

SOCIETATEA DE ȘTIINȚE MATEMATICE ȘI FIZICE DIN R.P.R.

ADRESELE AUTORILOR

GEORGE CĂLUGĂREANU — Str. Caragiale 10, Cluj, R.P.R.
Z. CHARZYŃSKI — Uniwersitet Łódźki, Ul. Sanocka 34 m, 96, Łódź, Polonia
J. FAVARD — Rue de Belgrade 10, Grenoble, Isère, France
IOAN FILIMON — Calea Moșilor 135, București, R.P.R.
ARAM FRENKIAN — Str. Boteanu 3 a, București, R.P.R.
JEAN KARAMATA — Université de Genève, Genève, Elveția
ANDOR KERTÉSZ — Mathematisches Institut der Universität, Debrecen 10, Ungaria
MARIANA NEDELCU — Institutul de Matematică, Str. M. Eminescu 47, București, R.P.R.
MIRON NICOLESCU — Str. Paris 14, București, R.P.R.
FRANTIŠEK NOŽIČKA — Ke Karlovu 3, Praha 2, Cehoslovacia
NICOLAE TEODORESCU — Institutul de Matematică, Str. M. Eminescu 47, București, R.P.R.
PETRE TEODORESCU — Str. Popa Soare 38, București, R.P.R.

BULETINUL MATEMATIC

AL SOCIETĂȚII DE ȘTIINȚE MATEMATICE ȘI FIZICE DIN R.P.R.

Serie nouă

TOMUL 1 (49), nr. 4, 1957



BULETINUL MATEMATIC

AL. SOC. ȘT. MAT. FIZ. DIN R.P.R.

Tomul 1 (49), nr. 4, 1957

1. Redacția revistei „*Buletinul Matematic*” oferă revista sa în schimbul periodicelor de matematică din țară și străinătate. A se adresa Redacției: **Societatea de Științe Matematice și fizice din R.P.R.** Redacția „*Buletinul Matematic*”, București, Str. Academiei Nr. 14

2. Revista „*Buletinul Matematic*” va publica recenzii asupra cărților de matematică apărute, pentru care autorii sau editurile vor trimite un exemplar redacției pe adresa: **Societatea de Științe Matematice și fizice din R.P.R.** Redacția „*Buletinul Matematic*”, București,

Str. Academiei Nr. 14

S U M A R

	Pag.
P. CONSTANTINESCU, Asupra sintezei multipolilor cu contacte de relee. Multipoli (1—K)	377
OCT. EM. GHEORGHIU, Despre funcțiile de mai multe variabile hipercomplexe monogene în sensul lui V. S. Feodorov și M. Nicolescu	393
A. HALANAY, ST. SANDOR, Teoreme de tip Sturm pentru sistemele auto-adjuncte de ecuații diferențiale liniare de ordin superior	401
S. MARCUS, Asupra unei teoreme a lui F. B. Jones. Asupra unei teoreme a lui S. Kurepa	435
T. MIHĂILESCU, Curbura exterioară a hipersuprafețelor neolome	437
G. MIHOC, Funcții de estimare eficiente pentru șirurile de variabile dependente	451
F. OBREANU, Cîteva probleme asupra compactificării	459
O. ONICESCU, Asupra mecanicii punctului material	463
G. PIC, Despre cuasicentrul unui grup	467
TIB. POPOVICIU, Unele aspecte ale problemei preciziei în calculele numerice ..	473
D. D. STANCU, Asupra unei clase de polinoame ortogonale și unor formule generale de cuadratură cu număr minim de termeni	479



EDITURA TEHNICĂ

București 1957

UNELE ASPECTE ALE PROBLEMEI PRECIZIEI ÎN CALCULELE NUMERICE

DE

TIBERIU POPOVICIU (Cluj)

(Comunicare făcută la Congresul matematicienilor români, București, mai-iunie 1956)

1. Din imboldul necesităților practice, analiza numerică a luat o mare dezvoltare în ultimele decenii. Problemele analizei numerice sînt foarte variate, dar toate se pot caracteriza prin aceea că prin ele se urmărește obținerea rezultatelor pînă la ultimele calcule numerice.

În cele ce urmează vom trece în revistă, foarte rezumativ, cîteva aspecte cu totul particulare ale unor probleme de analiză numerică, de altfel de mare importanță teoretică și practică, aspecte care intră în cadrul preocupărilor Secției de matematică a Filialei din Cluj a Academiei R. P. Romîne.

