietatea ar trebui să fie adevărată în cazul particular

$$p=2, \quad x_1 < x_2 \leq x_3, \quad j=1 \quad (107)$$

pentru că, în timpul acestei variații, y_j, z'_j rămân la distanță finită pe axa reală.

În cazul (107) avem însă $y_1 < z'_1 = \frac{x_1 + x_2}{2}$ și rădăcina $\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$ a lui $l''(x)$ este mai mare decât z'_1 . Proprietatea este demonstrată.

Polinomul $l''(x)$ nu se anulează deci în intervalele $[y_j, z'_j]$ $j=1, 2, \dots, s-1$.

La fel se demonstrează că acest polinom nu se anulează în intervalele

$$[z'_j, y_j], \quad j=1, 2, \dots, s-1.$$

Lema 6 este complet demonstrată.

Deducem prin urmare

Teorema 19. Dacă $r \geq 0$ este un număr întreg, dacă x_0 nu coincide cu un nod care nu este simplu și dacă $m=2$, $l''(x_0) \neq 0$, formula de derivare numerică (E) are gradul de exactitate $p+r+1$ și restul de formă simplă.

Restul formulei este

$$R = (r+2)! \cdot l'(x_0) D_{p+r+2}[f].$$

§ 5. Asupra câtorva formule explicite de derivare numerică

Utilizarea practică a formulelor de derivare numerică (E) depinde în mare măsură de forma explicită sub care se pune derivata respectivă a polinomului de interpolare. Rapiditatea și precizia calculului numeric efectiv depind de această formă explicită. De asemenea, utilizarea eventuală a tabelor numerice și a mașinilor de calcul necesită un studiu amănunțit al acestor forme explicite. Problema aceasta are o foarte vastă literatură. Ne limităm aici să cităm cercetările lui S. E. Michelaдзе [4] și J. F. Stiefensen [10].

Vom examina două feluri de astfel de forme explicite:

1°. Formule de derivare numerică fără diferențe.

2°. Formule de derivare numerică cu diferențe.

În această lucrare ne interesează mai ales să dăm o completare a rezultatelor din §§ precedente. Într-o lucrare următoare vom relua și alte exemple importante.

Formule fără diferențe

40. Formulele de derivare numerică de exactitate maximă se pot clasifica după valorile numerelor $p, m, r, r_1, r_2, \dots, r_s$ care intră în caracteristicile acestei formule, precum și după natura lor particulară, ca de exemplu: gradul de exactitate, reductibilitate, excepționalitate, simetrie. În particular, formulele simetrice prezintă un interes deosebit și studiul acestora a fost reluat în ultimul timp de către S. E. Michelaдзе [4].

Vom presupune totdeauna $m \leq p$.

Făcând abstracție de valorile nodurilor și de ordinea lor de mărime mutuală, unui sistem de valori ale lui p, m, r îi corespund atâtea tipuri de formule în câte feluri putem alege ordinele de multiplicitate $r_1, r_2, \dots, r_s$ cu suma egală cu $p+1$. Acest număr este egal cu numărul Ω_{p+1} al soluțiilor în numere întregi nenegative $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{p+1}$ ale ecuației diophantiene

$$\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + \dots + p\alpha_p + (p+1)\alpha_{p+1} = p+1.$$

Deoarece m ia valorile $0, 1, \dots, p$, numărul formulelor pentru p și r dați va fi $(p+1)\Omega_{p+1}$.

Rezultă că numărul formulelor (E) cu gradul de exactitate $e (\geq 0)$ și neexcepționale (generale) este egal cu

$$\Omega_1 + 2\Omega_2 + 3\Omega_3 + \dots + (e+1)\Omega_{e+1}.$$

Pentru enumerarea formulelor (E) excepționale, este suficient, pe baza rezultatelor dela punctul 10, să considerăm numai acele formule excepționale care provin din mărirea gradului de exactitate cu o unitate¹⁾. Numărul acestor formule pentru p, r dați este $p(\Omega_{p+1}-1)$, deoarece astfel de formule nu pot exista pentru $s=1$ și pentru $m=0$. În schimb, pentru $s>1$ și $m>0$, pe baza inegalităților (24), există astfel de formule. Pentru p, r, m dați (și $s>1$) aceste

¹⁾ Formule prezentând aspectul 1° (punctul 10).

formule nu dispar decât pentru poziții mutuale particulare ale nodurilor. În enumerarea formulelor excepționale nu facem distincție între diferitele rădăcini, distincte de noduri, ale polinomului $l^{(m)}(x)$. Rezultă atunci că numărul formulelor excepționale cu gradul de exactitate e (≥ 2) este

$$\Omega_2 + 2\Omega_3 + 3\Omega_4 + \dots + (e-1)\Omega_e - \frac{e(e-1)}{2}.$$

Pentru enumerarea formulelor simetrice, luăm $p = 2q - 1$, $q > 0$. Am văzut că putem presupune $m = 2\mu$. Pentru q, r, μ dați vor exista Ω_q tipuri de astfel de formule. Pentru q, r dați vom avea deci $q\Omega_q$ astfel de formule. În fine, gradul de exactitate al formulei fiind $2q + r - 1$, numărul formulelor simetrice și cu gradul de exactitate e (≥ 1) este

$$\Omega_1 + 2\Omega_2 + 3\Omega_3 + \dots + \left\lfloor \frac{e+1}{2} \right\rfloor \Omega_{\left\lceil \frac{e+1}{2} \right\rceil}.$$

Dacă e este par, toate aceste formule sunt excepționale. Dacă însă e este impar pentru $r = 0$, formulele nu sunt excepționale. Deci, în acest caz, $\frac{e+1}{2}\Omega_{\frac{e+1}{2}}$ dintre aceste formule sunt neexcepționale.

Pentru enumerarea formulelor reductibile deosebim două cazuri. Unele cu toate nodurile confundate ($r = 0, s = 1$). Pentru un p dat există p astfel de formule, corespunzând valorilor $1, 2, \dots, p$ ale lui m . Gradul lor de exactitate este p ; există, deci, e astfel de formule de grad de exactitate e (≥ 1). Celelalte formule reductibile au două noduri distincte ($r = 0, s = 2$), care pot prezenta $\left\lfloor \frac{p+1}{2} \right\rfloor$ tipuri diferite. Dintre acestea însă, numai la $\left\lfloor \frac{p+1}{2} \right\rfloor - 1$ pot corespunde formule reductibile, pentru că dacă $r_1 = 1, r_2 = p$, polinomul (27) are toate rădăcinile confundate. De asemenea, m nu poate lua decât valorile $2, 3, \dots, p-1$. Pentru un p (≥ 3) dat, avem deci $(p-2)\left(\left\lfloor \frac{p+1}{2} \right\rfloor - 1\right)$ astfel de formule. Aceste formule fiind neexcepționale, există $(e-2)\left(\left\lfloor \frac{e+1}{2} \right\rfloor - 1\right)$ astfel de formule cu gradul de exactitate e (≥ 3).

Tabloul următor rezumă discuția de mai sus relativ la numărul formulelor de exactitate maximă, după natura lor specificată, dela gradul de exactitate 0 până la gradul de exactitate 5 inclusiv.

Ținem seamă de următoarele valori ale numerelor,

$$\Omega_1 = 1, \quad \Omega_2 = 2, \quad \Omega_3 = 3, \quad \Omega_4 = 5, \quad \Omega_5 = 7, \quad \Omega_6 = 11.$$

Gradul de exactitate	Numărul formulelor						
	Reductibile			Neexcepționale $l^{(m)}(x_0) \neq 0$	Excepționale $l^{(m)}(x_0) = 0$	Simetrice	
	$s = 1$	$s = 2$	Total			Neex.	Ex.
0	—	—	—	1	—	—	—
1	1	—	1	5	—	1	—
2	2	—	2	14	1	—	1
3	3	1	4	34	5	4	1
4	4	2	6	69	17	—	5
5	5	6	11	135	41	9	5

41. Pentru a obține formulele de exactitate maximă, putem pleca dela cazul $r = 0, s = p + 1$. Această din urmă condiție este echivalentă cu faptul că toate nodurile sunt simple, adică punctele (6) sunt distincte. Avem atunci

$$L(x'_1, x'_2, \dots, x'_{p+1}; f|x) = \sum_{i=1}^{p+1} \frac{l(x)}{(x-x'_i)l'(x'_i)} f(x'_i), \quad (108)$$

Pentru a exprima coeficienții formulei (E) cu ajutorul abaterilor h_i ale nodurilor de punctul de derivare, introducem, pe lângă notațiile dela punctul 28, și numerele $H_\alpha^{(i)}$, $\alpha = 0, 1, \dots, p$ care sunt polinoamele simetrice fundamentale ale lui $h_1, h_2, \dots, h_{i-1}, h_{i+1}, \dots, h_{p+1}$ ($H_0^{(i)} = 1, H_\alpha^{(i)} = 0$ pentru $\alpha < 0$ și pentru $\alpha > p$). Fie

$$\lambda(x) = (x-h_1)(x-h_2)\dots(x-h_{p+1}).$$

Avem atunci $l(x) = \lambda(x-x_0)$, deci $l'(x'_i) = \lambda'(h_i)$ și formula (73) ne dă

$$l^{(m)}(x_0) = (-1)^{p+1-m} m! H_{p+1-m}^{(i)}$$

precum și

$$\left[\frac{l(x)}{x-x'_i} \right]_{x=x_0}^{(m)} = (-1)^{p-m} m! H_{p-m}^{(i)}, \quad i = 1, 2, \dots, p+1.$$

Ținând seama de formula (108), deducem

$$\frac{(-1)^{p-m}}{m!} f^{(m)}(x_0) = \sum_{i=1}^{p+1} \frac{H_{p-m}^{(i)}}{\lambda'(h_i)} f(x_0 + h_i) + R. \quad (109)$$

