

SUR LE RESTE DANS CERTAINES FORMULES LINÉAIRES D'APPROXIMATION DE L'ANALYSE

par

TIBERIU POPOVICIU

à Cluj

Beaucoup de formules d'approximation de l'analyse sont de la forme

$$(*) \quad A[f] \approx B[f], \quad \text{ou} \quad A[f] = B[f] + R[f]$$

où $A[f]$, $B[f]$ sont des fonctionnelles linéaires définies sur un espace vectoriel de fonctions réelles et continues d'une variable réelle et dont le *reste* $R[f] = A[f] - B[f]$ s'annule sur $n + 1$ fonctions données f_i , $i = 0, 1, \dots, n$. Le reste $R[f]$ est aussi une fonctionnelle linéaire et s'annule sur toute combinaison linéaire des fonctions f_i .

Nous ne considérons que des fonctionnelles réelles et par une fonctionnelle linéaire nous entendons une fonctionnelle additive et homogène.

Les formules habituelles d'interpolation (polynomiale ou trigonométrique), de dérivation et d'intégration numérique etc., sont de la forme précédente.

Dans les applications il est important de pouvoir délimiter convenablement le reste. Pour cela, tout au moins dans des cas particuliers bien déterminés, on a cherché à mettre ce reste sous diverses formes convenables. On a obtenu $R[f]$, par ex., sous la forme d'une combinaison linéaire donnée d'une ou de plusieurs valeurs, d'une ou de plusieurs des dérivées de certains ordres de la fonction f . On a aussi exprimé le reste à l'aide de certaines intégrales définies. Il suffit de citer la formule de Taylor, donnant une approximation de la valeur de la fonction f pour une valeur donnée de x et dont le reste est donné par la formule bien connue de Lagrange ou bien par une représentation intégrale bien connue [4].

On a fait de nombreuses recherches sur le reste. Nous nous contentons de citer A. A. MARKOV [6], G. D. BIRKHOFF [1], G. KOWALEWSKI [5], R. V. MISES [7] J. RADON [21], E. Ya. REMEZ [22], A. SARD [23].

Dans ce travail nous allons mettre en évidence une autre expression du reste, qui est plus générale, en ce sens qu'en général elle ne nécessite pas l'existence des dérivées, autres que celles qui interviennent effectivement dans la formule (*). La forme nouvelle que nous donnons au reste fait mieux ressortir sa structure. Nous obtenons ce résultat à l'aide de la théorie des fonctions convexes que nous avons envisagé autrefois [12, 13]. Sous une certaine hypothèse particulière faite sur les fonctions f_i , cas qui tout de même englobe un vaste champ d'applications, l'expression que nous trouvons pour le reste est intimement liée à des formules de la moyenne. Nous allons faire quelques considérations sur ces formules et nous retrouverons ainsi une partie des résultats de D. V. WIDDER [28]. Dans ce cas il est facile de déduire le reste exprimé par des combinaisons linéaires de dérivées si, bien entendu, ces dérivées existent.

Nous avons déjà obtenu [16] certains de ces résultats dans le cas particulier où les fonctions f_i se réduisent aux puissances successives x_i , $i = 0, 1, \dots, n$ de x , donc dans le cas où le reste s'annule pour tout polynôme du degré n . Dans ce cas nous avons aussi donné des applications pour certaines formules de dérivation [17] et d'intégration [19] numérique.

Nous avons divisé ce travail en 4 parties. Dans le § 1 nous étudions la nouvelle expression du reste dans le cas où il est de la forme que nous convenons d'appeler simple. Dans le § 2 nous étudions les formules de la moyenne que nous avons signalé. Dans le § 3 nous donnons des exemples pour illustrer quelques critères permettant de décider si le reste est de la forme simple ou non. Enfin au § 4 nous dirons quelques mots sur le cas où le reste n'est pas de la forme simple et nous terminons ce § par des applications.

Les résultats des §§ 3, 4 nous montrent, d'une part, la liaison étroite avec des résultats déjà connus, en particulier, avec ceux de E. YA. REMEZ [22] et, d'autre part, le degré de généralité de l'expression obtenue pour le reste.

§ 1.

1. — Toutes les fonctions considérées dans ce travail seront supposées réelles et d'une variable réelle. Nous désignerons par E l'ensemble de définition de la fonction ou l'ensemble de définition commun des fonctions considérées simultanément. Nous précisons toujours la structure de E quand il est nécessaire.

Désignons par

$$(1) \quad V \begin{pmatrix} g_1, g_2, \dots, g_m \\ x_1, x_2, \dots, x_m \end{pmatrix} = |g_j(x_i)|_{i,j=1,2,\dots,m}$$

le déterminant des valeurs des fonctions

$$(2) \quad g_1, g_2, \dots, g_m$$

sur les points $x_i \in E$, $i = 1, 2, \dots, m$. Dans le déterminant (1), $g_j(x_i)$ est l'élément qui se trouve dans la $i^{\text{ième}}$ ligne et la $j^{\text{ième}}$ colonne.

Le déterminant (1) est évidemment nul si les points x_i ou si les fonctions (2) ne sont pas distincts.

Nous allons garder la notation (1) seulement dans le cas où les points x_i sont distincts. Dans le cas contraire nous allons modifier convenablement la définition du déterminant (1). Cette modification consiste dans le remplacement des lignes correspondantes à chaque groupe de points x_i confondus par des lignes formées par les valeurs des fonctions (2) et de leurs dérivées successives sur ces points. Plus exactement, soient $z_1, z_2, \dots, z_p$ les points distincts avec lesquels coïncident respectivement $k_1, k_2, \dots, k_p$ ($k_1, k_2, \dots, k_p \geq 1$, $k_1 + k_2 + \dots + k_p = m$) des points x_i . Alors, pour tout $i = 1, 2, \dots, p$, il y a exactement k_i lignes formées par les valeurs des fonctions (2) et de leurs $k_i - 1$ premières dérivées sur le point z_i . Ceci implique, bien entendu, l'existence des dérivées considérées. Le nombre k_i est l'ordre de multiplicité du point z_i .

Nous pouvons désigner le déterminant (1) ainsi modifié, en ordonnant convenablement les points x_i , par

$$(3) \quad V \begin{pmatrix} g_1, g_2, \dots, g_m \\ \underbrace{z_1, z_1, \dots, z_1}_{k_1}, \underbrace{z_2, z_2, \dots, z_2}_{k_2}, \dots, \underbrace{z_p, z_p, \dots, z_p}_{k_p} \end{pmatrix}$$

qui est encore d'ordre $m = k_1 + k_2 + \dots + k_p$ et dans lequel $g_s^{(r-1)}(z_i)$ est l'élément qui se trouve dans la $(k_1 + k_2 + \dots + k_{i-1} + r)^{\text{ième}}$ ligne et la $s^{\text{ième}}$ colonne, $r = 1, 2, \dots, k_i$, $i = 1, 2, \dots, p$ (lorsque $i = 1$, $k_1 + k_2 + \dots + k_{i-1}$ est remplacé par 0).

Nous soulignons les cas particuliers suivants :

1°. Dans le cas $g_i = x^{i-1}$, $i = 1, 2, \dots, m$, nous désignons le déterminant (1) par $V(x_1, x_2, \dots, x_m)$. C'est le déterminant de Vandermonde des nombres $x_1, x_2, \dots, x_m$ et nous avons

$$(4) \quad V(x_1, x_2, \dots, x_m) = \prod_{i < j}^{1, 2, \dots, m} (x_j - x_i), \quad (V(x_1) = 1)$$

Dans ce même cas le déterminant (3) sera noté par

$$V \begin{pmatrix} z_1, z_1, \dots, z_1, z_2, z_2, \dots, z_2, \dots, z_p, z_p, \dots, z_p \\ \underbrace{}_{k_1}, \underbrace{}_{k_2}, \dots, \underbrace{}_{k_p} \end{pmatrix}, \text{ où nous supposons que les}$$

points z_i , $i = 1, 2, \dots, p$ soient distincts.

2°. Dans le cas où tous les points x_i coïncident avec x , nous désignons le déterminant (1) (modifié) par $W(g_1, g_2, \dots, g_m)$. C'est le wronskien des fonctions (2). Nous avons donc

$$V(x, x, \dots, x) = W(1, x, x^2, \dots, x^{m-1}) = (m-1)!!$$

où nous avons posé $\alpha!! = 1!2!\dots\alpha!$ ($0!! = 1$).

2. — On peut obtenir le déterminant (3) aussi par un passage à la limite si toutes les dérivées qui interviennent sont continues sur E , ou tout au moins dans le voisinage des points z_i .

Soient m points distincts $x_j^{(i)}$, $j = 1, 2, \dots, k_i$, $i = 1, 2, \dots, p$ et formons le déterminant D d'ordre m dont l'élément dans la $(k_1 + k_2 + \dots + k_{i-1} + r)$ ième ligne et la s ième colonne est la différence divisée (habituelle) d'ordre $r - 1$, $[x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \dots, x_r^{(i)}; g_s]$, $r = 1, 2, \dots, k_i$, $s = 1, 2, \dots, m$. Si nous remarquons que cette différence divisée tend vers $\frac{1}{(r-1)!} g_s^{(r-1)}(z_i)$ lorsque les points $x_j^{(i)}$, $j = 1, 2, \dots, r$ tendent vers z_i , nous voyons que le déterminant D tend vers le déterminant (3) divisé par $\prod_{i=1}^p (k_i - 1)!!$, lorsque $x_j^{(i)} \rightarrow z_i$, $j = 1, 2, \dots, k_i$, $i = 1, 2, \dots, p$. Enfin si nous multiplions le déterminant D par le produit

$$(5) \quad \prod_{i=1}^p V(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \dots, x_{k_i}^{(i)})$$

et si nous faisons quelques opérations élémentaires sur les lignes, nous obtenons le déterminant

$$(6) \quad V\left(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_{k_1}^{(1)}, \overbrace{x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \dots, x_{k_2}^{(2)}}^{g_1, g_2, \dots, g_m}, \dots, x_1^{(p)}, x_2^{(p)}, \dots, x_{k_p}^{(p)}\right)$$

Il en résulte que le déterminant (3) s'obtient en multipliant (6) par $\prod_{i=1}^p (k_i - 1)!!$, en le divisant par (5) et en faisant ensuite tendre les points $x_j^{(i)}$ vers z_i pour $j = 1, 2, \dots, k_i$, $i = 1, 2, \dots, p$.

On peut généraliser le passage à la limite par lequel on a obtenu le déterminant (3) à partir du déterminant (1). En effet, on peut obtenir de la même manière un déterminant de la forme (3) à partir de déterminants de la même forme. Nous n'insistons pas sur cette généralisation puisqu'elle ne sera pas utilisée dans la suite.

Comme une première application nous trouvons la formule

$$(7) \quad V\left(\underbrace{z_1, z_1, \dots, z_1}_{k_1}, \underbrace{z_2, z_2, \dots, z_2}_{k_2}, \dots, \underbrace{z_p, z_p, \dots, z_p}_{k_p}\right) = \left[\prod_{i=1}^p (k_i - 1)!!\right]^{1, 2, \dots, p} \prod_{i < j}^p (z_j - z_i)^{k_i k_j}$$

Nous avons, d'après une formule bien connue (voir par ex., L. V. GONTCHAROFF [3],

$$(8) \quad V\left(1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos mx, \sin mx\right)_{x_1, x_2, \dots, x_{2m+1}} = 2^{-m} \prod_{i < j}^{1, 2, \dots, 2m+1} \left(2 \sin \frac{x_j - x_i}{2}\right),$$

d'où il résulte aussi

$$(9) \quad V\left(1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos mx, \sin mx\right)_{\underbrace{z_1, z_1, \dots, z_1}_{k_1}, \underbrace{z_2, z_2, \dots, z_2}_{k_2}, \dots, \underbrace{z_p, z_p, \dots, z_p}_{k_p}} = 2^{-m} \left[\prod_{i=1}^p (k_i - 1)!!\right]^{1, 2, \dots, p} \prod_{i < j}^p \left(2 \sin \frac{z_j - z_i}{2}\right)^{k_i k_j}$$

$$(k_1 + k_2 + \dots + k_p = 2m + 1).$$

Dans la suite lorsque nous considérons des déterminants (1) avec des points x_i non pas tous distincts, nous les supposons toujours modifiés de la manière indiquée plus haut.