2. În multe probleme de analiză numerică se cere să se obțină un număr care depinde de o funcție f , deci se cere valoarea unei funcționale $A[f]$ de argument f . Pentru fixarea ideilor și pentru simplificare vom presupune deocamdată că f este o funcție reală de o variabilă reală. Funcționala $A[f]$ poate avea diferite structuri. Cazurile cele mai simple le întîlnim în calculul valorii funcției f sau a derivatei sale de un ordin oarecare pe un punct dat, precum și în calculul integralei lui f într-un interval dat etc. Aceste din urmă cazuri particulare se întîlnesc frecvent, de exemplu la diferite metode de integrare numerică a ecuațiilor diferențiale sau a altor ecuații funcționale.

Din cauza prea marelui complicații sau a insuficienței cunoașterii a funcției f , în general, nu putem obține exact numărul $A[f]$. Trebuie atunci să ne mulțumim cu o aproximație a acestui număr. Ceea ce face ca asemenea probleme de calcul aproximativ să fie importante este că în practică o aproximație convenabilă a numărului $A[f]$ este totdeauna suficientă.

Există diferite procedee care permit să obținem o valoare aproximativă pentru $A[f]$. Un procedeu destul de general se poate schematiza prin egalitatea aproximativă

$$A[f] \approx B[f], \quad (1)$$

deci se poate lua ca o aproximație pentru $A[f]$ valoarea $B[f]$ a unei alte funcționale date, considerată «mai simplă» decît $A[f]$, în sensul că efectiv calculul numărului $B[f]$ se poate executa pînă la capăt și în anumite condiții impuse dinainte.

Un procedeu general pentru obținerea unei aproximații pentru funcționala $A[f]$ constă în a înlocui funcția f printr-o funcție de aproximare φ a sa,

$$f \approx \varphi. \quad (2)$$

Se poate lua atunci numărul $A[\varphi]$ ca o aproximație pentru $A[f]$, deci

$$A[f] \approx A[\varphi]. \quad (3)$$

De altfel egalitatea (3) este de forma (1) dacă funcția de aproximare φ depinde univoc de funcția f , deci dacă φ este valoarea unui operator

$$\varphi(x) = \Phi[f|x] \quad (4)$$

de argument f . Putem lua atunci

$$B[f] = A[\Phi[f|x]]. \quad (5)$$

În cele ce urmează ne vom ocupa numai de astfel de formule de aproximare.

3. În utilizarea practică a unei aproximații de forma (1) este deosebit de important să se aprecieze eroarea care se comite prin această aproximare. În căutarea unei astfel de aprecieri o delimitare convenabilă a restului

$$R = R[f] = A[f] - B[f] \quad (6)$$

a formulei (1) este de mare importanță. În sfârșit, pentru a obține o astfel de delimitare un studiu aprofundat al structurii restului $R[f]$ este foarte util.

Dacă, de exemplu, $R[f]$ este o funcțională liniară (aditivă și omogenă), în anumite condiții destul de generale se poate exprima $R[f]$ cu ajutorul unei integrale (integrala lui Stieltjes dacă sîntem în condițiile teoremei lui F. Riesz). O astfel de exprimare a restului nu este suficientă, deoarece în delimitările practice ale restului intervin proprietăți ca acele care se referă la *gradul de exactitate* al formulei de aproximare (sau al restului ei). Gradul de exactitate (față de un polinom) a unei funcționale liniare $R[f]$ se definește ca fiind cel mai mare număr întreg n (dacă există), astfel ca $R[f] = 0$, pentru orice polinom f de gradul n . În acest caz restul se poate exprima printr-o funcțională liniară de derivată a $(n+1)$ -a a lui f , dacă bineînțeles anumite condiții de existență a acestor expresii subzistă. Diverse expresii de acest tip au fost studiate de mulți autori, mai cu seamă pentru restul formulelor de derivare și de cuadratură numerică.

4. În cazul unei funcționale liniare $R[f]$, teoria funcțiilor convexe de ordin superior ne permite să găsim o formă remarcabilă a lui $R[f]$. Dacă $R[f]$ este de gradul de exactitate n și dacă f este o funcție continuă într-un interval, avem

$$R[f] = \alpha[\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+2}; f] + \beta[\xi'_1, \xi'_2, \dots, \xi'_{n+2}; f]. \quad (7)$$

În această relație, valabilă în condiții foarte generale, unde α, β sînt constante independente de funcția f , am întrebuințat simbolul cunoscut al diferențelor divizate, iar $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+2}$ și $\xi'_1, \xi'_2, \dots, \xi'_{n+2}$ sînt grupuri de câte $n+2$ puncte distincte care depind în general de funcția f , [5].