Trecerea dela cazul $r = 0$ la cazul $r > 0$ se face utilizând formula (90). Formula (84) ne dă

$$L(x) = L(\underbrace{x_0, x_0, \dots, x_0}_r; f|x) = \sum_{j=0}^{r-1} \frac{(x-x_0)^j}{j!} f^{(j)}(x_0) \quad (110)$$

și din (85) deducem atunci

$$[x_0 + h_i, \underbrace{x_0, x_0, \dots, x_0}_r; f] = \frac{1}{h_i^r} \left[f(x_0 + h_i) - \sum_{j=0}^{r-1} \frac{h_i^j}{j!} f^{(j)}(x_0) \right] \quad (111)$$

aşa că ținând seama de formulele (90) și (109) deducem

$$\frac{(-1)^{p-m}}{(m+r)!} f^{(m+r)}(x_0) = - \sum_{j=0}^{r-1} \left[\sum_{i=1}^{p+1} \frac{H_{p-m}^{(i)}}{h_i^{r-j} \lambda'(h_i)} \right] \cdot \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!} + \\ + \sum_{i=1}^{p+1} \frac{H_{p-m}^{(i)}}{h_i^r \lambda'(h_i)} f(x_0 + h_i) + R. \quad (112)$$

Dacă $H_{p+1-m} \neq 0$, această formulă are gradul de exactitate $p+r$, și dacă restul este de formă simplă, avem

$$R = -H_{p+1-m} D_{p+r+1}[f].$$

Dacă $H_{p+1-m} = 0$, formula devine excepțională și are gradul de exactitate $p+r+1$ și dacă restul este de formă simplă, avem

$$R = H_{p+2-m} D_{p+r+2}[f].$$

Plecând dela formula (111), stabilită în cazul când abaterile h sunt distincte (și diferite de zero), obținem celelalte tipuri de formule de derivare numerică (E) făcând ca, pe grupe convenabile, abaterile să tindă una către alta.

42. Pentru a evalua coeficienții lui $f^{(j)}(x_0)$, $j = 0, 1, \dots, r-1$ în formula (112), putem să ne folosim de formula (86). Referindu-ne la notațiile din formula (10), deducem din (86)

$$\sum_{j=0}^{r-1} c_j f^{(j)}(x_0) = \left[l(x) L \left(\underbrace{x_0, x_0, \dots, x_0}_r; \frac{f(x)}{l(x)} \middle| x \right) \right]_{x=x_0}^{(m+r)}. \quad (113)$$

Ținând seama de (110) avem

$$\left[l(x) L \left(\underbrace{x_0, x_0, \dots, x_0}_r; \frac{f(x)}{l(x)} \middle| x \right) \right]_{x=x_0}^{(m+r)} = \\ = \sum_{j=0}^{r-1} \frac{1}{j!} [l(x) (x - x_0)]_{x=x_0}^{(m+r)} \cdot \left[\frac{f(x)}{l(x)} \right]_{x=x_0}^{(j)}. \quad (114)$$

Însă, pe baza formulelor (69), (73),

$$[l(x) (x - x_0)]_{x=x_0}^{(m+r)} = (-1)^{p+1-m-r+j} (m+r)! H_{p+1-m-r+j}.$$

Din compararea formulelor (113), (114) deducem deci

$$c_{r-1-j} = \frac{(-1)^{p-m-j} (m+r)!}{(r-1-j)!} \sum_{\alpha=0}^j H_{p-m-j+\alpha} \frac{(-1)^\alpha}{\alpha!} \left[\frac{1}{l(x)} \right]_{x=x_0}^{(\alpha)}. \quad (115)$$

Dar, din egalitatea

$$l(x) \frac{1}{l(x)} = 1$$

deducem

$$\left. \begin{aligned} (-1)^{p+1} H_{p+1} \left[\frac{1}{l(x)} \right]_{x=x_0} &= 1 \\ \sum_{\alpha=0}^i H_{p+1-i+\alpha} \frac{(-1)^\alpha}{\alpha!} \left[\frac{1}{l(x)} \right]_{x=x_0}^{(\alpha)} &= 0, \quad i = 1, 2, \dots \end{aligned} \right\} \quad (116)$$

Eliminând pe

$$\frac{(-1)^\alpha}{\alpha!} \left[\frac{1}{l(x)} \right]_{x=x_0}^{(\alpha)}, \quad \alpha = 0, 1, \dots, j$$

din ecuația (115) și din primele $j+1$ ecuații (116), deducem

$$c_{r-1-j} = \frac{(-1)^{m+1} (m+r)!}{(r-1-j)! H_{p+1}^{j+1}} \begin{vmatrix} H_p & H_{p+1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ H_{p-1} & H_p & H_{p+1} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ H_{p+1-j} & H_{p+2-j} & \dots & \dots & \dots & H_{p+1} \\ H_{p-m-j} & H_{p-m-j+1} & \dots & \dots & \dots & H_{p-m} \end{vmatrix} \\ j = 0, 1, \dots, r-1.$$

Comparând această formulă cu (112) deducem în definitiv

$$\sum_{i=1}^{p+1} \frac{H_{p-m}^{(i)}}{h_i^{j+1} \lambda'(h_i)} = \frac{(-1)^p}{H_{p+1}^{j+1}} \begin{vmatrix} H_p & H_{p+1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ H_{p-1} & H_p & H_{p+1} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ H_{p+1-j} & H_{p+2-j} & \dots & \dots & \dots & H_{p+1} \\ H_{p-m-j} & H_{p-m-j+1} & \dots & \dots & \dots & H_{p-m} \end{vmatrix} \quad (117) \\ j = 0, 1, \dots, r-1.$$

43. Să considerăm câteva cazuri particulare

1°. Pentru $r = 0, s = 1$, avem

$$f^{(m)}(x_0) = \sum_{j=0}^{p-m} (-1)^j \frac{h^j}{j!} f^{(m+j)}(x_0 + h) + \\ + (-1)^{p+1-m} \frac{(p+1)!}{(p+1-m)!} h^{p+1-m} D_{p+1}[f]. \quad (118)$$

Aceasta este formula lui Taylor, cu o nouă expresie a restului. Pentru $m > 0$, obținem prima serie de formule reductibile.

2°. Pentru $p = m = 0$, obținem formula

$$\frac{1}{r!} f^{(r)}(x_0) = - \sum_{j=0}^{r-1} \frac{1}{j! h^{r-j}} f^{(j)}(x_0) + \frac{1}{r!} f(x_0 + h) - h D_{r+1}[f]. \quad (119)$$

Această formulă rezultă și din formula lui Taylor (118) (pentru $m = 0$ și cu o schimbare de notație). Pentru $p = m = r = 0$, cele două formule (118), (119) coincid.

3°. Să presupunem că $p = 1$, $m = 0$. Un calcul simplu ne arată că, determinantul din membrul al doilea al formulei (117) este egal cu

$$\frac{h_1^{j+2} - h_2^{j+2}}{h_1 - h_2}$$

și deducem formula

$$\begin{aligned} \frac{1}{r!} f^{(r)}(x_0) = & - \sum_{j=0}^{r-1} \frac{1}{j! (h_1 h_2)^{r-j}} \cdot \frac{h_1^{r-j+1} - h_2^{r-j+1}}{h_1 - h_2} f^{(j)}(x_0) - \\ & - \frac{1}{(h_1 h_2)^r (h_1 - h_2)} [h_2^{r+1} f(x_0 + h_1) - h_1^{r+1} f(x_0 + h_2)] + h_1 h_2 D_{r+2}[f]. \end{aligned} \quad (120)$$

Din aceasta se deduce și formula limită ($h_2 \rightarrow h_1 = h$)

$$\begin{aligned} \frac{1}{r!} f^{(r)}(x_0) = & - \sum_{j=0}^{r-1} \frac{r-j+1}{j! h^{r-j}} f^{(j)}(x_0) + \frac{r+1}{h^r} f(x_0 + h) - \\ & - \frac{1}{h^{r-1}} f'(x_0 + h) + h^2 D_{r+2}[f]. \end{aligned} \quad (121)$$

4°. Pentru $p = m = 1$, determinantul din membrul al doilea al formulei (116) este egal cu

$$\frac{h_1^{j+1} - h_2^{j+1}}{h_1 - h_2}$$

și deducem formula

$$\begin{aligned} \frac{1}{(r+1)!} f^{(r+1)}(x_0) = & \sum_{j=0}^{r-1} \frac{1}{j! (h_1 h_2)^{r-j}} \cdot \frac{h_1^{r-j} - h_2^{r-j}}{h_1 - h_2} f^{(j)}(x_0) + \\ & + \frac{1}{(h_1 h_2)^r (h_1 - h_2)} [h_2^r f(x_0 + h_1) - h_1^r f(x_0 + h_2)] + R. \end{aligned} \quad (122)$$

Această formulă este de gradul de exactitate $r + 1$, dacă $h_1 + h_2 \neq 0$, dar restul în general nu este de formă simplă. Din această formulă deducem și formula limită ($h_2 \rightarrow h_1 = h$)

$$\begin{aligned} \frac{1}{(r+1)!} f^{(r+1)}(x_0) = & \sum_{j=0}^{r-1} \frac{r-j}{j! h^{r-j+1}} f^{(j)}(x_0) - \frac{r}{h^{r+1}} f(x_0 + h) + \\ & + \frac{1}{h^r} f'(x_0 + h) - 2h D_{r+2}[f]. \end{aligned} \quad (123)$$

Dacă $h_1 + h_2 = 0$, formula (122) devine excepțională și se poate scrie sub forma

$$\begin{aligned} \frac{1}{(r+1)!} f^{(r+1)}(x_0) = & - \sum_{j=0}^{\left[\frac{r-1}{2}\right]} \frac{1}{(r-1-2j)!} \cdot \frac{1}{h^{2j+2}} f^{(r-1-2j)}(x_0) + \\ & + \frac{1}{2h^{r+1}} [f(x_0 + h) + (-1)^{r+1} f(x_0 - h)] - h^2 D_{r+3}[f]. \end{aligned} \quad (124)$$

44. Dintre formulele de gradul de exactitate ≤ 5 nu vom scrie explicit decât pe acelea pentru care $s = 1$, deci pentru care nodurile sunt toate confundate, afară bineînțeles de acelea care au și fost semnalate. Restul acestor formule este de formă simplă. Pentru gradele de exactitate 0, 1, 2, 3, 4, 5, există respectiv 1, 3, 6, 10, 15, 21 astfel de formule. Dintre aceste formule 1, 2, 3, 4, 5 respectiv 6 se deduc din formula (118) și câte una din formulele (119), (121), (123). Grupăm cele 0, 0, 0, 3, 7 respectiv 12 formule rămase după gradul lor de exactitate. În paranteză, după formulă, indicăm pe rând valorile corespunzătoare ale numerelor p, r, m . Pentru simplificare, în formulele particulare pe care le scriem, presupunem $x_0 = 0$. Se trece la cazul lui x_0 oarecare, printr-o transformare lineară simplă.