3. — Si parmi les points x_i sur lesquels est définie le déterminant (1) ou le déterminant modifié (3), il y a un qui a l'ordre de multiplicité k resp. un ordre de multiplicité $\leq k$, nous disons que ce point se répète k fois resp. se répète au plus k fois.

Définition 1. — Nous disons que les fonctions (2) forment un **système d'interpolation** ou un **système (I)** sur E (ayant au moins m points) si on a

$$(10) \quad V\left(g_1, g_2, \dots, g_m\right)_{x_1, x_2, \dots, x_n} \neq 0$$

pour tout ensemble de m points distincts $x_i \in E$, $i = 1, 2, \dots, m$.

La propriété de former un système (I) sur E pour les fonctions (2) est plus restrictive que la propriété de leur linéaire indépendance (sur E).

Il y a aussi intérêt à compléter la définition 1 par la

Définition 2. — Nous disons que les fonctions (2) forment un **système (I) régulier d'ordre k** ($1 \leq k \leq m$) sur E si nous avons (10) pour tout ensemble de m points $x_i \in E$, $i = 1, 2, \dots, m$, dont chacun se répète au plus k fois.

Si $k = m$ nous disons que les fonctions (2) forment un **système (I) complètement régulier** (sur E).

La régularité d'ordre k signifie donc que le déterminant (3) est $\neq 0$ si $z_i \in E$, $1 \leq k_i \leq k$, $i = 1, 2, \dots, p$, $k_1 + k_2 + \dots + k_p = m$, les points z_i étant distincts.

Dans la définition 2 nous supposons toujours que si $k > 1$, les dérivées d'ordre $k - 1$ des fonctions (2) soient continues sur E . De cette façon la régularité d'ordre $k > 1$ implique l'existence et la continuité sur E des dérivées d'ordre $k - 1$ des fonctions (2). C'est évidemment une restriction, mais, d'après T. J. STIELTJES [25], assure la validité du passage à la limite du no. 2.

On peut évidemment définir le déterminant modifié (3) en admettant des conditions de dérivabilité plus générales, d'où résulte aussi une notion plus générale de régularité, mais alors les propriétés de passage à la limite sont plus compliquées. Nous laisserons systématiquement de côté de telles généralisations.

En ce qui concerne l'ensemble E , il peut être quelconque. Dans la suite E sera en général un intervalle et alors la notion de dérivée est celle bien connue de l'analyse élémentaire.

Il est clair que la régularité d'ordre k implique la régularité de tout ordre plus petit et que la régularité complète implique la régularité de tout ordre $\leq m$. En particulier, les notions de système (I) et de système (I) régulier d'ordre 1 sont équivalentes.

Enfin la régularité d'ordre k est équivalente à l'une quelconque des propriétés suivantes :

1°. Pour tout ensemble de m points (comptés avec leurs ordres de multiplicité) $z_i \in E$, respectivement d'ordre k_i de multiplicité, $i = 1, 2, \dots, p$, $k_1 + k_2 + \dots + k_p = m$ et pour tout ensemble de m nombres $y_i^{(j)}$, $j = 0, 1, \dots, k_i - 1$, $i = 1, 2, \dots, p$, il existe une combinaison linéaire des fonctions (2) et une seule $\varphi(x)$ pour laquelle $\varphi^{(j)}(z_i) = y_i^{(j)}$, $j = 0, 1, \dots, k_i - 1$, $i = 1, 2, \dots, p$.

Lorsque f est une fonction telle que $y_i^{(j)} = f^{(j)}(z_i)$, $j = 0, 1, \dots, k_i - 1$, $i = 1, 2, \dots, p$, nous désignons aussi cette combinaison linéaire par

$$(11) \quad L(f|x) = L(\underbrace{z_1, z_1, \dots, z_1}_{k_1}, \underbrace{z_2, z_2, \dots, z_2}_{k_2}, \dots, \underbrace{z_p, z_p, \dots, z_p}_{k_p}; f|x)$$

Si les fonctions (2) forment un système (I) régulier d'ordre k et si $k_i \leq k$, $i = 1, 2, \dots, p$, la combinaison linéaire (11) est bien déterminée et est unique.

Il est clair que si f est une combinaison linéaire des fonctions (2) et si la condition précédente est vérifiée, on a $L(f|x) = f$.

2°. Une combinaison linéaire des fonctions (2) ne peut s'annuler sur m points, dont chacun se répète au plus k fois, sans être identiquement nulle.

On dit qu'une fonction s'annule k fois sur un point si cette fonction et ses $k - 1$ premières dérivées sont nulles sur ce point.

La formule (7) nous montre que les fonctions x^i , $i = 0, 1, \dots, m - 1$ forment un système (I) complètement régulier pour tout nombre naturel m et sur un ensemble quelconque E .

De même, la formule (9) nous montre que les fonctions $1, \cos ix, \sin ix$, $i = 1, 2, \dots, m$, forment un système (I) complètement régulier, pour tout nombre naturel m et sur tout intervalle E qui ne contient pas un sous-intervalle fermé de longueur 2π , donc en particulier sur l'intervalle $[0, 2\pi)$, fermé à gauche et ouvert à droite.

4. — Lorsque les fonctions (2) sont continues nous pouvons trouver des résultats plus complets.

THÉORÈME 1. — Si les fonctions (2) : 1° sont continues sur l'intervalle E , 2° forment un système (I) régulier d'ordre k sur E ,

le déterminant (1) ne change pas de signe, tant que les termes de la suite (2) ne changent pas leur ordre relatif et tant que les points x_i , dont chacun se répète au plus k fois, ne changent pas leur ordre de grandeur relatif (par ex., tant que les fonctions g_i restent dans l'ordre indiqué par la suite (2) et

que les points x_i restent dans l'ordre de grandeur croissante de leurs indices, $x_1 < x_2 < \dots < x_m$).

Conformément aux définitions précédentes, pour $k > 1$ (mais non pas pour $k = 1$) la condition 2° de l'énoncé implique la continuité des fonctions (2).

Supposons d'abord $k = 1$. Pour la démonstration supposons le contraire. Nous pouvons alors trouver les points

$$(12) \quad x'_1 < x'_2 < \dots < x'_m, \quad x''_1 < x''_2 < \dots < x''_m$$

tels que l'on ait

$$(13) \quad V \begin{pmatrix} g_1, g_2, \dots, g_m \\ x'_1, x'_2, \dots, x'_m \end{pmatrix} > 0, \quad V \begin{pmatrix} g_1, g_2, \dots, g_m \\ x''_1, x''_2, \dots, x''_m \end{pmatrix} < 0$$

Les points

$$(14) \quad x_i = \lambda x''_i + (1 - \lambda) x'_i, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

restent distincts pour $0 \leq \lambda \leq 1$ et le déterminant (1) est une fonction de λ parfaitement déterminée et continue sur $[0, 1]$.

Une propriété bien connue des fonctions continues nous montre qu'il existe un λ , $0 < \lambda < 1$, tel que le déterminant (1), où les points x_i sont donnés par (14), soit égal à 0. C'est en contradiction avec l'hypothèse que les fonctions (2) forment un système (I).

Remarquons que de (12) résulte encore que, pour $0 \leq \lambda \leq 1$, les points (14) vérifient également les inégalités $x_1 < x_2 < \dots < x_m$ et qu'il restent dans un intervalle de longueur $\leq \max(x'_m - x'_1, x''_m - x''_1)$. Si de plus $0 < \lambda < 1$ et $x'_1 \neq x''_1$, $x'_m \neq x''_m$, les points x_i sont à l'intérieur du plus petit intervalle contenant les points x'_i, x''_i .

Supposons maintenant $k > 1$. Pour la démonstration supposons à nouveau le contraire. Nous pouvons alors trouver les points $u_1 \leq u_2 \leq \dots \leq u_m$, dont chacun se répète au plus k fois et les points $v_1 \leq v_2 \leq \dots \leq v_m$, dont aussi chacun se répète au plus k fois, tel que

$$(15) \quad V \begin{pmatrix} g_1, g_2, \dots, g_m \\ u_1, u_2, \dots, u_m \end{pmatrix} > 0, \quad V \begin{pmatrix} g_1, g_2, \dots, g_m \\ v_1, v_2, \dots, v_m \end{pmatrix} < 0$$

On peut alors trouver les points (12) variables, tendant vers les points u_i et v_i respectivement, de manière que les produits des déterminants (13), par des fonctions qui restent positives, tendent vers les déterminants (15) respectifs. Il en résulte qu'il est encore possible de trouver les points (12) tel que l'on ait (13). La démonstration revient alors à la précédente.

Le théorème 1 est donc complètement démontré.

5. — La combinaison linéaire (11) peut aussi s'écrire

$$(16) \quad L(f|x) = f(x) - \frac{V \begin{pmatrix} g_1, g_2, \dots, g_m, f \\ x_1, x_2, \dots, x_m, x \end{pmatrix}}{V \begin{pmatrix} g_1, g_2, \dots, g_m \\ x_1, x_2, \dots, x_m \end{pmatrix}}$$

où x_i sont les points z_i avec leurs ordres de multiplicités, dans un ordre quelconque. La formule (16) a un sens précis lorsque x ne coïncide pas avec l'un des points x_i . Dans le cas contraire on convient de remplacer par 0 le second terme du second membre. Cette convention est nécessaire pour éviter des confusions avec la définition du déterminant (1) dans le cas des points x_i non tous distincts.

De la formule (16) il résulte

$$L(f|x) - L(g|x) = f(x) - g(x) - \frac{V\left(\begin{smallmatrix} g_1, g_2, \dots, g_m, f-g \\ x_1, x_2, \dots, x_m, x \end{smallmatrix}\right)}{V\left(\begin{smallmatrix} g_1, g_2, \dots, g_m \\ x_1, x_2, \dots, x_m \end{smallmatrix}\right)}$$

Si, en particulier, les points x_i sont distincts et les fonctions (2) sont continues, nous en déduisons l'inégalité

$$(17) \quad |L(f|x) - L(g|x)| \leq M \max_{i=1, 2, \dots, m} (|f(x_i) - g(x_i)|)$$

où $M (> 0)$ est le maximum, dans le plus petit intervalle fermé contenant les points x_i , de la fonction continue

$$\frac{\sum_{i=1}^m \left| V\left(\begin{smallmatrix} g_1, g_2, \dots, g_m \\ x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_m, x \end{smallmatrix}\right) \right|}{\left| V\left(\begin{smallmatrix} g_1, g_2, \dots, g_m \\ x_1, x_2, \dots, x_m \end{smallmatrix}\right) \right|}$$

où les déterminants V qui interviennent (au numérateur) sont définis par le second membre de la formule (1).

Il est facile de généraliser ce résultat dans le cas où les points x_i ne sont pas distincts.

Nous en déduisons le

THÉOREME 2. — Si : 1° les fonctions (2) sont continues et forment un système (I) sur l'intervalle E , 2° la combinaison linéaire φ de ces fonctions s'annule sur $m-1$ points distincts x_i , $i = 1, 2, \dots, m-1$ sans être identiquement nulle sur E ,

la fonction φ (est continue et) change de signe en passant par un point x_i (qui ne coïncide pas avec une extrémité de E).

On suppose, bien entendu, $m > 1$.

Cette propriété est bien connue. Pour être complet nous allons donner sa démonstration.