Este deosebit de interesant cazul cînd unul din numerele α, β se poate lua egal cu zero. Acest caz are loc dacă și numai dacă avem $R[f] \neq 0$ pentru orice funcție (continuu și) convexă de ordinul n .

Forma (7) a restului precizează mult structura lui, legîndu-l de proprietățile diferențiale ale funcției f . Legătura dintre diferențele divizate și dintre proprietă-

țile diferențiale ale unei funcții este asigurată de o serie de proprietăți, așa-zise *de medie*, dintre care cele mai simple sînt cunoscute deja de la Cauchy [1] iar altele au fost stabilite mai recent [7].

5. Nu insistăm mai pe larg asupra structurii restului $R[f]$; vom face numai cîteva observații.

a) Structura (7) a restului $R[f]$, despre care presupunem că este o funcțională liniară, se poate studia într-un cadru mai general cu ajutorul unei convenabile extinderi a noțiunii de grad de exactitate. Această generalizare constă în a presupune că $R[f]$ se anulează pe învelitoarea liniară a unui sistem format dintr-un număr finit de funcții liniar independente. Bineînțeles se întrebuintează generalizarea corespunzătoare a noțiunii de diferență divizată. Pe lângă această condiție restul a fost deja obținut sub formă de integrală de către J. Radon [10].

b) Pînă în prezent nu se cunoaște nimic analog pentru cazul cînd $R[f]$ nu mai este o funcțională liniară. Asemenea funcționale ca resturi par a fi totuși importante. De exemplu metoda de integrare numerică a lui Runge-Kutta a ecuațiilor diferențiale revine tocmai la un procedeu de aproximare de tipul general semnalat, în care însă $R[f]$ nu este o funcțională liniară. În acest caz f este o funcție de două sau mai multe variabile independente. Faptul că restul în metoda lui Runge-Kutta a fost puțin studiat pînă acum se datorește structurii sale complicate.

Se pare că problema structurii restului $R[f]$, în cazul cînd $R[f]$ nu mai este o funcțională liniară de f , este în legătură cu generalizările noțiunii de convexitate față de un sistem interpolator de funcții. În această din urmă direcție trebuie să amintim lucrările lui M. I. Morozov [4], L. Tornheim [11], E. Moldovan [3].

c) În exemplul citat al metodei lui Runge-Kutta restul depinde de o funcție de mai multe variabile. Restul formulelor de aproximare de forma (1) sau (3), în care f este o funcție de mai multe variabile reale, a fost mult mai puțin studiat pînă acum. Bineînțeles, se cunosc numeroase rezultate cu privire la restul formulelor de derivare și de cuadratură (cubatură) numerică. La noi în țară, în această direcție, trebuie să amintim rezultatele lui D. V. Ionescu [2]. Dar chiar în cazul cînd $R[f]$ este o funcțională liniară, o formulă analoagă cu (7) nu a fost încă studiată în general. Facem, bineînțeles, abstracție de cazurile simple cînd rezultatele se obțin plecînd de la cazul unei singure variabile și procedînd apoi prin suprapunere succesivă a variabilelor.

6. Pentru a obține o aproximație a numărului $A[f]$ trebuie să calculăm efectiv numărul $B[f]$. Să presupunem că acest număr este dat de formula (5) prin intermediul funcției de aproximare (4) a lui f . Pentru calculul efectiv al lui $B[f]$ trebuie efectuate un număr oarecare de operații care constau în general dintr-un număr finit de operații aritmetice elementare (adunare, scădere, înmulțire și împărțire).

Pentru executarea calculelor, indiferent dacă ele se fac direct, cu ajutorul unor instrumente de calcul sau cu mașina, se urmează totdeauna un program care, în particular, precizează ordinea în care sînt executate diferitele operații.

La efectuarea fiecărei operații (elementare) și în special la înmulțiri și împărțiri, se comit în general erori din cauză că în practică folosim numai anumite numere, așa-zisele numere practice care se exprimă de obicei prin fracții zecimale limitate sau chiar limitate la un anumit număr de cifre zecimale. În felul acesta în cursul efectuării calculului lui $B[f]$ se acumulează mai multe erori de calcul care vor

afecta rezultatul final urmărit. Aproximația astfel calculată a lui $B[f]$ va fi în definitiv aproximația efectiv obținută a numărului $A[f]$.