Gradul de exactitate 3:

$$(F1) \quad f'(0) = \frac{3}{h} [f(h) - f(0)] - 2f'(h) + \frac{h}{2} f''(h) - h^3 D_4[f] \quad (2, 1, 0)$$

$$(F2) \quad f''(0) = \frac{6}{h^2} [f(0) - f(h)] + \frac{6}{h} f'(h) - 2f''(h) + 6h^2 D_4[f] \quad (2, 1, 1)$$

$$(F3) \quad f'''(0) = \frac{6}{h^3} [f(h) - f(0)] - \frac{6}{h^2} f'(h) + \frac{3}{h} f''(h) - 18h D_4[f] \quad (2, 1, 2)$$

Gradul de exactitate 4:

$$(F4) \quad f'(0) = \frac{4}{h} [f(h) - f(0)] - 3f'(h) + hf''(h) - \frac{h^2}{6} f'''(h) + h^4 D_5[f] \quad (3, 1, 0)$$

$$(F5) \quad f''(0) = \frac{12}{h^2} [f(0) - f(h)] + \frac{12}{h} f'(h) - 5f''(h) + hf'''(h) - 8h^3 D_5[f] \quad (3, 1, 1)$$

$$(F6) \quad f'''(0) = \frac{24}{h^3} [f(h) - f(0)] - \frac{24}{h^2} f'(h) + \frac{12}{h} f''(h) - 3f'''(h) + 36h^2 D_5[f] \quad (3, 1, 2)$$

$$(F7) \quad f^{IV}(x) = \frac{24}{h^4} [f(0) - f(h)] + \frac{24}{h^3} f'(h) - \frac{12}{h^2} f''(h) + \frac{4}{h} f'''(h) - 96h D_5[f] \quad (3, 1, 3)$$

$$(F8) \quad f''(0) = \frac{12}{h^2} [f(h) - f(0)] - \frac{6}{h} [f'(0) + f'(h)] + f''(h) - 2h^3 D_5[f] \quad (2, 2, 0)$$

$$(F9) \quad f'''(0) = \frac{48}{h^3} [f(0) - f(h)] + \frac{18}{h^2} f'(0) + \frac{80}{h^2} f'(h) - \frac{6}{h} f''(h) + 18 h^2 D_5[f] \quad (2, 2, 1)$$

$$(F10) \quad f^{IV}(0) = \frac{72}{h^4} [f(h) - f(0)] - \frac{24}{h^3} f'(0) - \frac{48}{h^3} f'(h) + \frac{12}{h^2} f''(h) - 72 h D_5[f] \quad (2, 2, 2)$$

Gradul de exactitate 5:

$$(F11) \quad f'(0) = \frac{5}{h} [f(h) - f(0)] - 4 f'(h) + \frac{3}{2} h f''(h) - \frac{1}{3} h^2 f'''(h) + \frac{h^3}{24} f^{IV}(h) - h^5 D_6[f] \quad (4, 1, 0)$$

$$(F12) \quad f''(0) = \frac{20}{h^2} [f(0) - f(h)] + \frac{20}{h} f'(h) - 9 f''(h) + \frac{7}{3} h f'''(h) - \frac{h^2}{3} f^{IV}(h) + 10 h^4 D_6[f] \quad (4, 1, 1)$$

$$(F13) \quad f'''(0) = \frac{60}{h^3} [f(h) - f(0)] - \frac{60}{h^2} f'(h) + \frac{30}{h} f''(h) - 9 f'''(h) + \frac{3}{2} h f^{IV}(h) - 60 h^3 D_6[f] \quad (4, 1, 2)$$

$$(F14) \quad f^{IV}(0) = \frac{120}{h^4} [f(0) - f(h)] + \frac{120}{h^3} f'(h) - \frac{60}{h^2} f''(h) + \frac{20}{h} f'''(h) - 4 f^{IV}(h) + 240 h^2 D_6[f] \quad (4, 1, 3)$$

$$(F15) \quad f^V(0) = \frac{120}{h^5} [f(h) - f(0)] - \frac{120}{h^4} f'(h) + \frac{60}{h^3} f''(h) - \frac{20}{h^2} f'''(h) + \frac{5}{h} f^{IV}(h) - 600 h D_6[f] \quad (4, 1, 4)$$

$$(F16) \quad f''(0) = \frac{20}{h^2} [f(h) - f(0)] - \frac{8}{h} f'(0) - \frac{12}{h} f'(h) + 3 f''(h) - \frac{h}{3} f'''(h) + 2 h^4 D_6[f] \quad (3, 2, 0)$$

$$(F17) \quad f''(0) = \frac{120}{h^3} [f(0) - f(h)] + \frac{36}{h^2} f'(0) + \frac{84}{h^2} f'(h) - \frac{24}{h} f''(h) + 3 f'''(h) - 24 h^3 D_6[f] \quad (3, 2, 1)$$

$$(F18) \quad f^{IV}(0) = \frac{360}{h^4} [f(h) - f(0)] - \frac{96}{h^3} f'(0) - \frac{264}{h^3} f'(h) + \frac{84}{h^2} f''(h) - \frac{12}{h} f'''(h) + 144 h^2 D_6[f] \quad (3, 2, 2)$$

$$(F19) \quad f^V(0) = \frac{480}{h^5} [f(0) - f(h)] + \frac{120}{h^4} f'(0) + \frac{360}{h^4} f'(h) - \frac{120}{h^3} f''(h) + \frac{20}{h^2} f'''(h) - 480 h D_6[f] \quad (3, 2, 3)$$

$$(F20) \quad f'''(0) = \frac{60}{h^3} [f(h) - f(0)] - \frac{36}{h^2} f'(0) - \frac{9}{h} f''(0) - \frac{24}{h^2} f'(h) + \frac{3}{h} f''(h) - 6 h^3 D_6[f] \quad (2, 3, 0)$$

$$(F21) \quad f^{IV}(0) = \frac{360}{h^4} [f(0) - f(h)] + \frac{192}{h^3} f'(0) + \frac{36}{h^2} f''(0) + \frac{168}{h^3} f'(h) - \frac{24}{h^2} f''(h) + 72 h^2 D_6[f] \quad (2, 3, 1)$$

$$(F22) \quad f^V(0) = \frac{720}{h^5} [f(h) - f(0)] - \frac{360}{h^4} f'(0) - \frac{60}{h^3} f''(0) - \frac{360}{h^4} f'(h) + \frac{60}{h^3} f''(h) - 360 h D_6[f] \quad (2, 3, 2)$$

45. Formulele excepționale se obțin impunând abaterilor restricția $H_{p+1-m} = 0$. Vom scrie formulele excepționale de grad de exactitate ≤ 5 , însă numai pe acelea corespunzătoare lui $s = 2$, fără acelea care rezultă din formula (124). În acest caz, cele două abateri distincte h_1, h_2 sunt legate de o relație care permite să le exprimăm sub forma $\alpha h, \beta h$ (α, β fiind două numere fixe). Raportul numerelor α, β nu este totdeauna rațional. Restul acestor formule este de formă simplă când $m = 1, 2$, sau când formula este simetrică. Pentru gradele de exactitate 3, 4, 5 avem respectiv 2, 8, 16 astfel de formule, dintre care la 6 forma simplă a restului nu rezultă din cele ce preced. În paranteză, indicăm valorile lui p, r, m , precum și restricția la care este supus h_1 și h_2 , ordinul de multiplicitate a nodului x_2 fiind cel puțin egal cu al lui x_1 .