Supposons que, contrairement à l'énoncé, φ ne change pas de signe en passant par le point x_1 qui ne coïncide pas avec l'une des extrémités de E . On peut alors trouver les points x'_1, x''_1 tel que : 1° $x'_1 < x_1 < x''_1$, 2° aucun des points x_i , $i = 2, 3, \dots, m-1$, n'appartient à l'intervalle fermé $[x'_1, x''_1]$, 3° $\varphi(x'_1) \varphi(x''_1) > 0$. Considérons l'inégalité (17) relativement aux m points $x'_1, x_1, x_2, \dots, x_{m-1}$, à la fonction φ et à la combinaison linéaire

φ_1 des fonctions (2) qui prend les mêmes valeurs que φ aux points $x'_1, x_2, x_3, \dots, x_{m-1}$ et pour laquelle $\varphi_1(x_1) = -\varepsilon \text{ signe } \varphi(x''_1)$, où ε est un nombre positif $< \frac{1}{2M} |\varphi(x''_1)|$. Nous avons alors

$$|\varphi_1(x'_1) - \varphi(x'_1)| = |L(\varphi_1|x'_1) - L(\varphi|x'_1)| \leq M\varepsilon < \frac{|\varphi(x''_1)|}{2}$$

Il en résulte que $\text{signe } \varphi_1(x'_1) = \text{signe } \varphi(x''_1)$.

On voit maintenant que φ_1 , sans être identiquement nul, s'annule aux points $x_2, x_3, \dots, x_{m-1}$ et encore au moins une fois dans chacun des intervalles ouverts (x'_1, x_1) , (x_1, x''_1) . C'est en contradiction avec le fait que les fonctions (2) forment un système (I).

Le théorème 2 est démontré.

6. — Supposons que les $n+2$ fonctions

$$(18) \quad f_0, f_1, \dots, f_n, f_{n+1},$$

soient définies et forment un système (I) sur E . On voit facilement qu'alors les $n+1$ premières de ces fonctions

$$(19) \quad f_0, f_1, \dots, f_n,$$

sont linéairement indépendantes sur E .

Nous disons [13] que la fonction f est *convexe* resp. *concave par rapport à la suite* (19) de fonctions, si

$$(20) \quad V\left(\begin{smallmatrix} f_0, f_1, \dots, f_n, f \\ x_1, x_2, \dots, x_{n+2} \end{smallmatrix}\right) > 0 \text{ resp. } < 0,$$

pour tout système $x_1 < x_2 < \dots < x_{n+2}$ de $n+2$ points de E .

Si la fonction f est convexe ou concave par rapport à la suite (19), toutes ces $n+2$ fonctions forment un système (I) (sur E). Réciproquement, si les fonctions (18) sont continues et forment un système (I), la fonction f_{n+1} et, en général l'une quelconque de ces fonctions, est convexe ou concave par rapport à toute suite formée par les $n+1$ autres fonctions.

Dans la suite nous supposons que le nombre entier n soit ≥ 0 . On peut donner un sens à la définition précédente aussi pour $n = -1$. Alors la suite (19) disparaît et la convexité resp. la concavité reviennent à la positivité resp. à la négativité de la fonction f sur E .

La notion de convexité ainsi introduit généralise celle de convexité d'ordre supérieur (d'ordre n) [12], qu'on obtient dans le cas particulier

$$(21) \quad f_i = x^i, \quad i = 0, 1, \dots, n$$

Dans ce cas la fonction

$$(21') \quad f_{n+1} = x^{n+1}$$

est convexe par rapport à la suite de fonctions (21), l'intervalle E étant quelconque

7. — Les inégalités de définition (20) ne sont pas symétriques par rapport aux points x_i et la distinction entre la convexité et la concavité dépend de l'ordre dans lequel interviennent les fonctions (19). C'est pour cette raison que nous avons souligné dans la définition que la convexité et la concavité sont par rapport à la suite et non pas par rapport à l'ensemble des fonctions (19).

Remarquons que si f est convexe resp. concave, la fonction $-f$ est concave resp. convexe. L'ensemble des fonctions convexes (ou concaves) par rapport à la suite (19) reste invariable ou se change dans l'ensemble des fonctions concaves (ou convexes), par une permutation des fonctions (19).

Pour éliminer ces asymétries introduisons la notation

$$(22) [x_1, x_2, \dots, x_{n+2}; f] = V \begin{pmatrix} f_0, f_1, \dots, f_n, f \\ x_1, x_2, \dots, x_{n+2} \end{pmatrix} : V \begin{pmatrix} f_0, f_1, \dots, f_n, f_{n+1} \\ x_1, x_2, \dots, x_{n+2} \end{pmatrix}$$

où nous supposons que les fonctions (18) forment un système (I) et le points x_i soient distincts. L'expression (22) a alors un sens parfaitement déterminé et est symétrique par rapport aux points x_i . Dans le cas particulier (21), (21') cette expression se réduit à la différence divisée de la fonction f sur les noeuds $x_1, x_2, \dots, x_{n+2}$. Nous continuerons d'employer pour l'expression (22) la dénomination de *différence divisée* et pour les points x_i la dénomination de *noeuds* (de cette différence divisée ou sur lesquels cette différence divisée est définie). Dans la notation (22) nous avons omis de mettre en évidence les fonctions (18), puisque jamais deux systèmes (18) différents n'interviendront pas simultanément dans nos considérations.

Les différences divisées ainsi définies jouissent des propriétés qui sont exprimées par les formules

$$(23) [x_1, x_2, \dots, x_{n+2}; f] = \begin{cases} 0, & i = 0, 1, \dots, n, \\ 1, & i = n + 1, \end{cases}$$

$$(24) [x_1, x_2, \dots, x_{n+2}; \alpha f + \beta g] = \alpha [x_1, x_2, \dots, x_{n+2}; f] + \beta [x_1, x_2, \dots, x_{n+2}; g],$$

quels que soient les fonctions f, g , les constantes α, β et les points distincts $x_i \in E, i = 1, 2, \dots, n + 2$. La formule (24) exprime la linéarité de la différence divisée.

8. — A l'aide des différences divisées la définition de la convexité peut être énoncée (sous une forme plus précise) de la façon suivante :

Définition 3. — La fonction f est **convexe, non-concave, non-concave** resp. **concave** par rapport aux fonctions (19) si

$$(25) [x_1, x_2, \dots, x_{n+2}; f] > 0, \geq 0, \leq 0, \text{ resp. } < 0$$

les points $x_i \in E, i = 1, 2, \dots, n + 2$ étant distincts et quelconques.

On voit que la définition est bien indépendante de l'ordre des fonctions (19) et que la distinction entre les fonctions convexes et les fonctions concaves est précisée par le choix de la fonction f_{n+1} qui est, ipso facto, convexe.

Nous verrons plus loin, dans l'étude du reste $R[f]$, que l'introduction des différences divisées satisfait plus qu'à l'exigence, en quelque sorte formelle, de la symétrie.

La convexité (concavité) est un cas particulier de la non-concavité (non-convexité). Mais pour la suite il est utile de bien distinguer entre les fonctions non-concaves (non-convexes) en général et les fonctions seulement convexes (concaves).

Si f est convexe resp. non-concave, $-f$ est concave resp. non-convexe et réciproquement.

La combinaison linéaire avec des coefficients tous positifs resp. tous négatifs, d'un nombre fini (au moins 1) de fonctions non-concaves est non-concave resp. non-convexe. Si l'une au moins des fonctions considérées est convexe, leur combinaison linéaire considérée est convexe resp. concave.

La limite d'une suite convergente (sur E) de fonctions, toutes non-concaves (non-convexes) est une fonction non-concave (non-convexe).

Une fonction f peut être à la fois non-concave et non-convexe. Ces sont les fonctions et seulement les fonctions dont la différence divisée est nulle sur tout groupe de $n + 2$ points de E . Pour que cette propriété soit vérifiée il faut et il suffit que f se réduise à une combinaison linéaire des fonctions (19). La condition est évidemment suffisante. Mais elle est aussi nécessaire. En effet, puisque les fonctions (19) sont linéairement indépendantes, il existe $n + 1$ points distincts $x_i, i = 1, 2, \dots, n + 1$, tel que

$$V \begin{pmatrix} f_0, f_1, \dots, f_n \\ x_1, x_2, \dots, x_{n+1} \end{pmatrix} \neq 0 \quad [20]. \text{ Nous avons } V \begin{pmatrix} f_0, f_1, \dots, f_n, f \\ x_1, x_2, \dots, x_{n+1}, x \end{pmatrix} = 0,$$

pour $x \in E$, d'où résulte la propriété.

Des autres propriétés des fonctions convexes nous signalons le

THÉORÈME 3. — Si : 1° les fonctions (18) sont continues et forment un système (I) sur l'intervalle E , 2° la fonction f est continue, mais n'est ni convexe ni concave sur E ,

on peut trouver $n + 2$ points distincts $x_i \in E, i = 1, 2, \dots, n + 2$, tel que l'on ait $[x_1, x_2, \dots, x_{n+2}; f] = 0$.

En effet, si la fonction f n'est ni convexe ni concave, elle est ou bien non-concave ou non-convexe et alors la propriété est évidente, ou bien on peut trouver deux groupes, chacun formés par $n + 2$ points distincts $x'_i \in E$ et $x''_i \in E, i = 1, 2, \dots, n + 2$, tel que les différences divisées

$$(26) [x'_1, x'_2, \dots, x'_{n+2}; f], [x''_1, x''_2, \dots, x''_{n+2}; f]$$

soient non nulles et de signes contraires. Il suffit alors d'appliquer le théorème 1, en tenant compte de la formule de définition (22) des différences divisées.

Nous déduisons aussi la propriété plus générale exprimée par le

THÉORÈME 4. — Si : 1° les fonctions (18) sont continues et forment un système (I) sur E , 2° la fonction f est continue sur E , 3° C est un nombre compris entre les valeurs A, B des différences divisées (26),

on peut trouver $n + 2$ points distincts $x_i \in E, i = 1, 2, \dots, n + 2$, tel que l'on ait $[x_1, x_2, \dots, x_{n+2}; f] = C$.

Si C coïncide avec A ou B , ce qui a nécessairement lieu si $A=B$, la propriété est évidente. Dans le cas contraire nous avons $(A-C)(B-C) < 0$. Compte tenant de (23), (24) on vérifie facilement que la fonction $f - Cf_{n+1}$ n'est ni convexe ni concave. Il suffit alors d'appliquer le théorème 3 à cette dernière fonction.

Des remarques faites à la démonstration du théorème 1 il résulte que si $x'_1 < x'_2 < \dots < x'_{n+2}$, $x''_1 < x''_2 < \dots < x''_{n+2}$ on peut choisir les points x_i , tel que l'on ait $x_1 < x_2 < \dots < x_{n+2}$ et $x_{n+2} - x_1 \leq \max(x'_{n+2} - x'_1, x''_{n+2} - x''_1)$ et si $(A-C)(B-C) < 0$ que l'on ait de plus $\min(x'_1, x''_1) < x_i < \max(x'_{n+2}, x''_{n+2})$, $i = 1, 2, \dots, n+2$.

9. — Si les fonctions (18) forment un système (I) régulier d'ordre k , nous pouvons prendre la formule (22) pour définir toute différence divisée dont les noeuds distincts se répètent au plus k fois. Pour bien mettre en évidence la multiplicité des noeuds nous désignons cette différence divisée aussi par

$$(27) \quad \underbrace{[z_1, z_1, \dots, z_1, z_2, z_2, \dots, z_2, \dots, z_p, z_p, \dots, z_p]}_{k_1 \quad k_2 \quad k_p}; f]$$

où les noeuds z_i , d'ordre de multiplicité respectif k_i , $i = 1, 2, \dots, p$, sont distincts.

Les résultats du no. 2 nous montrent que la différence divisée (27) est la limite de la différence divisée

$$[x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_{k_1}^{(1)}, x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \dots, x_{k_2}^{(2)}, \dots, x_1^{(p)}, x_2^{(p)}, \dots, x_{k_p}^{(p)}; f]$$

sur des noeuds distincts, lorsque $x_j^{(i)} \rightarrow z_i$, $j=1, 2, \dots, k_i$, $i=1, 2, \dots, p$.