7. În practica calculului numeric, stabilirea, în fiecare caz, a unui program de calcul anumit joacă un mare rol. Din punct de vedere teoretic asemenea programe se vor putea studia, cel puțin în cazurile concrete cele mai simple, cu ajutorul diferitelor expresii care reprezintă pe $B[f]$.

Pentru a vedea întrucâtva varietatea mare de probleme care se pun în legătură cu aceste considerații vom expune un caz concret simplu.

Să presupunem că (4) este polinomul de interpolare al lui Lagrange

$$\varphi(x) = L(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}; f|x), \quad (8)$$

relativ la funcția f și pe nodurile de interpolare (distincte) $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$, deci este polinomul de gradul n care coincide cu funcția f pe nodurile x_i .

Să presupunem apoi că este vorba de problema interpolării cu ajutorul polinomului (8) al lui Lagrange, deci de calculul valorii $f(x_0)$ a funcției f pe punctul x_0 (presupus diferit de noduri), cunoscând valorile funcției pe nodurile de interpolare. Sintem deci în cazul cînd $A[f] = f(x_0)$ și

$$B[f] = L(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}; f|x_0). \quad (9)$$

Calculul valorii (9) pe punctul x_0 a polinomului (8) se poate face în diferite feluri, după diferitele programe de calcul care pot fi indicate și studiate prin expresiile explicite ale polinomului lui Lagrange.

8. Fie formula

$$L(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}; f|x_0) = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{\prod_{j=1}^{n+1} (x_0 - x_j)}{\prod_{j=1}^{n+1} (x_i - x_j)} f(x_i), \quad (10)$$

unde indicele i la simbolul $\prod^{(i)}$ arată că valoarea i a lui j este exclusă. Prin formula (10) se poate indica, de exemplu, că trebuie efectuată o sumă de $n+1$ termeni în prealabil calculați. Fiecare termen al sumei se calculează în general prin $2n-1$ înmulțiri și o împărțire. Este de observat că profitînd de rezultatele parțiale, numărul înmulțirilor se poate reduce. Astfel pentru obținerea produselor

$$\prod_{j=1}^{n+1} (x_0 - x_j) \quad (i = 1, 2, \dots, n+1), \quad (11)$$

nu este nevoie de $(n+1)(n-1) = n^2 - 1$ înmulțiri, ci, în general, numai de $3n - 3$ înmulțiri. O asemenea reducere a numărului unor operațiuni de efectuat prezintă un mare interes în practică, bineînțeles în legătură și cu alte condiții pe care, în general, un program de calcul trebuie să le îndeplinească.

O altă observație, care se poate face relativ la calculul precedent, este că în obținerea fiecărui termen înmulțirea prin $f(x_i)$ poate să fie ulterioară sau anterioară operației de împărțire, care trebuie în general efectuată pentru găsirea acestui termen.

Primul mod de a proceda, care constă în a calcula, în prealabil, coeficienții lui $f(x_i)$, ($i = 1, 2, \dots, n+1$) din formula (10) este avantajos dacă trebuie să aplicăm formula (10) la mai multe funcții cu aceleași noduri x_i și același punct x_0 .

Al doilea procedeu, care constă în lăsarea la urmă a efectuării împărțirii în calculul termenilor (eventual numai a unora dintre termenii) sumei (10), poate prezenta avantaje în cazul unor date particulare simple, permițînd să se profite de anumite simplificări în cursul calculului, ca de exemplu de simplificări de fracții ordinare etc. și care nu sînt avantajoase în cazul primului mod de a organiza calculele. Trebuie să subliniem însă că asemenea simplificări nu pot fi prevăzute teoretic și nu intră în general în cadrul preocupărilor teoretice ale calculului numeric.