Gradul de exactitate 3:

$$(F23) \quad f'(0) = \frac{4}{9h} [f(h) - f(-2h)] - \frac{1}{3} f'(-2h) - 4h^3 D_4[f] \\ (2, 0, 1; 2h_1 + h_2 = 0)$$

$$(F24) \quad f''(0) = \frac{2}{9h^2} [f(-2h) - f(h)] + \frac{2}{3h} f'(h) - 6h^2 D_4[f] \\ (2, 0, 2; h_1 + 2h_2 = 0)$$

Gradul de exactitate 4:

$$(F25) \quad f'(0) = \frac{27}{64h} [f(h) - f(-3h)] - \frac{11}{16} f'(-3h) - \\ - \frac{3h}{8} f''(-3h) - 27h^4 D_5[f] \quad (3, 0, 1; 3h_1 + h_2 = 0)$$

$$(F26) \quad f'(0) = \frac{3}{4h} [f(h) - f(-h)] - \frac{1}{4} [f'(h) + f'(-h)] + h^4 D_5[f] \\ (3, 0, 1; h_1 + h_2 = 0)$$

$$(F27) \quad f''(0) = \frac{3}{4h^2} [f(h) - f(-h)] - \frac{3}{2h} f'(-h) - \frac{1}{2} f''(-h) - 4h^3 D_5[f] \\ (3, 0, 2; h_1 + h_2 = 0)$$

$$(F28) \quad f''(0) = \frac{2\sqrt{3}+3}{3h^2} \{f(h) - f(-[2-\sqrt{3}]h) - (2-\sqrt{3})hf'(h) - \\ - hf'(-[2-\sqrt{3}]h)\} + 4(3\sqrt{3}-5)h^3 D_5[f] \\ (3, 0, 2; h_1^2 + 4h_1 h_2 + h_2^2 = 0)$$

$$(F29) \quad f'''(0) = \frac{3}{32h^3} [f(h) - f(-3h)] - \frac{3}{8h^2} f'(h) + \frac{3}{4h} f''(h) + R \\ (3, 0, 3; h_1 + 3h_2 = 0)$$

$$(F30) \quad f'''(0) = \frac{3}{2h^3} [f(-h) - f(h)] + \frac{3}{2h^2} [f'(h) + f'(-h)] - 12h^2 D_5[f] \\ (3, 0, 3; h_1 + h_2 = 0)$$

$$(F31) \quad f'''(0) = \frac{1}{18h^2} [16f(h) + 11f(-2h) - 27f(0)] + \frac{1}{3h} f'(-2h) - \\ - 8h^3 D_5[f] \quad (2, 1, 1; 2h_1 + h_2 = 0)$$

$$(F32) \quad f'''(0) = \frac{1}{3h^3} [9f(0) - 8f(h) - f(-2h)] + \frac{2}{h^2} f'(h) - 18h^2 D_5[f] \\ (2, 1, 2; h_1 + 2h_2 = 0)$$

Gradul de exactitate 5:

$$(F33) \quad f'(0) = \frac{256}{625h} [f(h) - f(-4h)] - \frac{131}{125} f'(-4h) - \frac{28}{25} hf''(-4h) - \\ - \frac{8}{15} h^2 f'''(-4h) - 256h^5 D_6[f] \quad (4, 0, 1; 4h_1 + h_2 = 0)$$

$$(F34) \quad f'(0) = \frac{216}{625h} [f(2h) - f(-3h)] - \frac{1}{125} [27f'(2h) + 64f'(-3h)] - \\ - \frac{6h}{25} f''(-3h) + 108h^5 D_6[f] \quad (4, 0, 1; 3h_1 + 2h_2 = 0)$$

$$(F35) \quad f''(0) = \frac{108}{625h^2} [f(2h) - f(-3h)] - \frac{108}{125h} f'(-3h) - \frac{29}{25} f''(-3h) - \\ - \frac{3h}{5} f'''(-3h) - 270h^4 D_6[f] \quad (4, 0, 2; 3h_1 + 2h_2 = 0)$$

$$(F36) \quad f''(0) = \frac{9(117+62\sqrt{6})}{625h^2} \left[f(h) - f\left(-\frac{3-\sqrt{6}}{3}h\right) \right] + \\ + \frac{9(54+19\sqrt{6})}{250h} \left[(\sqrt{6}-2)f'(h) + \frac{\sqrt{6}}{3}f'\left(-\frac{3-\sqrt{6}}{3}h\right) \right] + \frac{3\sqrt{6}-2}{25} f''(h) - \\ - \frac{2}{3} (3+4\sqrt{6}) h^4 D_6[f] \quad (4, 0, 2; 3h_1^2 + 6h_1 h_2 + h_2^2 = 0)$$

$$(F37) \quad f'''(0) = \frac{48}{625h^3} [f(3h) - f(-2h)] - \frac{48}{125h^2} f'(-2h) - \frac{24}{25h} f''(-2h) - \\ - \frac{3}{5} f'''(-2h) + R \quad (4, 0, 3; 2h_1 + 3h_2 = 0)$$

$$(F38) \quad f'''(0) = \frac{6(311+129\sqrt{6})}{625h^3} [f(-[3-\sqrt{6}]h) - f(h)] + \\ + \frac{3(81+34\sqrt{6})}{125h^2} f'(-[3-\sqrt{6}]h) + \frac{3(107+48\sqrt{6})}{125h^2} f'(h) - \\ - \frac{3(2+3\sqrt{6})}{25} f''(h) + R \quad (4, 0, 3; h_1^2 + 6h_1 h_2 + 3h_2^2 = 0)$$

$$(F39) \quad f^{IV}(0) = \frac{24}{625h^4} [f(-4h) - f(h)] + \frac{24}{125h^3} f'(h) - \frac{12}{25h^2} f''(h) + \frac{4}{5h} f'''(h) + R \quad (4, 0, 4; h_1 + 4h_2 = 0)$$

$$(F40) \quad f^{IV}(0) + \frac{72}{625h^4} [f(-2h) - f(3h)] + \frac{24}{125h^3} [f'(3h) + 2f'(-2h)] + \frac{12}{25h^2} f''(-2h) + R \quad (4, 0, 4; 2h_1 + 3h_2 = 0)$$

$$(F41) \quad f''(0) = \frac{1}{96h^2} [81f(h) + 47f(-3h) - 128f(0)] + \frac{5}{8h} f'(-3h) + \frac{1}{4} f''(-3h) - 54h^4 D_6[f] \quad (3, 1, 1; 3h_1 + h_2 = 0)$$

$$(F42) \quad f''(0) = \frac{2}{h^2} [f(-h) - 2f(0) + f(h)] + \frac{1}{2h} [f'(-h) - f'(h)] + 2h^4 D_6[f] \quad (3, 1, 1; h_1 + h_2 = 0)$$

$$(F43) \quad f'''(0) = \frac{1}{4h^3} [48f(0) - 9f(-h) - 39f(H)] + \frac{15}{2h} f'(h) - \frac{3}{2} f''(h) + 12h^4 D_6[f] \quad (3, 1, 2; h_1 + h_2 = 0)$$

$$(F44) \quad f'''(0) = \frac{-12(5 + 3\sqrt{3})}{h^3} f(0) + \frac{3(1 + \sqrt{3})}{h^3} f(h) + \frac{3(19 + 11\sqrt{3})}{h^3} f([\sqrt{3} - 2]h) - \frac{\sqrt{3}}{h^2} f'(h) + \frac{12 + 7\sqrt{3}}{h^2} f'([\sqrt{3} - 2]h) + 12(3\sqrt{3} - 5)h^3 D_6[f] \quad (3, 1, 2; h_1^2 + 4h_1 h_2 + h_2^2 = 0)$$

$$(F45) \quad f^{IV}(0) = \frac{1}{8h^4} [f(-3h) + 63f(h) - 64f(0)] - \frac{15}{2h^3} f'(h) + \frac{3}{h^2} f''(h) + R \quad (3, 1, 3; h_1 + 3h_2 = 0)$$

$$(F46) \quad f^{IV}(0) = \frac{12}{h^4} [2f(0) - f(h) - f(-h)] + \frac{6}{h^3} [f'(h) - f'(-h)] - 48h^2 D_6[f] \quad (3, 1, 3; h_1 + h_2 = 0)$$

$$(F47) \quad f'''(0) = \frac{1}{6h^3} [16f(h) - 9f(0) - 7f(-2h)] - \frac{1}{2h^2} [9f'(0) + f'(-2h)] - 24h^3 D_6[f] \quad (2, 2, 1; 2h_1 + h_2 = 0)$$

$$(F48) \quad f^{IV}(0) = \frac{2}{3h^4} [27f(0) + f(-2h) - 28f(h)] + \frac{4}{h^3} [3f'(0) + 2f'(h)] - 72h^2 D_6[f] \quad (2, 2, 2; h_1 + 2h_2 = 0)$$

46. Formulele reductibile din a doua serie (cu $s=2$) se obțin ușor din formulele excepționale deoarece o astfel de formulă este excepțională ca o formulă de derivare numerică a funcției $f'(x)$. O formulă reductibilă cu caracteristicile $p, (r=) 0, m$ se obține din formula excepțională corespunzătoare cu caracteristicile respective $p-2, 0, m-1$. Cele 9 formule reductibile de grad de exactitate ≤ 5 , din această serie, se obțin din formula (124) pentru $r=0$ și din formulele (F23) – (F30). Aceste formule sunt

Gradul de exactitate 3:

$$(F49) \quad f''(0) = \frac{1}{2h} [f'(h) - f'(-h)] - 4h^2 D_4[f] \quad (3, 0, 2)$$

Gradul de exactitate 4:

$$(F50) \quad f''(0) = \frac{4}{9h} [f'(h) - f'(-2h)] - \frac{1}{3} f''(-2h) - 20h^3 D_5[f] \quad (4, 0, 2; 2h_1 + h_2 = 0)$$

$$(F51) \quad f'''(0) = \frac{2}{9h^2} [f'(-2h) - f'(h)] + \frac{2}{3h} f''(h) - 30h^2 D_5[f] \quad (4, 0, 3; h_1 + 2h_2 = 0)$$

Gradul de exactitate 5:

$$(F52) \quad f''(0) = \frac{27}{64h} [f'(h) - f'(-3h)] - \frac{11}{16} f''(-2h) - \frac{3h}{8} f'''(-3h) - 162h^4 D_6[f] \quad (5, 0, 2; 3h_1 + h_2 = 0)$$

$$(F53) \quad f''(0) = \frac{3}{4h} [f'(h) - f'(-h)] - \frac{1}{4} [f''(h) + f''(-h)] + 6h^4 D_6[f] \quad (5, 0, 2; h_1 + h_2 = 0)$$

$$(F54) \quad f'''(0) = \frac{3}{4h^2} [f'(h) - f'(-h)] - \frac{3}{2h} f''(-h) - \frac{1}{2} f'''(-h) - 24h^3 D_6[f] \quad (5, 0, 3; h_1 + h_2 = 0)$$

$$(F55) \quad f'''(0) = \frac{2\sqrt{3} + 3}{3h^2} \{ f'(h) - f'(-[2 - \sqrt{3}]h) - (2 - \sqrt{3})hf''(h) - hf''(-[2 - \sqrt{3}]h) \} + 24(3\sqrt{3} - 5)h^3 D_6[f] \quad (5, 0, 3; h_1^2 + 4h_1 h_2 + h_2^2 = 0)$$

$$(F56) \quad f^{IV}(0) = \frac{3}{32h^3} [f'(h) - f'(-3h)] - \frac{3}{8h^2} f''(h) + \frac{3}{4h} f'''(h) + R$$

$$(5, 0, 4; h_1 + 3h_2 = 0)$$

$$(F57) \quad f^{IV}(0) = \frac{3}{2h^3} [f'(-h) - f'(h)] + \frac{3}{2h^2} [f''(h) + f''(-h)] - 72h^2 D_6[f]$$

$$(5, 0, 4; h_1 + h_2 = 0)$$

Simplicitatea restului, în cazul formulelor (F49), (F53), (F57), rezultă din simetria acestor formule.