En particulier, si les fonctions (18) forment un système (I) complètement régulier, nous avons

$$(28) \quad [\xi, \xi, \dots, \xi; f] = \left[\frac{W(f_0, f_1, \dots, f_n, f)}{W(f_0, f_1, \dots, f_n, f_{n+1})} \right]_{x=\xi}$$

Diverses propriétés des différences divisées définies sur des noeuds distincts peuvent être étendues aux différences divisées sur des noeuds non tous distincts ainsi définies. Par ex., les formules (23), (24) restent évidemment valables.

Remarquons encore que si les fonctions (18) forment un système (I) complètement régulier et si les fonctions (19) sont des solutions (nécessairement linéairement indépendantes) de l'équation différentielle linéaire et homogène d'ordre $n+1$, $D[y] = y^{(n+1)} + \varphi_1(x)y^{(n)} + \dots + \varphi_{n+1}(x)y = 0$, nous avons $W(f_0, f_1, \dots, f_n, f) = W(f_0, f_1, \dots, f_n) D[f]$ et la formule (28) devient

$$(29) \quad [\xi, \xi, \dots, \xi; f] = \left[\frac{D[f]}{D[f_{n+1}]} \right]_{x=\xi}$$

La différence divisée (27) existe, en vertu de la définition que nous lui avons donné, seulement si le déterminant V qui se trouve au numérateur

du second membre de la formule (22) existe dans le sens du no. 2. Dans la suite nous supposons que la fonction f aient toutes ses dérivées qui interviennent continues. Mais on peut définir des différences divisées plus générales sur des noeuds non tous distincts, par des passages à la limite convenables. Ces passages à la limite peuvent se faire par l'intermédiaire des limites des différences divisées habituelles (correspondantes au cas particulier (21), (21')). C'est en somme de cette façon que nous procédons dans ce travail.

On peut aussi procéder directement, sans passer par le cas particulier (21), (21'). Toutes ces questions sont étroitement liées à la définition et à l'existence des dérivées d'ordre supérieur directes d'une fonction.

Pour donner un exemple remarquons que dans le cas particulier (21), (21'), le quotient (29) se réduit à $\frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)$ et ce résultat est valable,

d'après notre convention, si f a une dérivée $(n+1)^{\text{ième}}$ continue, au moins, sur le point ξ . Mais, si nous adoptons pour le premier membre de (29) (toujours dans le cas particulier (21), (21')) comme définition la limite de la différence divisée $[x_1, x_2, \dots, x_{n+1}, \xi; f]$ lorsque les x_i , $i = 1, 2, \dots, n+1$ tendent vers ξ , la formule (26) reste valable, d'après T. J. STIELTJES [26], sous l'hypothèse de l'existence seule de la $(n+1)^{\text{ième}}$ dérivée de f sur E (la fonction f est supposée définie et bornée sur E).

Dans la suite nous laissons systématiquement de côté de telles généralisations.

10. — Soit $R[f]$ une fonctionnelle linéaire, définie sur un espace vectoriel $(\mathcal{F})$ formé par des fonctions f continues sur l'intervalle E .

Nous supposons que les fonctions (18) forment un système (I) et appartiennent à $(\mathcal{F})$. En particulier, elles sont donc continues sur E .

Si la fonctionnelle linéaire $R[f]$ s'annule sur les fonctions (19), elle est nulle sur toute combinaison linéaire de ces fonctions. Une telle fonctionnelle est, par ex.,

$$(30) \quad K. [\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+2}; f],$$

où K est un nombre indépendant de la fonction f et ξ_i sont $n+2$ points distincts de l'intervalle E .

Nous introduisons maintenant la

Définition 4. — Nous disons que la fonctionnelle linéaire $R[f]$, définie sur $(\mathcal{F})$, est de la forme simple si, pour tout $f \in (\mathcal{F})$, elle est de la forme (30), où K est un nombre différent de zéro, indépendant de la fonction f et ξ_i sont $n+2$ points distincts de E (qui peuvent dépendre en général de la fonction f).

Nous avons alors le

THÉORÈME 5. — La condition nécessaire et suffisante pour que la fonctionnelle linéaire $R[f]$ soit de la forme simple est que l'on ait $R[f] \neq 0$ pour toute fonction $f \in (\mathcal{F})$ convexe par rapport aux fonctions (19).

La condition est nécessaire. En effet, si $R[f]$ est de la forme simple, de (23) il résulte d'abord que $R[f_{n+1}] = K \neq 0$. De la formule

$$(31) \quad R[f] = R[f_{n+1}][\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+2}; f]$$

il résulte alors que $R[f] \neq 0$ si f est convexe.

La condition est suffisante. Si $R[f] \neq 0$ pour toute fonction convexe, il en est de même pour toute fonction concave. En effet, si f est concave, la fonction $-f$ est convexe et nous avons $R[f] = -R[-f] \neq 0$.

Soit alors $f \in \mathcal{F}$ et considérons la fonction auxiliaire

$$(32) \quad \varphi = R[f] \cdot f_{n+1} - R[f_{n+1}] \cdot f$$

Nous avons $\varphi \in \mathcal{F}$ et $R[\varphi] = 0$. Il résulte que φ n'est ni convexe ni concave. D'après le théorème 3 on peut trouver $n+2$ points distincts ξ_i , $i = 1, 2, \dots, n+2$, tel que l'on ait $[\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+2}; \varphi] = 0$. De (32), compte tenant de (23), (24), on déduit la formule (31).

Le théorème 5 est donc démontré.

Si $R[f]$ est de la forme simple il s'annule sur les fonctions (19). On peut déduire cette propriété directement du fait que $R[f] \neq 0$ pour toute fonction convexe ou concave. Pour démontrer la propriété, supposons le contraire, donc que $R[f_i] \neq 0$ pour un i , $0 \leq i \leq n$. Si nous posons $f = f_i$ dans (32), nous obtenons une fonction φ qui est convexe ou concave. L'égalité $R[\varphi] = 0$ est alors en contradiction avec l'hypothèse.

Une démonstration analogue nous montre que si $R[f] \neq 0$ pour toute fonction convexe, nous avons plus exactement $R[f_{n+1}]R[f] > 0$ pour ces fonctions. Autrement dit $R[f]$ garde son signe, qui est le signe de $R[f_{n+1}]$, sur toute fonction convexe, donc aussi le signe contraire $<$ sur toute fonction concave.

De la même manière on voit que si $R[f]$ est de la forme simple nous avons $R[f_{n+1}]R[f] \geq 0$ pour toute fonction f non-concave et l'inégalité avec $\leq$ pour toute fonction f non-convexe.

§ 2.

11. — S'il est de la forme simple, le reste $R[f]$, s'exprime à l'aide de la formule (31) par une différence divisée. La structure de ce reste dépend donc de la structure de la différence divisée (22). Or la structure de cette différence divisée est réglée par un important théorème de la moyenne du Δ D. V. WIDDER [28]. Ce théorème a lieu sous une hypothèse supplémentaire faite sur les fonctions (19), hypothèse que nous signalerons tout à l'heure.

Nous allons retrouver les résultats de D. V. Widder par une méthode différente. Nos résultats, qui sont suffisants pour l'étude du reste, sont un peu plus généraux, mais ne permettent de retrouver qu'une partie des résultats de D. V. Widder, dans le cas particulier examiné par cet auteur.

L'hypothèse supplémentaire dont nous avons parlé plus haut consiste en ce que les fonctions (19) forment un système (I). Ce n'est pas une consé-

quence du fait que les fonctions (18) forment un système (I) (voir, par ex., l'exemple donné au no. 16). Pour écarter toute difficulté nous supposons dans la suite que les fonctions (18) soient continues sur l'intervalle E .

12. — Nous allons utiliser la formule suivante

$$(33) \quad V \begin{pmatrix} f_0, f_1, \dots, f_n \\ x_2, x_3, \dots, x_{n+2} \end{pmatrix} V \begin{pmatrix} f_0, f_1, \dots, f_n, f \\ x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{n+3} \end{pmatrix} = \\ = V \begin{pmatrix} f_0, f_1, \dots, f_n \\ x_2, x_3, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{n+3} \end{pmatrix} V \begin{pmatrix} f_0, f_1, \dots, f_n, f \\ x_1, x_2, \dots, x_{n+2} \end{pmatrix} + \\ + V \begin{pmatrix} f_0, f_1, \dots, f_n \\ x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{n+2} \end{pmatrix} V \begin{pmatrix} f_0, f_1, \dots, f_n, f \\ x_2, x_3, \dots, x_{n+3} \end{pmatrix}$$

Pour démontrer cette formule considérons le déterminant d'ordre $2n+3$

$$(34) \quad |a_{r,s}| \quad r, s = 1, 2, \dots, 2n+3$$

où $a_{r,s}$ est l'élément de la $r^{\text{ième}}$ ligne et la $s^{\text{ième}}$ colonne et où

$$a_{r,s} = \begin{cases} f_{s-1}(x_r), & r = 1, 2, \dots, n+3 \\ 0, & r = n+4, n+5, \dots, 2n+3 \end{cases} \quad s = 1, 2, \dots, n+2, \\ a_{r,s} = \begin{cases} f_{s-n-3}(x_r), & r = 1, i, n+3, \\ 0, & r = 2, 3, \dots, i-1, i+1, \dots, n+2 \\ f_{s-n-3}(x_{r-n-2}), & r = n+4, n+5, \dots, n+i+1, \\ f_{s-n-3}(x_{r-n-1}), & r = n+i+2, n+i+3, \dots, 2n+3, \end{cases} \\ s = n+3, n+4, \dots, 2n+3$$

Ce déterminant est égal à zéro. Pour le voir il suffit de le transformer en ajoutant d'abord la $(n+2+j)^{\text{ième}}$ ligne à la $j^{\text{ième}}$ pour $j = 2, 3, \dots, i-1$ et la $(n+1+j)^{\text{ième}}$ à la $j^{\text{ième}}$ pour $j = i+1, i+2, \dots, n+2$ et ensuite en retranchant la $s^{\text{ième}}$ colonne de la $(n+2+s)^{\text{ième}}$ pour $s = 1, 2, \dots, n+1$. De cette façon tous les éléments situés à l'intersection de $n+1$ dernières colonnes et des $n+3$ premières lignes deviennent nuls.

Si nous développons le déterminant (34) suivant la formule de Laplace et d'après les $n+2$ premières colonnes, nous obtenons la formule (33).

La formule (33) est valable pour $2 \leq i \leq n+2$. Il est facile de voir comment il faut l'écrire pour $i=2$ et pour $i=n+2$.

Si les points x_i , $i = 1, 2, \dots, n+3$ sont distincts, de la formule (33), en tenant compte de (22), on déduit,

$$(35) \quad [x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{n+3}; f] = \\ = A[x_1, x_2, \dots, x_{n+2}; f] + B[x_2, x_3, \dots, x_{n+3}; f]$$

où, par suite de l'hypothèse que les fonctions (19) forment un système (I),

$$(36) A = \frac{V \left(\begin{matrix} f_0, f_1, \dots, f_n \\ x_2, x_3, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{n+3} \end{matrix} \right) V \left(\begin{matrix} f_0, f_1, \dots, f_n, f_{n+1} \\ x_1, x_2, \dots, x_{n+2} \end{matrix} \right)}{V \left(\begin{matrix} f_0, f_1, \dots, f_n \\ x_2, x_3, \dots, x_{n+2} \end{matrix} \right) V \left(\begin{matrix} f_0, f_1, \dots, f_n, f_{n+1} \\ x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{n+3} \end{matrix} \right)}$$

$$(37) B = \frac{V \left(\begin{matrix} f_0, f_1, \dots, f_n \\ x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{n+2} \end{matrix} \right) V \left(\begin{matrix} f_0, f_1, \dots, f_n, f_{n+1} \\ x_2, x_3, \dots, x_{n+3} \end{matrix} \right)}{V \left(\begin{matrix} f_0, f_1, \dots, f_n \\ x_2, x_3, \dots, x_{n+2} \end{matrix} \right) V \left(\begin{matrix} f_0, f_1, \dots, f_n, f_{n+1} \\ x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{n+3} \end{matrix} \right)}$$

Si nous faisons $f = f_{n+1}$ dans (35) nous trouvons $A + B = 1$. Mais si $(1 < i < n+3)$ $x_1 < x_2 < \dots < x_{n+3}$, le théorème 1 nous montre que les coefficients A, B , qui sont indépendants de la fonction f , sont positifs. Il en résulte que si $(1 < i < n+3)$ $x_1 < x_2 < \dots < x_{n+3}$, la différence divisée $[x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{n+3}; f]$ est une moyenne arithmétique généralisée (avec des poids positifs) des différences divisées $[x_1, x_2, \dots, x_{n+2}; f]$, $[x_2, x_3, \dots, x_{n+3}; f]$.