9. Se cunosc avantajele pe care le prezintă, în problema interpolării prin polinoame, formula lui Newton

$$L(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}; f|x_0) = \sum_{i=0}^n (x_0 - x_1)(x_0 - x_2) \dots (x_0 - x_i) [x_1, x_2, \dots, x_{i+1}; f] \quad (12)$$

(primul termen fiind $f(x_0)$), unde $[x_1, x_2, \dots, x_{i+1}; f]$ este diferența divizată a funcției f pe nodurile $x_1, x_2, \dots, x_{i+1}$. Programul de calcul pe care-l indică de obicei formula (12) constă în obținerea succesivă a numerelor $y_1, y_2, \dots, y_n$, unde

$$\left. \begin{aligned} y_i &= [x_1, x_2, \dots, x_{n-i+1}; f] + (x_0 - x_{n-i+1}) y_{i-1} \quad (i = 1, 2, \dots, n), \\ y_0 &= [x_1, x_2, \dots, x_{n-i+1}; f], \quad y_n = L(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}; f|x_0), \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

care comportă în general n înmulțiri, deci mai puține (pentru n suficient de mare) decît programul indicat pentru formula (10). Nu trebuie însă să uităm că aici au fost calculate în prealabil diferențele divizate $[x_1, x_2, \dots, x_{i+1}; f]$, ($i = 1, 2, \dots, n$). Calculul acestor diferențe divizate, de exemplu prin formarea tabloului diferențelor divizate, comportă în general erori de natura celor semnalate din cauza împărțirilor cu diferențe de noduri care intervin. Este cazul atunci, așa cum am făcut cu altă ocazie [9], să se examineze influența erorilor de calcul, comise la formarea tabloului diferențelor divizate, asupra programului de calcul indicat pentru formula (12).

10. În încheiere și relativ la programul de calcul semnalat pentru formula (12) mai putem face următoarele observații.

a) Căutînd să reducem la minimum erorile de calcul care se acumulează prin acest program, găsim o justificare a întrebuintării diferitelor formule particulare de interpolare, după poziția punctului x_0 printre noduri. În felul acesta și pe această cale se justifică, după cum am arătat altă dată [6], aplicarea în practică a formulei lui Newton cu diferențe ascendente sau descendente, a formulelor lui Euler, Stirling, Bessel, etc., după cum punctul x_0 este în apropierea extremităților, în apropierea centrului etc., a tabloului diferențelor (nodurile sînt presupuse echidistante și aranjate în ordine crescătoare sau descrescătoare).

b) În cazul nodurilor echidistante, în loc de diferențe divizate se întrebuintează diferențe obișnuite a căror formare nu comportă împărțiri. Se poate dar admite în general că tabloul diferențelor nu comportă erori de calcul. Am arătat într-o altă lucrare [8] că pentru programul (13) modificat în acest sens se poate preciza o delimitare a erorilor de calcul acumulate, întocmind și tablouri suficiente în practică pentru găsirea rapidă a unor astfel de delimitări.

BIBLIOGRAFIE

1. A. Cauchy, *Sur les fonctions interpolaires*, C. R. de l'Acad. Sci. Paris **11** (1840), 775.
2. D. V. Ionescu, *Formule de cubatură în care domeniul de integrare este un triunghi oarecare*, Stud. și Cerc. Științ., Filiala Cluj, VI (1955), 7.
3. E. Moldovan, *O generalizare a noțiunii de convexitate*, Stud. și Cerc. Științ. Filiala Cluj VI (1955), 65.
4. М. И. Морозов, *О некоторых вопросах равномерного приближения непрерывных функций посредством функций интерполяционных классов*, Изв. АН СССР **16** (1952), 75.
5. T. Popoviciu, *Asupra formei restului în unele formule de aproximare ale analizei*, *Lucrările Sesiunii generale științifice din 2—12 iunie 1950*, Ed. Acad. R.P.R., București 1951, p. 183.
6. — *Considerații teoretice asupra utilizării practice a unor formule de interpolare*, *Bul. științ. Acad. R.P.R., Secț. Șt. Mat. Fiz.*, XII, 2 (1951), 441.
7. — *Folytonos függvények középértékleteiről*, *A Magyar Tud. Akad. II Oszt. Közl.* IV (1954), 353.
8. — *Despre precizia calculului numeric în interpolarea prin polinomul lui Newton pe noduri echidistante*, Stud. și Cerc. Științ. Filiala Cluj VI (1956), 20.
9. — *Despre precizia calculului numeric în interpolarea prin polinoame*, *Bul. Științ. Acad. R.P.R., Secț. Șt. Mat. Fiz.*, VII, 4 (1955), 953.
10. J. Radon, *Restausdrücke bei Interpolation und Quadraturformeln durch bestimmte Integralen*, *Monatshefte für Math. u. Physik* **42** (1935), 389.
11. L. Tornheim, *On n -parameter Families of Functions and Associated Convex Functions*, *Trans. Amer. Math. Soc.* **69** (1950), 457.