Resturile formulelor (F50), (F51), (F52), (F54) și (F55) se pot scrie respectiv

$$-4h^3 D_4[f'], \quad -6h^3 D_4[f'], \quad -27h^4 D_5[f'], \quad -4h^3 D_5[f'],$$

$$4(3\sqrt{3} - 5)h^3 D_5[f'].$$

Dar funcționala ($n \geq 2$)

$$R[f] = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n; f']$$

unde $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ sunt n puncte fixe, nu toate confundate, este de grad de exactitate $n - 1$ și este de formă simplă. Proprietatea relativă la gradul de exactitate rezultă din formula (30). Simplitatea rezultă din faptul că, dacă $f(x)$ este o funcție convexă de ordinul $n - 1$, $f'(x)$ este o funcție convexă de ordinul $n - 2$. Avem în acest caz $R[x^n] = n$, deci

$$[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n; f'] = n D_n[f]$$

intervalul $[a, b]$ fiind cel mai mic interval închis care conține punctele $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$. De aici rezultă formula

$$D_{n-1}[f'] = n D_n[f]$$

a cărei însemnătate este clară și din care am dedus resturile formulelor (F50), (F51), (F52), (F54) și (F55).

47. Formulele (E) simetrice se pot scrie întrebuintând notațiile dela punctul 35, scriind abaterile sub forma $\pm t_i, i = 1, 2, \dots, q$. Dacă notăm cu $T_\alpha^{(i)}$, $\alpha = 0, 1, \dots, q - 1$ polinoamele simetrice fundamentale ale lui $t_1^2, t_2^2, \dots, t_{i-1}^2, t_{i+1}^2, \dots, t_q^2$ ($T_0^{(i)} = 1, T_\alpha^{(i)} = 0$, pentru $\alpha < 0$ și $\alpha > q - 1$) și dacă ținem seama de (94), deducem

$$H_{2q-2\mu-1}^{(2i)} = (-1)^{q-\mu} t_i T_{q-\mu-1}^{(i)}, \quad H_{2q-2\mu-1}^{(2i-1)} = (-1)^{q-\mu-1} t_i T_{q-\mu-1}^{(i)}$$

$$i = 1, 2, \dots, q.$$

Avem și

$$H_\alpha = \begin{cases} 0, & \text{pentru } \alpha \text{ impar} \\ (-1)^{\frac{\alpha}{2}} T_{\frac{\alpha}{2}}, & \text{pentru } \alpha \text{ par.} \end{cases} \quad (125)$$

Să punem

$$\rho(x) = (x - t_1^2)(x - t_2^2) \dots (x - t_q^2)$$

atunci $\lambda(x) = \rho(x^2)$, de unde, ținând seama de (94),

$$\lambda'(h_{2i}) = 2t_i \rho'(t_i^2), \quad \lambda'(h_{2i-1}) = -2t_i \rho'(t_i^2).$$

Făcând calculele, formula (109) devine

$$\frac{(-1)^{q-\mu-1}}{(2\mu)!} f^{2\mu}(x_0) = \sum_{i=1}^q \frac{T_{q-\mu-1}^{(i)}}{2\rho'(t_i^2)} [f(x_0 + t_i) + f(x_0 - t_i)] - T_{q-\mu} D_{2q}[f].$$

Pentru a trece la cazul $r > 0$, ținem seama de formulele (85) și (90). Observăm că

$$[x_0 + t_i, \underbrace{x_0, x_0, \dots, x_0}_r; f] + [x_0 - t_i, \underbrace{x_0, x_0, \dots, x_0}_r; f] =$$

$$= 2[x_0 \pm t_i, \underbrace{x_0, x_0, \dots, x_0}_{r-1}; f]$$

membrul al doilea reducându-se prin definiție la $f(x_0 + t_i) + f(x_0 - t_i)$, când $r = 0$. Deducem deci¹⁾

$$\frac{(-1)^{q-\mu-1}}{(2\mu+r)!} f^{(2\mu+r)}(x_0) = \sum_{i=1}^q \frac{T_{q-\mu-1}^{(i)}}{\rho'(t_i^2)} [x_0 \pm t_i, \underbrace{x_0, x_0, \dots, x_0}_{r-1}; f] -$$

$$- T_{q-\mu} D_{2q+r}[f]. \quad (126)$$

Ținând seama de (111), mai deducem

$$[x_0 \pm t_i, \underbrace{x_0, x_0, \dots, x_0}_{r-1}; f] = \frac{1}{2t_i} [f(x_0 + t_i) + (-1)^r f(x_0 - t_i) -$$

$$- 2 \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{r}{2} \rfloor} \frac{t_i^{r-2j}}{(r-2j)!} f^{(r-2j)}(x_0)].$$

Înlocuind în (126), obținem în definitiv formula

$$\frac{(-1)^{q-\mu-1}}{(2\mu+r)!} f^{(2\mu+r)}(x_0) = - \sum_{i=1}^q \left[\sum_{j=0}^{\lfloor \frac{r}{2} \rfloor} \frac{T_{q-\mu-1}^{(i)}}{t_i^{2j} \rho'(t_i^2)} \right] \frac{f^{(r-2j)}(x_0)}{(r-2j)!} +$$

$$+ \sum_{i=1}^q \frac{T_{q-\mu-1}^{(i)}}{2t_i^r \rho'(t_i^2)} [f(x_0 + t_i) + (-1)^r f(x_0 - t_i)] - T_{q-\mu} D_{2q+r}[f]. \quad (127)$$

¹⁾ Vezi notația prescurtată la ¹⁾, dela pagina 39.

Coeficienții lui $f^{(r-2j)}(x_0)$, $j = 0, 1, \dots, \left[\frac{r}{2}\right]$ în această formulă se pot calcula ca și mai sus, în cazul formulei (112). Făcând calculele și urmărind procedeul de mai sus deducem

$$\sum_{i=1}^q \frac{T_{q-\mu-1}^{(i)}}{t_i^{2j} \rho'(t_i^2)} = \frac{(-1)^{q-1}}{T_q^j} \begin{vmatrix} T_{q-1} & T_q & 0 & 0 & \dots & 0 \\ T_{q-2} & T_{q-1} & T_q & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ T_{q-j+1} & T_{q-j+2} & \dots & \dots & \dots & T_q \\ T_{q-\mu-j} & T_{q-\mu-j+1} & \dots & \dots & \dots & T_{q-\mu-1} \end{vmatrix}$$

$$j = 0, 1, \dots, \left[\frac{r}{2}\right].$$

Acest rezultat se poate deduce și din (117), ținând seama de (125). Formula (127) este valabilă atâta timp cât abaterile $\pm t_i$ sunt distincte. Formulele de celelalte tipuri se obțin făcând ca abaterile t_i , $i = 1, 2, \dots, q$ să tindă, pe grupe, una către alta.

48. Din (120) deducem formula simetrică ($h_1 + h_2 = 0$)

$$\frac{1}{r!} f^{(r)}(x_0) = - \sum_{j=1}^{\left[\frac{r}{2}\right]} \frac{f^{(r-2j)}(x_0)}{(r-2j)! h^{2j}} + \frac{1}{2h^r} [f(x_0+h) + (-1)^r f(x_0-h)] - h^2 D_{r+2}[f].$$

Aceasta, pentru $r = 0, 1, 2, 3, 4$, ne dă formulele simetrice de grad de exactitate 1, 2, 3, 4, 5,

$$(F58) \quad f(0) = \frac{1}{2} [f(h) + f(-h)] - h^2 D_2[f] \quad (1, 0, 0)$$

$$(F59) \quad f'(0) = \frac{1}{2h} [f(h) - f(-h)] - h^2 D_3[f] \quad (1, 1, 0)$$

$$(F60) \quad \frac{1}{2} f''(0) = - \frac{f(0)}{h^2} + \frac{1}{2h^2} [f(h) + f(-h)] - h^2 D_4[f] \quad (1, 2, 0)$$

$$(F61) \quad \frac{1}{6} f'''(0) = - \frac{f'(0)}{h^2} + \frac{1}{2h^3} [f(h) - f(-h)] - h^2 D_5[f] \quad (1, 3, 0)$$

$$(F62) \quad \frac{1}{24} f^{(IV)}(0) = - \frac{f(0)}{h^4} - \frac{f''(0)}{2h^2} + \frac{1}{2h^4} [f(h) + f(-h)] - h^2 D_6[f] \quad (1, 4, 0)$$

Afară de aceasta, mai avem următoarele formule simetrice de grad de exactitate ≤ 5 :

Gradul de exactitate 3:

$$(F63) \quad f(0) = \frac{u^2 [f(t) + f(-t)] - t^2 [f(u) + f(-u)]}{2(u^2 - t^2)} + t^2 u^2 D_4[f] \quad (-3, 0, 0)$$

$$(F64) \quad f(0) = \frac{f(h) + f(-h)}{2} - \frac{h}{4} [f'(h) - f'(-h)] + h^4 D_4[f] \quad (3, 0, 0)$$

$$(F65) \quad f'(0) = \frac{f(t) + f(-t) - f(u) - f(-u)}{t^2 - u^2} - 2(t^2 + u^2) D_4[f] \quad (3, 0, 2).$$

La acestea se mai adaugă formula (F49).

