LES POLYNOMES DE S. N. BERNSTEIN ET LE PROBLÈME DE L'INTERPOLATION 1954

TIBERIU POPOVICIU

1. Les problèmes d'interpolation les plus simples reviennent à substituer à la fonction $f(x)$, définie dans l'intervalle fermé $[a, b]$, la fonction

$$F(x; f) = \sum_{i=0}^{n} \varphi_i(x) f(x_i), \tag{1}$$

où les points (les noeuds) distincts $x_i \in [a, b]$ et les fonctions $\varphi_i(x)$, définies dans $[a, b]$ sont indépendants de la fonction $f(x)$.

On peut poser le problème de la détermination et de l'étude des procédés (1), qui non seulement restent non-négatifs pour tout $f(x)$, non-négatif, mais qui en outre conservent aussi certaines propriétés relatives à l'allure de la fonction $f(x)$. Par ex., qui conservent la monotonie, la convexité, etc., de la fonction $f(x)$.

2. Si la fonction (1), non seulement reste non-négative pour tout $f(x)$ non-négatif, dans tout l'intervalle $[a, b]$, mais conserve dans $[a, b]$ aussi toute propriété de convexité de tout ordre de la fonction $f(x)$, les $\varphi_i(x)$ sont des polynomes du degré $\leqq n$ et, plus exactement, $F(x; f)$ est un polynome du degré $\leqq k$ pour tout polynome $f(x)$ du degré k, pour $k = 0, 1, \ldots$ En outre il faut et il suffit que les inégalités

$$\sum_{i=0}^{n} (|x_i - \lambda| + x_i - \lambda)^s \varphi_i^{(s+1)}(x) \geqq 0, \text{ pour } x \in [a, b], s = 0, 1, \ldots$$

soient vérifiées [3].

Remarquons encore que si $\{F_n(x; f)\}$ est une suite infinie de fonctions de la forme (1), qui jouissent de la propriété de conservation de l'allure précisée plus haut, et si cette suite tend dans $[a, b]$ vers $f(x)$, pour $f(x) = 1, x, x^2$, alors la suite converge absolument et uniformément vers $f(x)$ dans $[a, b]$, lorsque $f(x)$ est continue dans cet intervalle.

3. Le procédé le plus simple de la forme (1) est constitué par les polynomes de S. N. Bernstein [1]

$$B_n(x; f) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} f\left(\frac{i}{n}\right) x^i (1-x)^{n-i} \quad ([a, b] = [0, 1]) \tag{2}$$

J'ai démontré autrefois [2], que ces polynomes conservent toute propriété de convexité de la fonction $f(x)$. Mais il y a des propriétés plus complètes. La formule qui donne la dérivée du polynome (2),

$$B'_n(x; f) = n \sum_{i=0}^{n-1} \Delta_{\frac{1}{n}} f\left(\frac{i}{n}\right) \binom{n-1}{i} x^i (1-x)^{n-1-i}$$

nous montre que si $f(x)$ est formé par m morceaux monotones (est monotone par segments), le polynome (2) jouit de la même propriété. En général, s étant un nombre naturel ou 0, la dérivée d'ordre $s+1$,

$$B_n^{(s+1)}(x;f) = n(n-1)\dots(n-s)\sum_{i=0}^{n-s-1} \Delta_{\frac{n}{1}}^{s+1} f\left(\frac{i}{n}\right)\binom{n-s-1}{i} x^i(1-x)^{n-s-1-i}$$

nous montre que si $f(x)$ est formé par m morceaux de fonctions non-concaves ou non-convexes d'ordre s, le polynome (2) est formé par au plus $(m-1)(s+2)+1$ morceaux analogues.

A l'aide des propriétés des fonctions d'ordre n par segments [3] on peut encore compléter ces propriétés.

4. Les procédés d'interpolation qui conservent les propriétés de convexité et, en général certaines allures de la fonction $f(x)$, ont aussi un intérêt pratique. Il est important que dans la représentation graphique d'une fonction provenant d'un problème pratique, les points discrets, obtenus par observations, puissent servir à représenter approximativement la variation du phénomène étudié par une courbe ayant une allure théoriquement prévue.

Bibliographie

[1] S. N. Bernstein, Comm. Charkow, (2) 13, 1—2 (1912) ou Sobranie Socinenie, I, 105.

[2] T. Popoviciu, Mathematica, 10, 45—53 (1934). 49–54

[3] T. Popoviciu, Bull. Acad. Roumaine, XXIV, 409—416 (1942).

Filiala Academiei R.P.R., Str. Pavlov 27 Cluj.,
R.P.R. (Roumanie).