En particulier, dans le cas (21), (21'), nous retrouvons la formule de la moyenne

$$= \frac{[x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{n+3}; f] = (x_i - x_1) [x_1, x_2, \dots, x_{n+2}; f] + (x_{n+3} - x_i) [x_2, x_3, \dots, x_{n+3}; f]}{x_{n+3} - x_1}$$

des différences divisées habituelles.

13. — De la formule de la moyenne (35) nous déduisons la propriété plus générale exprimé par le

THÉORÈME 6. — Si $x_1 < x_2 < \dots < x_m$ sont $m \geq n+2$ points de E , la différence divisée $[x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_{n+2}}; f]$ ($1 = i_1 < i_2 < \dots < i_{n+2} = m$) sur $n+2$ de ces points, est une moyenne arithmétique généralisée (avec des poids positifs convenables) des différences divisées

$$(38) [x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+n+1}; f], \quad i = 1, 2, \dots, m-n-1$$

sur $n+2$ points consécutifs de la suite des points x_i .

Nous avons donc

$$(39) [x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_{n+2}}; f] = \sum_{i=1}^{m-n-1} A_i [x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+n+1}; f],$$

les A_i étant positifs, indépendants de la fonction f et de somme égale à 1.

La démonstration ne présente pas de difficultés. Elle peut se faire exactement comme dans le cas particulier (21), (21') [14], par induction sur le nombre m des points x_i . La positivité des coefficients A_i est une conséquence de cette démonstration si $x_1 < x_2 < \dots < x_m$.

Sous les hypothèses du théorème 6, on déduit aussi les inégalités

$$(40) \min_{i=1, 2, \dots, m-n-1} ([x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+n+1}; f]) \leq [x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_{n+2}}; f] \leq \max_{i=1, 2, \dots, m-n-1} ([x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+n+1}; f]).$$

Les égalités ne peuvent avoir lieu qu'à la fois et si et seulement si les différences divisées (38) ont la même valeur C , donc si et seulement si pour la fonction $f - C f_{n+1}$ les mêmes différences divisées sont toutes nulles. Nous savons que pour cela il faut et il suffit que la fonction f dépend linéairement des fonctions f_i , $i = 0, 1, \dots, n+1$ sur les points x_i , $i = 1, 2, \dots, m$.

14. — Les résultats précédents permettent aussi de démontrer, sous les mêmes hypothèses, le

THÉORÈME 7. — Si la fonction f est continue sur l'intervalle E et si x_i , $i = 1, 2, \dots, n+2$ sont $n+2$ points distincts de E , nous pouvons trouver, à l'intérieur du plus petit intervalle contenant les points x_i , un point ξ tel que dans tout voisinage de ce point on puisse trouver $n+2$ points distincts $x'_i \in E$, $i = 1, 2, \dots, n+2$ qui vérifient l'égalité

$$(41) [x_1, x_2, \dots, x_{n+2}; f] = [x'_1, x'_2, \dots, x'_{n+2}; f]$$

Nous allons d'abord démontrer que dans (41) on peut choisir les points x'_i à l'intérieur du plus petit intervalle contenant les points x_i et dans un intervalle de longueur plus petite qu'un nombre positif ε donné quelconque.

Nous pouvons supposer que $x_1 < x_2 < \dots < x_{n+2}$ ($n \geq 0$). Divisons alors chacun des intervalles $[x_j, x_{j+1}]$, $j = 1, 2, \dots, n+1$ en m parties égales, m étant un nombre naturel > 2 et vérifiant l'inégalité

$$(42) m > \frac{n+1}{\varepsilon} \max_{j=1, 2, \dots, n+1} (x_{j+1} - x_j).$$

Soient $y_1 < y_2 < \dots < y_{(n+1)m+1}$ tous les points de division ainsi obtenus. Nous avons donc $x_i = y_{(i-1)m+1}$, $i = 1, 2, \dots, n+2$ et, compte tenant de (42),

$$(43) y_{i+n+1} - y_i \leq \frac{n+1}{m} \max_{j=1, 2, \dots, n+1} (x_{j+1} - x_j) < \varepsilon$$

$$i = 1, 2, \dots, (n+1)m - n$$

Soient $[y_r, y_{r+1}, \dots, y_{r+n+1}; f]$ l'une des plus petite et $[y_s, y_{s+1}, \dots, y_{s+n+1}; f]$ l'une des plus grandes des différences divisées $[y_i, y_{i+1}, \dots, y_{i+n+1}; f]$, $i = 1, 2, \dots, (n+1)m - n$. La formule (40) nous donne

$$(44) [y_r, y_{r+1}, \dots, y_{r+n+1}; f] \leq [x_1, x_2, \dots, x_{n+2}; f] \leq [y_s, y_{s+1}, \dots, y_{s+n+1}; f].$$

Nous allons distinguer deux cas :

Cas 1. — Les égalités n'ont pas lieu dans (44). Alors en appliquant le théorème 4 pour

$$A = [y_r, y_{r+1}, \dots, y_{r+n+1}; f], B = [y_s, y_{s+1}, \dots, y_{s+n+1}; f], \\ C = [x_1, x_2, \dots, x_{n+2}; f],$$

compte tenant de la remarque faite à la démonstration du théorème 1, dont les hypothèses sont ici vérifiées et compte tenant de (43), la propriété en résulte.

Cas 2. — Les deux inégalités (44) se transforment en égalités. Nous avons alors $[x_1, x_2, \dots, x_{n+2}; f] = [y_2, y_3, \dots, y_{n+3}; f]$ où $x_1 < y_2 < y_{n+3} < x_{n+2}$ et la propriété résulte encore de (43).

On démontre maintenant facilement l'existence du point ξ . Le raisonnement précédent nous montre qu'on peut trouver les suites de $n+2$ points $x_1^{(j)} < x_2^{(j)} < \dots < x_{n+2}^{(j)}$, $j=1, 2, \dots$ tel qu'en supposant $x_1 < x_2 < \dots < x_{n+2}$, on ait $[x_1, x_2, \dots, x_{n+2}; f] = [x_1^{(j)}, x_2^{(j)}, \dots, x_{n+2}^{(j)}; f]$, $j=0, 1, \dots$, $x_i^{(0)} = x_i$, $i=1, 2, \dots, n+2$ et $x_1^{(j)} < x_1^{(j+1)}$, $x_{n+2}^{(j)} < x_{n+2}^{(j+1)}$, $x_{n+2}^{(j+1)} - x_1^{(j+1)} < \frac{1}{2} (x_{n+2}^{(j)} - x_1^{(j)})$, $j=0, 1, \dots$. Le point commun ξ des intervalles fermés $[x_1^{(j)}, x_{n+2}^{(j)}]$, $j=1, 2, \dots$ vérifie la propriété cherchée.

Le théorème 7 est donc démontré.

On voit que le point ξ jouit aussi de la propriété qu'on peut toujours choisir les points x_i de manière que ξ soit à l'intérieur du plus petit intervalle contenant ces points.

La propriété exprimée par le théorème 7, tout au moins dans le cas particulier (21), (21'), est du à A. CAUCHY [2].

15. — Nous pouvons compléter le théorème 7, en remarquant qu'on peut toujours choisir les points x_i équidistants. En appliquant la propriété à la fonction $f - [x_1, x_2, \dots, x_{n+2}; f] f_{n+1}$, on voit qu'il suffit de démontrer que si nous avons

$$(45) \quad [x_1, x_2, \dots, x_{n+2}; f] = 0, x_1 < x_2 < \dots < x_{n+2}$$

on peut trouver $n+2$ points équidistants x'_i , $i=1, 2, \dots, n+2$, compris dans l'intervalle formé $[x_1, x_{n+2}]$ tel que l'on ait (41).

Nous distinguons deux cas :

Cas 1. — Parmi les différences divisées sur des noeuds équidistants et compris dans $[x_1, x_{n+2}]$, il y a au moins une qui est positive et au moins une qui est négative.

Dans ce cas la propriété résulte puisqu'on peut construire, par le procédé employé pour la démonstration du théorème 1, une différence divisée sur des noeuds équidistants qui soit nulle.

Cas 2. — Toutes les différences divisées sur des noeuds équidistants et compris dans $[x_1, x_{n+2}]$ sont du même signe. Nous allons montrer que alors la fonction f , supposée toujours continue, est non-concave ou non-convexe sur $[x_1, x_{n+2}]$. Pour fixer les idées, supposons que les différences

divisées sur des noeuds équidistants soient toutes ≥ 0 (≤ 0). Du théorème 6 il résulte que toutes les différences divisées sur des noeuds qui se divisent rationnellement (dont les rapports des distances mutuelles sont rationnels) sont ≥ 0 (≤ 0). De la continuité de la fonction f résulte alors que toutes les différences divisées sont ≥ 0 (≤ 0). La fonction f est donc non-concave (non-convexe) sur $[x_1, x_{n+2}]$.

La propriété cherchée résulte alors du

Lemme 1. — Si la fonction continue f est non-concave sur l'intervalle $[x_1, x_{n+2}]$ et si nous avons (45), toutes les différences divisées de la fonction f sur des noeuds appartenant à $[x_1, x_{n+2}]$, sont nulles.

Pour la démonstration supposons que la propriété ne soit pas vraie. Il existerait alors des points distincts x'_i tels que $[x'_1, x'_2, \dots, x'_{n+2}; f] > 0$. La réunion des ensembles des points x_i, x'_i , $i=1, 2, \dots, n+2$ forme une suite d'au moins $n+3$ et d'au plus $2n+4$ points distincts de l'intervalle $[x_1, x_{n+2}]$. En appliquant le théorème 6, avec les conséquences concernant les cas où l'égalité a lieu dans (40), et successivement aux suites partielles $x'_1, x'_2, \dots, x'_{n+2}; x_1, x_2, \dots, x_{n+2}$, on arrive à une contradiction avec (45).

Enfin si nous tenons compte des résultats de D. V. WIDDER [28], nous pouvons affirmer que l'égalité (41) peut être réalisée avec des noeuds équidistants x'_i , la distance δ de deux noeuds consécutifs étant suffisamment petite. Dans le cas où l'intervalle $E \supset [x_1, x_{n+2}]$, le théorème de la moyenne de D. V. Widder affirme qu'on peut réaliser le résultat précédent avec des noeuds x'_i équidistants pour lesquels la distance δ est plus petite qu'un nombre fixe, indépendant de la fonction f .

16. — Avant d'aller plus loin nous remarquerons que le théorème 7 peut être en défaut si les fonctions (19) ne forment pas un système (I). Considérons les fonctions

$$f_i = x^{i+1}, i=0, 1, \dots, n$$

sur un intervalle E contenant le point 0. Ces fonctions ne forment pas un système (I). La fonction $f_{n+1} = 1$ est convexe ou concave (convexe si n est impair et concave si n est pair), dans le sens de la définition non-symétrique de la convexité. Nous avons $[x_1, x_2, \dots, x_{n+2}; x^{n+2}] = (-1)^{n+1} x_1 x_2 \dots x_{n+2}$. Si donc pour la fonction continue x^{n+2} nous avons l'égalité (41) où l'un des points x_i coïncide avec 0, l'un des points x'_i coïncidera aussi nécessairement avec 0. Il en résulte facilement que le théorème 7 est en défaut.