Gradul de exactitate 4:

$$(F66) \quad f'(0) = \frac{u^3 [f(t) - f(-t)] - t^3 [f(u) - f(-u)]}{2ut(u^2 - t^2)} + t^2 u^2 D_5[f] \quad (3, 1, 0).$$

$$(F67) \quad f'''(0) = 3 \frac{u [f(t) - f(-t)] - t [f(u) - f(-u)]}{ut(t^2 - u^2)} - 6(t^2 + u^2) D_5[f]. \quad (3, 1, 2)$$

La acestea se mai adaugă formulele (F26), (F30).

Gradul de exactitate 5:

$$(F68) \quad f(0) = \frac{\Sigma u^2 v^2 (v^2 - u^2) [f(t) + f(-t)]}{(v^2 - u^2)(v^2 - t^2)(u^2 - t^2)} - t^2 u^2 v^2 D_6[f] \quad (5, 0, 0)$$

$$(F69) \quad f(0) = \frac{u^2 (u^2 - 2t^2) [f(t) + f(-t)] + t^4 [f(u) + f(-u)]}{2(u^2 - t^2)^2} - \frac{u^2 t}{4(u^2 - t^2)} [f'(t) - f'(-t)] - t^4 u^2 D_6[f] \quad (5, 0, 0)$$

$$(F70) \quad f(0) = \frac{f(h) + f(-h)}{2} - \frac{5h}{16} [f'(h) - f'(-h)] + \frac{h^2}{16} [f''(h) + f''(-h)] - h^6 D_6[f] \quad (5, 0, 0)$$

$$(F71) \quad f''(0) = \frac{\Sigma (u^4 - v^4) [f(t) + f(-t)]}{(v^2 - u^2)(v^2 - t^2)(u^2 - t^2)} + 2(\Sigma t^2 u^2) D_6[f] \quad ((5, 0, 2)$$

$$(F72) \quad f''(0) = \frac{2t^2}{(u^2 - t^2)^2} [f(t) + f(-t) - f(u) - f(-u)] + \frac{u^2 + t^2}{2t(u^2 - t^2)} [f'(t) - f'(-t)] + 2t^2(t^2 + 2u^2) D_6[f] \quad (5, 0, 2)$$

$$(F73) \quad f^{(IV)}(0) = \frac{12 \Sigma (v^2 - u^2) [f(t) + f(-t)]}{(v^2 - u^2)(v^2 - t^2)(u^2 - t^2)} - 24(\Sigma t^2) D_6[f] \quad (5, 0, 4)$$

$$(F74) \quad f^{(IV)}(0) = \frac{12}{(u^2 - t^2)^2} [f(u) + f(-u) - f(t) - f(-t)] - \frac{6}{t(u^2 - t^2)} [f'(t) - f'(-t)] - 24(2t^2 + u^2) D_6[f] \quad (5, 0, 4)$$

$$(F75) \quad f''(0) = -2 \frac{u^2 + t^2}{u^2 t^2} f(0) + \frac{u^4 [f(t) + f(-t)] - t^4 [f(u) + f(-u)]}{t^2 u^2 (u^2 - t^2)} + 2t^2 u^2 D_6[f] \quad (3, 2, 0)$$

$$(F76) \quad f^{IV}(0) = \frac{24}{u^2 t^2} f(0) - 12 \frac{u^2 [f(t) + f(-t)] - t^2 [f(u) + f(-u)]}{t^2 u^2 (u^2 - t^2)} - 24 (t^2 + u^2) D_6[f] \quad (3, 2, 2)$$

La acestea se mai adaugă formulele (F42), (F46), (F53) și (F57). Abaterile $h, t, u, v, \dots$ care într-o formulă se presupun diferite între ele și diferite de zero. Sumația din formulele (F68), (F71) și (F73) se referă la permutările circulare ale literelor t, u, v . Pentru simplificarea scrierii, am presupus și aici $x_0 = 0$.

Formule cu diferențe

49. Vom indica, pe scurt, modul cum se obțin aceste formule, fără a ne preocupa acum de forma restului. Dacă folosim notațiile precedente, formula lui Newton

$$L(x'_1, x'_2, \dots, x'_{p+1}; f|x) = \sum_{i=0}^p (x-x'_1)(x-x'_2)\dots(x-x'_i)[x'_1, x'_2, \dots, x'_{i+1}; f]$$

ne dă

$$L^{(m)}(x'_1, x'_2, \dots, x'_{p+1}; f|x_0) = m! \sum_{i=m}^p (-1)^{i-m} H_{i,i-m}[h_1, h_2, \dots, h_{i+1}; f(x_0 + x)]$$

pentru că, ținând seama de (72), avem¹⁾

$$[x'_1, x'_2, \dots, x'_{i+1}; f(x)] = [h_1, h_2, \dots, h_{i+1}; f(x_0 + x)].$$

Deducem următoarea formulă de derivare numerică

$$f^{(m)}(x_0) = m! \sum_{i=m}^p (-1)^{i-m} H_{i,i-m}[h_1, h_2, \dots, h_{i+1}; f(x_0 + x)] + R. \quad (128)$$

Dacă ne folosim de formula (24), deducem

$$L(x'_1, x'_2, \dots, x'_p; f|x) = L(x_0, x_1, x'_2, \dots, x'_p; f|x) + (x'_{p+1} - x_0)(x - x'_1)(x - x'_2)\dots(x - x'_p)[x_0, x'_1, x'_2, \dots, x'_{p+1}; f]$$

de unde obținem formula de derivare numerică

$$f^{(m)}(x_0) = m! \sum_{j=m-1}^{p-1} (-1)^{i-m+1} H_{i,i-m+1}[0, h_1, h_2, \dots, h_{i+1}; f(x_0 + x)] + m! h_{p+1} H_{p,p-m}[0, h_1, h_2, \dots, h_{p+1}; f(x_0 + x)] + R. \quad (129)$$

¹⁾ Pentru mai multă claritate, punem în evidență și variabila x în notația diferenței divizate (și a polinomului de interpolare).

50. Să vedem cum trecem la cazul $r > 0$. Din formula generală¹⁾

$$L(x'_1, x'_2, \dots, x'_{p+1}; fg|x) = \sum_{i=0}^p L(x'_1, x'_2, \dots, x'_{p+1}; l_i(x)g(x)|x)[x'_1, x'_2, \dots, x'_{i+1}; f] \quad (130)$$

dacă x_0 este diferit de noduri, deducem

$$L\left(x'_1, x'_2, \dots, x'_{p+1}; \frac{f(x)}{(x-x_0)^r} \middle| x\right) = \sum_{i=0}^p L\left(x'_1, x'_2, \dots, x'_{p+1}; \frac{l_i(x)}{(x-x_0)^r} \middle| x\right)[x'_1, x'_2, \dots, x'_{i+1}; f].$$

Ținând seama de formulele (86) și (113), obținem

$$L^{(m+r)}(\underbrace{x_0, x_0, \dots, x_0}_r, x'_1, x'_2, \dots, x'_{p+1}; f|x_0) = \sum_{j=0}^{r-1} c_j f^{(j)}(x_0) + \frac{(m+r)!}{m!} \sum_{i=0}^p I_i^{(r)}[h_1, h_2, \dots, h_{p+1}; f(x_0 + x)]$$

unde coeficienții $I_i^{(r)}$ sunt dați de formula

$$I_i^{(r)} = L^{(m)}\left(x'_1, x'_2, \dots, x'_{p+1}; \frac{l_i(x)}{(x-x_0)^r} \middle| x_0\right), \quad i = 0, 1, \dots, p.$$

Din formula (130) se mai deduce

$$L(x_0, x'_1, x'_2, \dots, x'_{p+1}; fg|x) = L(x_0, x'_1, x'_2, \dots, x'_{p+1}; g|x)f(x_0) + (x-x_0) \sum_{i=0}^p L(x'_1, x'_2, \dots, x'_{p+1}; l_i(x)g(x)|x)[x_0, x'_1, x'_2, \dots, x'_{i+1}; f].$$

Inlocuind aici funcția $g(x)$ cu $(x-x_0)g(x)$, deducem²⁾

$$L(x'_1, x'_2, \dots, x'_{p+1}; fg|x) = L(x'_1, x'_2, \dots, x'_{p+1}; g|x)f(x_0) + \sum_{i=0}^p L(x'_1, x'_2, \dots, x'_{p+1}; l_i(x)(x-x_0)g(x)|x)[x_0, x'_1, x'_2, \dots, x'_{i+1}; f].$$

Avem prin urmare și formula

$$L\left(x'_1, x'_2, \dots, x'_{p+1}; \frac{f(x)}{(x-x_0)^r} \middle| x\right) = L\left(x'_1, x'_2, \dots, x'_{p+1}; \frac{1}{(x-x_0)^r} \middle| x\right)f(x_0) + \sum_{i=0}^p L\left(x'_1, x'_2, \dots, x'_{p+1}; \frac{l_i(x)}{(x-x_0)^{r-1}} \middle| x\right)[x_0, x'_1, x'_2, \dots, x'_{i+1}; f].$$

¹⁾ Egalitatea rezultă din faptul că cele două polinoame de gradul p , din membrul întâiu și al doilea, coincid în nodurile x'_i .

²⁾ Se poate proceda ca la formula (130).

Deducem de aici că, dacă $r > 0$ și dacă x_0 este diferit de noduri,

$$L^{(m+r)}(x_0, x_0, \dots, x_0, x'_1, x'_2, \dots, x'_{p+1}; f | x_0) = \sum_{j=0}^{r-1} c_j f^{(j)}(x_0) + \\ + \frac{(m+r)!}{m!} \left\{ I_0^{(r)} f(x_0) + \sum_{i=0}^p I_i^{(r-1)} [0, h_1, h_2, \dots, h_{i+1}; f(x_0 + x)] \right\}.$$

În definitiv avem următoarele formule de derivare numerică

$$f^{(m+r)}(x_0) = \sum_{j=0}^{r-1} c_j f^{(j)}(x_0) + \\ + \frac{(m+r)!}{m!} \sum_{i=0}^p I_i^{(r)} [h_1, h_2, \dots, h_{i+1}; f(x_0 + x)] + R \quad (131)$$

$$f^{(m+r)}(x_0) = \sum_{j=0}^{r-1} c_j f^{(j)}(x_0) + \\ + \frac{(m+r)!}{m!} \left\{ I_0^{(r)} f(x_0) + \sum_{i=0}^p I_i^{(r-1)} [0, h_1, h_2, \dots, h_{i+1}; f(x_0 + x)] + R \right\} \quad (132)$$

Coefficienții $I_i^{(r)}$ se pot calcula cu ajutorul formulei de recurență

$$I_i^{(r)} = I_{i+1}^{(r+1)} + h_{i+1} I_i^{(r+1)} (I_{p+1}^{(r)} = 0)$$

dând lui r , în mod succesiv, valorile $-1, 0, 1, 2, \dots$ și observând că

$$I_0^{(0)} = I_1^{(0)} = \dots = I_{m-1}^{(0)} = 0, I_i^{(0)} = m! (-1)^{i-m} H_{i, i-m} \\ i = m, m+1, \dots, p.$$

Coefficienții c_j , $j = 0, 1, \dots, r-1$ au fost calculați mai sus.

51. Formula (131) este comodă, în particular, dacă nodurile sunt echidistante, iar formula (132), dacă nodurile și punctul de derivare formează un sistem echidistant.

Pentru a exemplifica cele spuse, vom considera un caz particular.

Să presupunem că $r = 0$, $m = 1$, că nodurile sunt echidistante și simetrice față de x . Folosind notațiile (94), punând

$$t_i = (2i-1)h, \quad i = 1, 2, \dots, q \quad (133)$$

și observând că

$$H_{i, i-1} = h_1 h_2 \dots h_i \left(\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \dots + \frac{1}{h_i} \right)$$

deducem

$$H_{i, i-1} = \begin{cases} 0, & \text{pentru } i \text{ par} \\ (-1)^{\frac{i-1}{2}} 1^2 \cdot 3^2 \dots (i-2)^2 h^{i-1}, & \text{pentru } i \text{ impar} \end{cases} \quad (134) \\ (H_{1,0} = 1)$$

Formula (128) devine

$$f'(x_0) = \sum_{i=1}^q H_{2i-1, 2i-2} [h_1, h_2, \dots, h_{2i}; f(x_0 + x)] + R.$$

Introducând notația obișnuită a diferențelor și ținând seama de (94), (133), deducem

$$[h_1, h_2, \dots, h_{2i}; f(x_0 + x)] = \frac{\Delta_{2h}^{2i-1} f(x_0 - [2i-1]h)}{(2i-1)! (2h)^{2i-1}}, \quad i = 1, 2, \dots, q.$$

Dacă folosim și relațiile (134), avem în definitiv formula de derivare numerică

$$f'(x_0) = \sum_{i=1}^q \frac{(-1)^{i-1} (2i-2)!}{(2i-1)! [(i-1)!]^2 2^{4i-3} h} \Delta_{2h}^{2i-1} f(x_0 - [2i-1]h) + \\ + 1^2 \cdot 3^2 \dots (2q-1)^2 h^{2q} D_{2q+1}[f].$$

Să presupunem că nodurile sunt simetrice față de x_0 și că împreună cu acest punct formează un sistem de puncte echidistante. Atunci putem utiliza formula (129).

În loc de (133) luăm

$$t_i = ih, \quad i = 1, 2, \dots, q.$$

Avem atunci

$$H_{i,i} = \begin{cases} (-1)^{\frac{i+1}{2}} \left[\left(\frac{i-1}{2} \right)! \right]^2 \frac{i+1}{2} h^i, & \text{pentru } i \text{ impar} \\ (-1)^{\frac{i}{2}} \left[\left(\frac{i}{2} \right)! \right]^2 h^i, & \text{pentru } i \text{ par} \end{cases}$$

și

$$[0, h_1, h_2, \dots, h_{i+1}; f] = \begin{cases} \frac{\Delta_h^{i+1} f \left(x_0 - \frac{i+1}{2} h \right)}{(i+1)! h^{i+1}}, & \text{pentru } i \text{ impar} \\ \frac{\Delta_h^{i+1} f \left(x_0 - \frac{i+2}{2} h \right)}{(i+1)! h^{i+1}}, & \text{pentru } i \text{ par} \end{cases}$$

și deducem formula de derivare numerică

$$f'(x_0) = \sum_{i=0}^{q-1} \frac{(-1)^i (i!)^2}{(2i+1)! 2h} \left[2\Delta_h^{2i+1} f(x_0 - [i+1]h) + \right. \\ \left. + \Delta_h^{2i+2} f(x_0 - [i+1]h) \right] + (q!)^2 D_{2q+1}[f].$$

Secția de Științe Matematice a Filialei
Academiei R.P.R., Cluj

ОТНОСИТЕЛЬНО ОСТАТКА В НЕСКОЛЬКИХ ФОРМУЛАХ ЧИСЛОВОЙ ДЕРИВАЦИИ (I)

НЕСКОЛЬКО СВОЙСТВ ФОРМУЛ ЧИСЛОВОЙ ДЕРИВАЦИИ МАКСИМАЛЬНОЙ
ТОЧНОСТИ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

Формула числовой деривации есть формула вида (1) и служит для вычисления приближенного значения производной порядка $m+r$ функции $f(x)$ в точке x_0 . Приближенное значение $f^{(m+r)}(x_0)$ равно сумме (без R) второго члена формулы (1), и R есть *остаток* числовой деривации. Узлы (2) и точки деривации x_0 суть различны и имеют соответственно порядки множественности $r, r_1, r_2, \dots, r_s$. Сумма $r_1 + r_2 + \dots + r_s = p+1$ есть общее число узлов.

Сумма максимальных рядов дериваций, эффективно вступающих во второй член, увеличенная числом s различных узлов и еще с 1, когда $r > 0$, есть порядок формулы (1). Остаток $R=R[f]$ есть аддитивный и гомогенный функционал относительно функции $f(x)$. Степень точности формулы (1) или функционала $R[f]$ равна наименьшему целому n , такому, чтобы $R[f]$ был нулевым для любого многочлена n степени и отличен от нуля по меньшей мере для одного многочлена степени $n+1$, следовательно такому, чтобы формула (1) была точна без остатка для любого многочлена n степени, но не для всех многочленов $n+1$ степени. Важной формулой (1) является формула (E), которая получается подстановкой на место функции $f(x)$ ее многочлена интерполяции Лагранжа-Гермита, соответствующего узлам (2) и точке x_0 , повторенной r раз. В настоящей работе особо изучается формула (E). Подчеркивается переход от случая $r=0$ к случаю $r>0$, что в общем не представляет затруднений.

В § 1 доказывается, что среди всех формул (1), полученных изменением коэффициентов $a_j, a_{i,j}$ этой формулы, формула (E) обладает самой большой степенью точности (теорема 2). Поэтому будем называть формулу (E) формулой *максимальной точности*. В общем степень точности формулы (E) равна $p+r$ и ее порядок равен $p+r+1$. Степень точности равна порядку и эти два числа равны $p+r$ или $p+r+1$, тогда и только тогда, если x_0 есть корень, отличный от узла одного из многочленов (16), где $l(x)$ есть многочлен (3) имеющий в качестве корней узлы (теорема 3). Будем говорить, что формула (E) есть *исключительная*, если ее порядок равен ее степени точности. Хотя, по меньшей мере по внешнему виду, исключительность представляет три различных вида, в зависимости от увеличения степени точности на единицу или уменьшения порядка на единицу, доказывают (№№ 10, 11), что эти три вида возвращаются друг к другу. Все доказательства даны без использования коэффициентов формулы интерполяции (10). Когда узлы (2) и числа m, r даны, существует конечное число точек x_0 , для которых формула (E) становится исключительной. Определяется это число (теорема 4) и по-

казывается (теорема 5), что в общем существуют исключительные формулы. Формула (E) называется *сократимой*, когда она зависит отчетливо лишь от производных функции $f(x)$. §1 заканчивается определением сократимых формул (теорема 6).

В § 2 приводятся несколько соображений относительно остатка. Аддитивный и гомогенный функционал $R[f]$, порядка точности n , будем называть *простой формой*, когда имеются (31) с $M \neq 0$, независимым от функции $f(x)$, где $\xi_i, i=1, 2, \dots, n+2$, являются $n+2$ различными точками интервала (открытого) определения функции $f(x)$. Функция $f(x)$ полагается непрерывной в этом интервале (закрытом). Для того чтобы остаток был простой формы, необходимо и достаточно (критерий C), чтобы имелось $R[f] \neq 0$ для любой выпуклой функции $f(x)$ порядка n . Изучаются некоторые свойства функционалов (34) простой формы и задача решается полностью для случая, когда степень точности есть $-1, 0$ или 1 (теорема 9, 10 и 11). Функционал (34), степень точности которого есть r , может быть простой формы лишь тогда, когда он четко содержит производные порядка $>n+1$ функции $f(x)$ (теорема 8).