17. — On peut étendre les résultats de ce § aussi au cas où les noeuds ne sont plus distincts.

Supposons que, non seulement les fonctions (18), mais aussi les fonctions (19) forment des systèmes (I) réguliers d'ordre k .

Le théorème 6 peut être étendu au cas où les points $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_m$ ($m \geq n+2$) ne sont pas tous distincts et le même point se répète au plus k fois. Pour la suite il nous suffira de nous occuper de l'extension de la formule (35) et nous allons montrer que cette formule reste valable si $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_{n+3}$, le même point se répétant au plus k fois. De plus les

coefficients A, B respectifs, de sommes égales à 1, restent indépendants de la fonction f et sont positifs si $x_1 < x_i < x_{n+3}$ (ce qui implique $1 < i < n+3$).

La formule cherchée s'écrit

$$(46) \quad [z_1, z_1, \dots, z_1, z_2, z_2, \dots, z_2, \dots, z_p, z_p, \dots, z_p; f] = \\ = A^* [z_1, z_1, \dots, z_1, z_2, z_2, \dots, z_2, \dots, z_p, z_p, \dots, z_p; f] + \\ + B^* [z_1, z_1, \dots, z_1, z_2, z_2, \dots, z_2, \dots, z_p, z_p, \dots, z_p; f]$$

où nous pouvons supposer $p \geq 3$ et nous avons

$$k_r = k_r' = k_r'' = k_r, r = 2, 3, \dots, j-1, j+1, \dots, p-1, 2 \leq j \leq p-1 \text{ (si } p > 3) \\ k_1' = k_1'' = k_1, k_j' = k_j'' = k_j, k_p' = k_p'' = k_p, k_1' = k_1 - 1, k_j' = k_j - 1, k_p' = k_p - 1, \\ 1 \leq k_r \leq k, r = 1, 2, \dots, p, k_1 + k_2 + \dots + k_p = n+3.$$

Cette formule s'obtient des formules (35)–(37), en supposant $x_1 < x_2 < \dots < x_{n+3}$ et en faisant

$$(47) \quad x_{k_1+k_2+\dots+k_{r-1}+s} = x_s^{(r)} \rightarrow z_r, s = 1, 2, \dots, k_r (k_0 = 0), \\ r = 1, 2, \dots, p,$$

$$z_1 < z_2 < \dots < z_p, i = k_1 + k_2 + \dots + k_j.$$

On voit facilement comment il faut modifier la formule si $k_1 = 1, k_j = 1$ ou $k_p = 1$.

Il résulte immédiatement que A^*, B^* sont indépendants de la fonction f et que $A^* \geq 0, B^* \geq 0, A^* + B^* = 1$. Il reste à démontrer que $A^* \neq 0, B^* \neq 0$. Pour le coefficient A^* ce fait résulte en remarquant, qu'avec les notations (47), il s'obtient du second membre de la formule (36), en divisant les quatre déterminant (1) qui figurent au numérateur et au dénominateur par l'expression (5) ($m = n+3$) multipliée respectivement par

$$\frac{V(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_{k_1-1}^{(1)})}{V(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_{k_1}^{(1)})} \cdot \frac{V(x_1^{(j)}, x_2^{(j)}, \dots, x_{k_j-1}^{(j)})}{V(x_1^{(j)}, x_2^{(j)}, \dots, x_{k_j}^{(j)})} \cdot \frac{V(x_1^{(p)}, x_2^{(p)}, \dots, x_{k_p-1}^{(p)})}{V(x_1^{(p)}, x_2^{(p)}, \dots, x_{k_p}^{(p)})} \\ \frac{V(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_{k_1-1}^{(1)})}{V(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_{k_1}^{(1)})} \cdot \frac{V(x_1^{(j)}, x_2^{(j)}, \dots, x_{k_j-1}^{(j)})}{V(x_1^{(j)}, x_2^{(j)}, \dots, x_{k_j}^{(j)})} \cdot \frac{V(x_1^{(p)}, x_2^{(p)}, \dots, x_{k_p-1}^{(p)})}{V(x_1^{(p)}, x_2^{(p)}, \dots, x_{k_p}^{(p)})} \\ \frac{V(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_{k_1-1}^{(1)})}{V(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_{k_1}^{(1)})} \cdot \frac{V(x_1^{(j)}, x_2^{(j)}, \dots, x_{k_j-1}^{(j)})}{V(x_1^{(j)}, x_2^{(j)}, \dots, x_{k_j}^{(j)})} \cdot \frac{V(x_1^{(p)}, x_2^{(p)}, \dots, x_{k_p-1}^{(p)})}{V(x_1^{(p)}, x_2^{(p)}, \dots, x_{k_p}^{(p)})}$$

et en passant à la limite. Plus haut les déterminants Vandermonde qui n'ont pas de sens (pour $k_1 = 1, k_j = 1$ ou $k_p = 1$) sont remplacés par 1.

Or, en effectuant ces divisions, d'une part on ne change pas la valeur du coefficient A et, d'autre part, chacun des déterminants (1) ainsi divisé

tend vers une limite bien déterminée et différente de 0. Il en résulte que $A^* \neq 0$. On démontre de la même manière que $B^* \neq 0$. La démonstration nous montre aussi que les coefficients A^*, B^* de la formule (46) sont bien déterminés par la condition d'être indépendants de la fonction f . Il est facile d'écrire les valeurs de ces coefficients à l'aide des déterminants (3).

18. — Nous pouvons étendre le théorème 7 au cas où les points x_i ne sont pas tous distincts. En effet, en supposant toujours que les fonctions (18) et les fonctions (19) soient continues et forment des systèmes (I) réguliers d'ordre k , le théorème 7 reste vrai si parmi les points x_i le même point se répète au plus k fois.

Pour démontrer cette propriété, en vertu même du théorème 7, il suffit de démontrer le

LEMME 2. — Si, sous les hypothèses précédentes, parmi les points x_i il y en a exactement p distincts, avec $2 \leq p \leq n+1$,

on peut trouver $n+2$ points $x'_i, i = 1, 2, \dots, n+2$, de manière que: 1° chacun se répète au plus k fois, 2° il y en a parmi eux au moins $p+1$ distincts, 3° ils soient tous compris dans le plus petit intervalle fermé contenant les points x_i , 4° l'égalité (41) soit vérifiée.

Pour simplifier disons qu'une différence divisée dont les noeuds distincts rangés dans l'ordre de grandeur croissant ont successivement l'ordre de multiplicité $k_1, k_2, \dots, k_p$ ($k_1 + k_2 + \dots + k_p = n+2$) est du type $(k_1, k_2, \dots, k_p)$. Les conditions 1°, 2° du lemme signifient que la différence divisée sur les noeuds x étant du type $(k_1, k_2, \dots, k_p)$ avec $1 \leq k_i \leq k, i = 1, 2, \dots, p, 2 \leq p \leq n+1$, on peut trouver les points x'_i tel que la différence divisée sur ces points soit du type $(k'_1, k'_2, \dots, k'_q)$, avec $1 \leq k'_i \leq k, i = 1, 2, \dots, q, q \geq p+1$.

Considérons donc la différence divisée sur les noeuds x_i et soit $(k_1, k_2, \dots, k_p)$ le type et C la valeur de cette différence divisée. Intercalons entre les deux premiers noeuds distincts un $(n+3)^{\text{ème}}$ noeud, différent de tous les autres. Appliquons la formule de la moyenne (46) à la suite des $n+3$ points ainsi obtenus, le nouveau noeud introduit étant celui qui est éliminé dans la différence divisée du premier membre. Au second membre figurent les différences divisées

$$(48) \quad [u_1, u_2, \dots, u_{n+2}; f], [v_1, v_2, \dots, v_{n+2}; f], \\ u_1 \leq u_2 \leq \dots \leq u_{n+2}, v_1 \leq v_2 \leq \dots \leq v_{n+2}, u_1 < u_{n+2}, v_1 < v_{n+2}$$

qui sont respectivement du type $(k_1, 1, k_2, k_3, \dots, k_{p-1}, k_p - 1), (k_1 - 1, 1, k_2, k_3, \dots, k_p)$, où il faut supprimer $k_1 - 1$ si $k_1 = 1$ et $k_p - 1$ si $k_p = 1$.

Nous devons maintenant distinguer trois cas :

Cas 1. — Les différences divisées (48) ont des valeurs différents. Alors l'une a une valeur $A < C$ et l'autre une valeur $B > C$. D'après la manière dont une différence divisée (27) s'obtient comme la limite des différences divisées sur des noeuds distincts, il résulte qu'on peut trouver les différences divisées

$$(49) \quad [u'_1, u'_2, \dots, u'_{n+2}; f], [v'_1, v'_2, \dots, v'_{n+2}; f]$$

sur des noeuds distincts et dont les valeurs sont des nombres A', B' respectivement aussi près qu'on veut des nombres A, B , donc en particulier tels que $A' < C < B'$. On voit facilement qu'on peut même trouver les noeuds de l'une des différences divisées (49) dans l'intervalle (u_1, u_{n+2}) et les noeuds de l'autre dans l'intervalle (v_1, v_{n+2}) . En appliquant le théorème 4 aux différences divisées (49) on peut trouver une différence divisée ayant la valeur C . On voit que les conditions 2°, 4° du lemme sont vérifiées.

Cas 2. — On a $k_1 + k_2 > 2$ et les deux différences divisées (48) sont égales. Alors toutes les deux sont égales à C et la première (si $k_1 > 1$) ou la seconde (si $k_2 > 1$) vérifie les conditions 2° et 4° du lemme.

Cas 3. — On a $k_1 = k_2 = 1$ et les deux différences divisées (48) sont égales à C . Il y a alors une différence divisée égale à C et du type $(1, 1, k_2, k_3, \dots, k_{p-1})$. Avec cette différence divisée on procède d'une manière analogue. On voit alors que si $k_{p-1} > 1$ on tombe sur le cas 1 ou 2 et si $k_{p-1} = 1$ on construit une différence divisée égale à C et du type $(1, 1, 1, k_2, k_3, \dots, k_{p-2})$. Puisqu'au moins un k_i est > 1 , après un nombre fini d'opérations de cette sorte on tombe sur le cas 1 ou 2.

Ainsi les conditions 2° et 4° du lemme sont réalisées. Remarquons que pendant la démonstration, d'une part, on ne dépasse jamais l'ordre k de multiplicité et, d'autre part, on ne sort jamais du plus petit intervalle fermé contenant les points x_i . Donc les conditions 1° et 3° du lemme sont aussi vérifiées.

Le lemme 2 est donc démontré.

De ce qui précède il résulte aussi le

THÉORÈME 8. — Si les fonctions (18) et les fonctions (19) sont continues et forment des systèmes (I) réguliers d'ordre k sur l'intervalle E et si la fonction f est continue et convexe, non-concave, non-convexe resp. concave par rapport aux fonctions (19),

la première, la seconde, la troisième resp. la quatrième inégalité (25) reste vraie lorsque les noeuds x_i ne sont pas tous confondus et chacun se répète au plus k fois.

D'ailleurs pour les fonctions non-concaves et les fonctions non-convexes la propriété résulte simplement par un passage à la limite et reste vraie lorsque les fonctions (18) et les fonctions (19) forment des systèmes (I) complètement réguliers mêmes si les noeuds x_i sont tous confondus.

Le théorème 8 résulte de l'extension du théorème 7 donnée dans ce no.