В §§ 3 и 4 изучаются несколько случаев, когда можно утверждать, что остаток формулы (E) простой формы. Если $R[f]$, порядка точности $p+(x=0)$, принимает вид линейной комбинации разделенных разностей

$$(x=x_0), \underbrace{[x, x, \dots, x]_{i+1}}, x'_1, x'_2, \dots, x'_{p+i-1}; f], i=0, 1, \dots, m,$$

где $x'_1, x'_2, \dots, x'_{p+1}$

суть узлы (2), записанные каждый со своей соответствующей множественностью, тогда этот остаток есть простой формы, если коэффициенты $A_{m,i}(x_0), i=0, 1, \dots, m$, данные формулой (74) одинакового знака (теорема 14). Имеется аналогичное свойство, когда формула есть исключительная, степени точности $p+r+1$ (теорема 15). В частности находят в более общей форме, что остаток простой формы, когда x_0 находится вне наименьшего открытого интервала, содержащего узлы (теорема 16). Доказывается, и это является главным результатом настоящей работы, что остаток будет простой формы, когда в (E) узлы симметрично распределены относительно точки x_0 (теорема 17). Этот результат окончательно решает проблему остатка, в частности, в случае формул (E), происшедших от формул интерполяции с центральными разностями. Далее находят вновь, другим путем и в более общей форме, полное обсуждение остатка формулы (E) в случае $m=1$ (теорема 18). Наконец доказывают, что исключительные формулы для $m=2$ [$l''(x_0)=0$] имеют остаток простой формы.

В § 5 точно приведены формулы (E). Показывается как можно получить эти выражения, и выявляются, помимо нескольких общих простых формул, все сократимые, исключительные и симметричные формулы, степень точности которых ≤ 5 .

SUR LE RESTE DANS QUELQUES FORMULES DE DÉRIVATION NUMÉRIQUE (1)

QUELQUES PROPRIÉTÉS DES FORMULES DE DÉRIVATION NUMÉRIQUE D'EXACTITÉ MAXIMUM

(RÉSUMÉ)

Une formule de dérivation numérique est une formule de la forme (1) et sert à calculer une valeur approximative de la dérivée d'ordre $m+r$ de la fonction $f(x)$ au point x_0 . La valeur approximative de $f^{(m+r)}(x_0)$ est égale à la somme (sans R) du second membre de la formule (1) et R est le reste de cette formule de dérivation numérique. Les noeuds (2) et le point de dérivation x_0 sont distincts et ont respectivement les ordres de multiplicité $r, r_1, r_2, \dots, r_s$. La somme $r_1 + r_2 + \dots + r_s = p + 1$ est le nombre total des noeuds. La somme des ordres maxima de dérivation qui interviennent effectivement dans le second membre, augmentée du nombre s des noeuds distincts et de 1 si $r > 0$, est l'ordre de la formule (1). Le reste $R = R[f]$ est une fonctionnelle additive et homogène par rapport à la fonction $f(x)$. Le degré d'exactitude de la formule (1), ou de la fonctionnelle $R[f]$, est égal au plus petit entier n , tel que $R[f]$, soit nul pour tout polynôme du degré n et différent de zéro pour au moins un polynôme du degré $n+1$, donc tel que la formule (1) soit exacte, sans reste, pour tout polynôme du degré n , mais non pas pour tous les polynômes du degré $n+1$. Une formule importante (1) est la formule (E) obtenue en remplaçant la fonction $f(x)$ par son polynôme d'interpolation de Lagrange-Hermite, correspondant aux noeuds (2) et au point x_0 , répété r fois. On s'occupe spécialement, dans ce travail, de la formule (E). On insiste partout sur le passage du cas $r=0$ au cas $r>0$, ce qui se fait assez facilement en général.

Dans le § 1, on démontre que, parmi toutes les formules (1), obtenues en faisant varier les coefficients $a_i, a_{i,j}$, de cette formule, la formule (E) a le plus grand degré d'exactitude (théorème 2).

La formule (E) sera donc appelée: formule d'exactitude maximum. En général, le degré d'exactitude de la formule (E) est égal à $p+r$ et son ordre, à $p+r+1$. Le degré d'exactitude est égal à l'ordre, et ces deux nombres sont égaux à $p+r$ ou $p+r+1$ si, et seulement si, x_0 est une racine, différente d'un noeud, de l'un des polynômes (16), où $l(x)$ est le polynôme (3) ayant les noeuds pour racines (théorème 3). La formule (E) est dite *exceptionnelle*, si son ordre est égal à son degré d'exactitude. Quoique, en apparence du moins, l'exceptionnalité présente trois aspects différents, suivant que le degré d'exactitude augmente d'une unité, ou que l'ordre diminue d'une unité, on démontre (Nos 10, 11) que ces trois aspects reviennent l'un à l'autre. Toutes les démonstrations sont faites sans utiliser les coefficients de la formule d'interpolation (10). Quand les noeuds (2) et les nombres m, r sont donnés, il existe un nombre fini de points x_0 , pour lesquels la formule (E) devient exceptionnelle. On détermine ce nombre (théorème 4) et on montre (théorème 5), qu'il existe en général, des formules exceptionnelles. Une formule (E) est dite *réductible* si elle ne dépend explicitement que des dérivées de la fonction $f(x)$. La détermination des formules réductibles (théorème 6) termine le § 1.

Dans le § 2, on fait quelques considérations sur le reste. Une fonctionnelle additive et homogène $R[f]$, de degré d'exactitude n , est dite de *forme simple* si l'on a (31) où $M \neq 0$ est indépendant de la fonction $f(x)$, les ξ_i , $i = 1, 2, \dots, n+2$, étant $n+2$ points distincts de l'intervalle (ouvert) de définition de la fonction $f(x)$. La fonction $f(x)$ est supposée continue dans cet intervalle (fermé). Pour que le reste soit de forme simple, il faut, et il suffit, (critère C) que l'on ait $R[f] \neq 0$ pour toute fonction $f(x)$ convexe, d'ordre n . On étudie quelques propriétés des fonctionnelles (34) de forme simple et on résout complètement le problème, dans le cas où le degré d'exactitude est $-1, 0$ ou 1 (théorèmes 9, 10 et 11). La fonctionnelle (34), dont le degré d'exactitude est n , ne peut être de forme simple que si elle ne contient pas explicitement, les dérivées d'ordre $> n+1$ de la fonction $f(x)$ (théorème 8).

Dans les §§ 3 et 4, on étudie quelques cas, pour lesquels on peut affirmer que le reste de la formule (E) est de forme simple. Si $R[f]$, de degré d'exactitude $p+r \leq 0$ est mis sous la forme d'une combinaison linéaire des différences divisées ($x = x_0$)

$$\underbrace{[x, x, \dots, x, x'_1, x'_2, \dots, x'_{p+1-i}; f]}_{i+1}, \quad i = 0, 1, \dots, m$$

où $x'_1, x'_2, \dots, x'_{p+1}$ sont les noeuds (2), écrit chacun avec sa multiplicité respective, alors ce reste est de forme simple si les coefficients $A_{m,i}(x_0)$, $i=0, 1, \dots, m$, donnés par les formules (74), sont du même signe (théorème 14). On a une propriété analogue, si la formule est exceptionnelle du degré d'exactitude $p+r+1$ (théorème 15). En particulier, on trouve, sous une forme plus générale que le reste est de forme simple si x_0 est en dehors du plus petit intervalle ouvert qui contient les noeuds (théorème 16). On démontre également, et c'est le principal résultat de ce travail, que le reste est de forme simple, si dans (E) les noeuds sont symétriquement distribués par rapport au point x_0 (théorème 17). Ce résultat résout complètement le problème du reste, en particulier, dans le cas des formules (E), provenant des formules d'interpolation avec des différences centrales. Par une autre voie et sous une forme plus générale, on retrouve en suite, la discussion complète du reste de la formule (E), dans le cas $m=1$ (théorème 18). On démontre enfin que les formules exceptionnelles pour $m=2$ [$l''(x_0)=0$] ont un reste de forme simple.

Dans le § 5, on donne une forme explicite aux formules (E). On montre comment on peut obtenir ces expressions et on met en évidence, outre quelques formules générales simples, toutes les formules réductibles, exceptionnelles et symétriques dont le degré d'exactitude est ≤ 5 .

BIBLIOGRAFIE

1. Birkhoff G. D., *General mean value and remainder theorems*. Transac. Amer. Math. Soc., 1906, 7, 107—136.
2. Hermite Ch., *Sur la formule d'interpolation de Lagrange*. Journ. für Math., 1877, 84, 70—75.
3. Markoff A. A., *Differenzenrechnung*, 1896.

4. Micheladze S. E., *Cislennoe integrirovanie*. Uspehi Mat. Nauk, 1948, III, 6 (28), 3—88.
 5. Norlund N. E., *Differenzenrechnung*. 1924.
 6. Popoviciu T., *Introduction à la théorie des différences divisées*, Bull. Math. Soc. Roum. Sc. 1940, 42, 65—78.
 7. — *Notes sur les fonctions convexes d'ordre supérieur (XX)*. Ibid. 1942, 43, 85—141.
 8. — *Sur certaines inégalités entre les zéros, supposés tous réels, d'un polynôme et ceux de sa dérivée*. Annales Sc. de l'Univ. Jassy, 1948, XXX, 191—218.
 9. — *Asupra restului în unele formule de aproximație ale analizei*. Lucrările Sesiunii Generale Științifice a Academiei R.P.R., 1950, p. 183—186.
 10. Steffensen J. F. *Interpolation*, 1927.
 11. Zemplén Gy., *Etude sur l'interpolation et la décomposition des fonctions rationnelles en fractions partielles*. Archiv der Mathematik und Physik, 1905, (3) 8, 214—226.
-