19. — Le théorème 7, étendu de la manière précédente permet de lier la structure d'une fonctionnelle linéaire de la forme simple aux propriétés différentielles des fonctions sur lesquelles elle est définie. Ainsi nous avons le

THÉORÈME 9. — Si: 1° les fonctions (18) et les fonctions (19) forment des systèmes (I) complètement réguliers sur l'intervalle E , 2° la fonctionnelle linéaire $R[f]$ est de la forme simple, 3° la fonction $f \in \mathcal{F}$ a une dérivée continue d'ordre $n+1$ à l'intérieur de E ,

on peut trouver, à l'intérieur de E , un point ξ tel que l'on ait

$$(50) \quad R[f] = R[f_{n+1}] \underbrace{[\xi, \xi, \dots, \xi; f]}_{n+2}.$$

La démonstration résulte immédiatement du théorème 7 et des propriétés limites des différences divisées avec des noeuds multiples. Le point ξ est l'un de ceux qui vérifie le théorème 7.

La différence divisée du second membre de (50) peut se calculer à l'aide de la formule (28) ou de la formule (29).

Nous n'avons pas l'intention d'approfondir davantage ces questions dans ce travail. Rappelons seulement que, dans le cas particulier (21), (21'), nous avons donné une généralisation du théorème 7 [18], qui permet de préciser encore davantage la liaison entre les propriétés du reste $R[f]$ et les propriétés différentielles de divers ordres de la fonction f .

§ 3.

20. — Dans ce § nous allons examiner quelques critères simples qui permettent de décider si une fonctionnelle linéaire $R[f]$ est ou non de la forme simple. Nous ferons des applications au reste de quelques formules d'approximation (*).

La combinaison linéaire (11) peut être employé pour trouver une formule d'approximation de la forme (*).

Soit $A[f]$ une fonctionnelle linéaire définie sur l'espace vectoriel $\mathcal{F}$ formé par des fonctions continues définies sur l'intervalle E et dont les dérivées de tout ordre qui interviennent existent et sont continues sur E . Nous supposons que les fonctions (18) et les fonctions (19) appartiennent à $\mathcal{F}$ et, pour simplifier, qu'elles forment des systèmes (I) complètement réguliers. D'ailleurs pour la validité de certains résultats qui vont suivre, une régularité d'un ordre plus petit que $n+2$ resp. $n+1$ est en général suffisante.

Nous prenons comme approximation pour $A[f]$ la fonctionnelle, définie et linéaire sur $\mathcal{F}$.

$$(51) \quad B[f] = A[L(f|x)],$$

où $L(f|x)$ est donné par (11).

Ce procédé d'approximation est bien connu et a été beaucoup étudié, surtout dans divers cas particuliers.

Nous avons

$$L(f|x) = \sum_{i=1}^p \sum_{j=0}^{k_i-1} \varphi_{i,j}(x) f^{(j)}(z_i), \quad [f^{(0)}(x) = f(x)],$$

les points z_i , $i = 1, 2, \dots, p$, étant distincts et les $\varphi_{i,j}$, $j = 0, 1, \dots, k_i - 1$, $i = 1, 2, \dots, p$, étant des combinaisons linéaires bien déterminées des fonctions (19). Nous avons alors,

$$(52) \quad B[f] = \sum_{i=1}^p \sum_{j=0}^{k_i-1} a_{i,j} f^{(j)}(z_i),$$

où $a_{i,j} = A[\varphi_{i,j}]$, $j = 0, 1, \dots, k_i - 1$, $i = 1, 2, \dots, p$.

Il y a un cas particulier important où le reste $R[f]$ de la formule d'approximation ainsi obtenue est de la forme simple. Nous avons notamment le

THÉORÈME 10. — Si: 1° la fonctionnelle linéaire $A[f]$ est positive, 2° les ordres de multiplicités k de tous les points z_i qui se trouvent à l'intérieur de l'intervalle E , sont pairs,

le reste $R[f]$ de la formule d'approximation (*), construite de la manière précédente, est de la forme simple.

La fonctionnelle $A[f]$ est positive si nous avons $A[f] \geq 0$, pour toute fonction (continue) non-négative, l'égalité étant vraie (si et) seulement si $f = 0$ sur E .

La formule (16) nous donne

$$(53) \quad f(x) - L(f|x) = \psi(x)[x_1, x_2, \dots, x_{n+1}, x; f],$$

les x_i ayant la même signification que dans (16). Dans cette formule nous avons

$$\psi(x) = V \begin{pmatrix} f_0, f_1, \dots, f_n, f_{n+1} \\ x_1, x_2, \dots, x_{n+1}, x \end{pmatrix} : V \begin{pmatrix} f_0, f_1, \dots, f_n \\ x_1, x_2, \dots, x_{n+1} \end{pmatrix}$$

si x est différent d'un noeud x_i .

La formule (53) est vraie pour tout $x \in E$, à condition de remplacer le second membre par 0 si x coïncide avec l'un des noeuds x_i .

Nous avons

$$R[f] = A[f - L(f|x)] = A[\psi(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}, x; f)]$$

et le reste est bien de la forme simple, puisque: 1° la différence divisée qui figure dans le second membre de la formule (53) est, d'après le théorème 8, positive si f est une fonction convexe, sauf en au plus $n+1$ points (les points x_i) de E , 2° la fonction ψ n'est pas identiquement nulle et ne change pas de signe sur E . Cette propriété résulte du théorème 2 par un passage à la limite, 3° la fonction $f - L(f|x)$ est continue sur E . Il en résulte que cette dernière fonction n'est pas identiquement nulle et ne change pas de signe sur E si f est une fonctions convexe. Le théorème 10 en résulte immédiatement.

Le reste est de la forme (30) et si la $(n+1)^{\text{ème}}$ dérivée de f existe et est continue sur l'intérieur de E , même de la forme indiquée dans le théorème 9. La constante $K = R[f_{n+1}]$ peut aussi se calculer à l'aide de la formule $K = R[\psi]$, ou à l'aide de toute formule $K = R[\psi + \varphi]$, où φ est une combinaison linéaire des fonctions (19).

Il est facile de généraliser le résultat précédent dans le cas où on suppose que les fonctions (18) et les fonctions (19) forment des systèmes (I) réguliers d'ordre $k \geq \max(k_1, k_2, \dots, k_p)$. Enfin il est clair qu'une propriété analogue subsiste pour une fonctionnelle $A[f]$ négative, pour laquelle donc $A[f] \leq 0$, pour toute fonction f non-négative, l'égalité étant toujours vraie seulement pour $f = 0$.

Remarquons que de nombreuses formules d'approximation classiques, des soidisants formules de quadrature numérique (ou mécanique), sont

de la forme précédente. Quelques cas particuliers seront rappelés plus loin.

21. — La formule de quadrature numérique bien connue

$$(54) \quad A[f] = \int_0^{2\pi} f(x)dx = \frac{2\pi}{m+1} \sum_{i=0}^m f\left(\frac{2i\pi}{m+1}\right) + R[f]$$

où m est un nombre naturel et f une fonction continue dans l'intervalle fermé $[0, 2\pi]$, est de la forme précédente.

Dans ce cas $R[f]$ est nul sur les fonctions

$$(55) \quad f_0 = 1, f_{2i-1} = \cos ix, f_{2i} = \sin ix, i = 1, 2, \dots, m$$

auxquelles se réduisent maintenant les fonctions (19). Nous avons déjà démontré (no. 3) que les fonctions (55) forment un système (I) complètement régulier sur l'intervalle $[0, 2\pi]$. Cette propriété est équivalente au fait qu'un polynôme trigonométrique du degré m ne peut avoir $2m+1$ racines, distincts ou non, dans l'intervalle $[0, 2\pi]$, sans être identiquement nul.

Considérons aussi la fonction

$$(55') \quad f_{2m+1} = x.$$

Alors les fonctions (55), (55') forment aussi un système (I) complètement régulier sur $[0, 2\pi]$. En effet, une combinaison linéaire non identiquement nulle φ des fonctions (55), (55') ne peut avoir plus de $2m+1$ racines distinctes ou non dans $[0, 2\pi]$. Dans le cas contraire, la dérivée φ' , qui est un polynôme trigonométrique du degré m , aurait au moins $2m+1$ racine distinctes ou non dans $[0, 2\pi]$. Il en résulterait $\varphi' = 0$, donc φ serait une constante $\neq 0$, ce qui est impossible.

La formule (54) est bien de la forme précédente. Pour l'obtenir il suffit de prendre la fonction $L(f|x)$ (polynôme d'interpolation trigonométrique du type Lagrange-Hermite) relativement au noeud simple 0 et aux noeuds doubles $\frac{2i\pi}{m+1}$ $i = 1, 2, \dots, m$. Il est d'ailleurs facile de vérifier que (54) est la seule formule de la forme

$$\int_0^{2\pi} f(x)dx = Af(0) + \sum_{i=1}^m \left[\alpha_i f\left(\frac{2i\pi}{m+1}\right) + \beta_i f'\left(\frac{2i\pi}{m+1}\right) \right] + R[f]$$

dans lesquelles les A, α_i, β_i sont indépendants de la fonction f et dont le reste $R[f]$ s'annule sur les fonctions (55).

Le reste de la formule (54) est de la forme simple et nous avons

$$R[f] = \frac{2\pi^2}{m+1} [\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{2m+2}; f]$$

la fonction f étant continue sur $[0, 2\pi]$, ayant une dérivée continue sur $(0, 2\pi)$ et les points $\xi_i \in (0, 2\pi)$, $i = 1, 2, \dots, 2m+2$ étant distincts. Lors-

que f a une dérivée continue d'ordre $2m + 1$ sur $(0, 2\pi)$, nous retrouvons le reste donné par J. RADON [21]. Dans notre cas

$$[\xi, \xi, \dots, \xi; f] = \frac{1}{(m!)^2} \left[\frac{d}{dx} \left(\frac{d^2}{dx^2} + 1^2 \right) \left(\frac{d^2}{dx^2} + 2^2 \right) \dots \left(\frac{d^2}{dx^2} + m^2 \right) f \right]_x =$$

22. — La formule (54) est une analogue trigonométrique de la formule d'intégration numérique classique de Gauss,

$$(56) \quad \int_{-1}^{+1} f(x) dx = \sum_{i=1}^m \alpha_i f(\zeta_i) + R[f]$$

où $\zeta_i, i = 1, 2, \dots, m$ sont les racines, toutes réelles, distinctes et comprises dans $(-1, 1)$, du polynome $P(x) = \frac{m!}{(2m)!} \frac{d^m}{dx^m} (x^2 - 1)^m$ et dont le reste s'annule sur tout polynome du degré $2m - 1$. La formule (56) est relative au cas particulier (21), (21') et pour l'obtenir il suffit de prendre la fonction $L(f|x)$ (polynome d'interpolation de Lagrange-Hermite) relativement aux noeuds doubles $\zeta_i, i = 1, 2, \dots, m$. D'après le théorème 10, le reste est de la forme simple et nous avons ($n = 2m - 1$),

$$R[x^{n+1}] = R[P^2] = \int_{-1}^1 P^2 dx = \frac{2^{2m+1} (m!)^4}{(2m+1) [(2m)!]^2}$$

Le reste est donc de la forme

$$(57) \quad R[f] = \frac{2^{2m+1} (m!)^4}{(2m+1) [(2m)!]^2} [\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{2m+1}; f]$$

la fonction f étant continue sur $[-1, 1]$, ayant une dérivée continue sur $(-1, 1)$ et les $\xi_i \in (-1, 1), i = 1, 2, \dots, 2m + 1$ étant distincts.

L'existence et la continuité de la dérivée de f dans l'étude de la simplicité du reste des formules (54) et (56) sont imposées par la méthode particulière par laquelle nous avons établi cette simplicité. On peut démontrer que l'hypothèse de l'existence de la dérivée est superflue, ce que nous montrerons effectivement pour la formule de Gauss plus loin.

23. — Considérons une fonctionnelle linéaire de la forme

$$(58) \quad R[f] = \sum_{i=1}^p \sum_{j=0}^{k_i-1} c_{i,j} f^{(j)}(z_i)$$

où, $k_1, k_2, \dots, k_p \geq 1, k_1 + k_2 + \dots + k_p = m \geq n + 2, z_1 < z_2 < \dots < z_p$ sont des points de l'intervalle E et les $c_{i,j}$ sont des coefficients indépendants de la fonction f . L'espace $(\mathcal{F})$ de définition de la fonctionnelle est formé par les fonctions f dont la dérivée d'ordre $\max(k_1 - 1, k_2 - 1, \dots, k_p - 1)$ existe et est continue sur E . Nous supposons que les fonctions (18) et les fonctions (19), appartenant à $(\mathcal{F})$, forment des systèmes (I) réguliers d'ordre $\max(k_1, k_2, \dots, k_p)$.

Soient $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_m$ les points z_i comptés avec leurs ordre de multiplicités respectifs. La fonctionnelle (58) peut aussi s'écrire sous la forme

$$R[f] = R_1[f] + \sum_{i=1}^{m-n-1} \mu_i [x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+n+1}; f],$$

où les μ_i sont des coefficients indépendants de la fonctions f .

$R_1[f]$ est une expression analogue à (58), mais où ne figurent que les valeurs de la fonctions f et ses dérivées successives sur les $n + 1$ premiers noeuds $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$ (distincts ou non).

Si nous remarquons que dans la différence divisée (27) (où les z_i sont distincts) les coefficients de $f^{(k_i-1)}(z_i), i = 1, 2, \dots, p$ sont toujours différents de 0, nous voyons que les coefficients μ_i et la fonctionnelle linéaire $R_1[f]$ sont déterminés complètement par la fonctionnelle linéaire (58).

Pour que la fonctionnelle linéaire (58) soit nulle sur les fonctions (19) il faut et il suffit que $R_1[f]$ soit nul identiquement. La condition est évidemment suffisante (formule (23)). Elle est aussi nécessaire puisqu'on peut annuler successivement chacun des coefficients de $R_1[f]$, en choisissant pour f une combinaison linéaire convenable des fonctions (19). Il en résulte d'abord la formule $R_1[f] = R[L(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}; f|x)]$ et aussi le

LEMME 3. — Pour que la fonctionnelle linéaire (58) soit nulle sur les fonctions (19), il faut et il suffit qu'elle soit de la forme

$$(59) \quad R[f] = \sum_{i=1}^{m-n-1} \mu_i [x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+n+1}; f],$$

où les coefficients μ_i sont bien déterminés et indépendants de la fonction f .

De la résulte aussi le

THÉORÈME 11. — Si 1° les fonctions (18) et les fonctions (19) forment des systèmes (I) complètement réguliers sur l'intervalle E , 2° la fonctionnelle linéaire (58) est nulle sur les fonctions (19), 3° dans la représentation (59) de cette fonctionnelle linéaire, les coefficients μ_i sont du même signe (tous ≥ 0 ou tous ≤ 0), 4° en supposant $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_m$, on a

$$\sum_{i=1}^{m-n-1} \mu_i (x_{i+n+1} - x_i) \neq 0,$$

la fonctionnelle linéaire (58) est de la forme simple.

On suppose $m > n + 2$. La condition 4° signifie que pour au moins un i le coefficient μ_i est $\neq 0$ et en même temps les noeuds $x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+n+1}$ ne sont pas tous confondus. La démonstration du théorème 11 résulte maintenant facilement. En effet, pour une fonction convexe tous les termes de la somme (59) sont du même signe dont au moins un, d'après le théorème 8, est $\neq 0$.

Le résultat est valable aussi pour $m = n + 2$, en supprimant dans le théorème la condition 3°.

On voit que la condition $n + 2 \leq k_1, k_2, \dots, k_p$ est essentielle. Cette condition est vérifiée, en particulier, par la fonctionnelle linéaire (59). Mais,

si la condition n'est pas satisfaite la fonctionnelle linéaire (58) peut ne pas être de la forme indiquée, donc le théorème 11 peut ne pas avoir lieu.

24. — Dans le cas particulier (21), (21') nous pouvons donner des résultats plus complets. Dans ce cas on peut distinguer des convexités d'ordre succesif $n = -1, 0, 1, \dots$, et la notion de simplicité d'une fonctionnelle linéaire est liée à son degré d'exactitude.

On dit que la fonctionnelle linéaire $R[f]$ (ou la formule d'approximation correspondante dont il est le reste) a le *degré d'exactitude* (l'entier) $n \equiv -1$ si $R[x^i] = 0, i = 0, 1, \dots, n, R[x^{n+1}] \neq 0$. Ici nous posons $n = -1$ si $R[1] \neq 0$ et $n = \infty$ si $R[x^i] = 0$, pour $i = 0, 1, \dots$. Le degré d'exactitude (fini ou non) est toujours déterminé complètement. D'ailleurs dans la suite nous ne considérons que des fonctionnelles linéaires ayant un degré d'exactitude fini et qui sont définies, en particulier, sur tout polynome. Pour qu'une telle fonctionnelle linéaire ait un degré d'exactitude fini il faut et il suffit qu'elles ne soit pas nulle sur tout polynome. Par ex., la fonctionnelle linéaire (58), supposée non identiquement nulle (plus exactement avec des coefficients $c_{i,j}$ non tous nuls), a un degré d'exactitude fini. En effet, sans restreindre la généralité, on peut supposer que l'un des coefficients $c_{i, k_i-1}, i = 1, 2, \dots, p$ soit $\neq 0$. Soit, pour fixer les idées, $c_{r, k_r-1} \neq 0$. On voit alors facilement que $R\left[\frac{1}{x-z_r} \prod_{i=1}^p (x-z_i)^{k_i}\right] \neq 0$.

Pour qu'une fonctionnelle linéaire puisse être de la forme simple il faut qu'elle ait un degré d'exactitude fini.

Nous allons démontrer le

THÉOREME 12. — En supposant $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_{n+3}$, pour que la fonctionnelle linéaire

$$(60) \quad R[f] = \mu_1[x_1, x_2, \dots, x_{n+2}; f] + \mu_2[x_2, x_3, \dots, x_{n+3}; f],$$

(les coefficients μ_1, μ_2 étant indépendants de la fonction f) soit de la forme simple, il faut et il suffit que l'une des deux conditions suivantes soit vérifiée :

1°. Les noeuds x_i ne sont pas tous confondus et $\mu_1 = -\mu_2 \neq 0$

2°. $(x_{n+2} - x_1)\mu_1 + (x_{n+3} - x_2)\mu_2 \neq 0, \mu_1 \mu_2 \geq 0$.

De la condition 2° il résulte aussi que les noeuds ne sont pas tous confondus. De plus, si les $n+2$ premiers resp. les $n+2$ derniers noeuds sont confondus, le coefficient μ_2 resp. le coefficient μ_1 est $\neq 0$.

Pour démontrer le théorème il faut et il suffit de vérifier que dans les cas 1° et 2° de l'énoncé la fonctionnelle est de la forme simple tandis que dans les autres cas possibles elle n'est pas de la forme simple. Ces autres cas possibles sont les suivants :

3°. Les noeuds x_i sont tous confondus.

4°. Les noeuds x_i ne sont pas tous confondus et $\mu_1 \mu_2 \geq 0, (x_{n+2} - x_1)\mu_1 + (x_{n+3} - x_2)\mu_2 = 0$,

5°. Les noeuds x_i ne sont pas tous confondus et $\mu_1 \mu_2 < 0, \mu_1 + \mu_2 \neq 0$.

Nous allons examiner chacun de ces 5 cas.

1°. Dans ce cas l'expression (60) peut s'écrire

$$\mu_2(x_{n+3} - x_1) [x_1, x_2, \dots, x_{n+3}; f].$$

Elle a le degré d'exactitude $n+1$ et est de la forme simple en vertu du théorème 8.

2°. La propriété résulte du théorème 11.

3°. Conformément à la définition des différences divisées sur des noeuds non tous confondus, l'expression (60) est de la forme $(\mu_1 + \mu_2) [x_1, x_2, \dots, x_{n+2}; f]$. La fonctionnelle linéaire est alors : 3° ou bien identiquement nulle, donc n'est pas de la forme simple, 3''° ou bien

a le degré d'exactitude n , mais s'annule sur la fonction $|x - x_1| (x - x_1)^{n+1}$, qui est convexe d'ordre n , donc n'est pas de la forme simple.

4°. L'un au moins des coefficients μ_1, μ_2 est nul et la fonctionnelle linéaire (60) est : 4° ou bien nulle identiquement, 4''° ou bien de la forme précédente 3°. Dans ce cas encore la fonctionnelle n'est pas de la forme simple.

5°. Le degré d'exactitude est n et nous pouvons désigner par $z_1 < z_2 < \dots < z_p$ les noeuds distincts, k_i étant l'ordre de multiplicité de z_i . Nous avons $1 \leq k_1, k_2, \dots, k_p \leq n+2, k_1 + k_2 + \dots + k_p = n+3$. Considérons les fonctions

$$(61) \quad \psi_1 = -\left(\frac{x - \lambda_1 - |x - \lambda_1|}{2}\right)^{n+2}, \quad \psi_2 = \left(\frac{x - \lambda_2 + |x - \lambda_2|}{2}\right)^{n+2}$$

qui sont *non-concaves* d'ordre n et appartiennent à l'ensemble de définition ($\mathcal{F}$ de la fonctionnelle linéaire (60), tel que cet ensemble a été défini au no. 23. En effet les fonctions (61) ont (partout) des dérivées continues d'ordre $n+1$. Nous allons calculer $R[\psi_1]$ et $R[\psi_2]$, en supposant que $\lambda_1 \in (z_1, z_2)$ et $\lambda_2 \in (z_{p-1}, z_p)$. Il est inutile de reproduire ici en détail ce calcul. Nous avons

$$R[\psi_1] = \sum_{i=1}^{k_1-1} M_i (\lambda_1 - z_1)^{n+2-i} \quad (z_1 < \lambda_1 < z_2)$$

$$R[\psi_2] = \sum_{i=1}^{k_p-1} N_i (z_p - \lambda_2)^{n+2-i} \quad (z_{p-1} < \lambda_2 < z_p)$$

où

$$M_{k_1-1} = \frac{\binom{n+2}{k_1-1} \mu_1}{\left[\prod_{i=2}^{p-1} (z_i - z_1)^{k_i}\right] (z_p - z_1)^{k_p-1}}, \quad N_{k_p-1} = \frac{\binom{n+2}{k_p-1} \mu_2}{\left[\prod_{i=2}^{p-1} (z_p - z_i)^{k_i}\right] (z_p - z_1)^{k_1-1}}$$

les autres coefficients M_i, N_i , indépendants de λ_1 et λ_2 , ayant des valeurs qu'il est inutile de calculer explicitement.

Remarquons que M_{k_1-1}, N_{k_p-1} sont différents de zéro et du même signe que μ_1, μ_2 respectivement. On voit alors qu'on peut trouver un λ_1 suffisamment près de z_1 et un λ_2 suffisamment près de z_p tels que l'on ait

$R[\psi_1] \cdot R[\psi_2] < 0$. D'une remarque faite au no. 10 il résulte que la fonctionnelle linéaire (60) ne peut être de la forme simple.

Le théorème 12 est complètement démontré.

La construction des fonction (61) dépend dans une certaine mesure de l'espace $\mathcal{F}$. Si cet espace est plus restreint, par ex. s'il ne contient que des fonctions indéfiniment dérivables sur E , il faut remplacer les fonctions (61) par d'autres fonctions convenables. On peut éviter cette modification à l'aide de critères analogues à ceux étudiés plus loin (voir no. 30).

25. — Toujours dans le cas particulier (21), (21'), si $R[f]$ est une fonctionnelle linéaire définie sur $\mathcal{F}$, $R^*[f] = R[f']$ est une fonctionnelle linéaire définie sur l'ensemble $\mathcal{F}^*$ des fonctions continues et dérivables dont la dérivée appartient à $\mathcal{F}$. On voit facilement que si $R[f]$ est du degré d'exactitude $n (\geq -1)$, $R^*[f]$ est du degré d'exactitude $n + 1$.

Nous avons aussi le

THÉORÈME 13. — *Sous les hypothèses précédentes, pour que $R[f]$ soit de la forme simple il faut et il suffit que $R^*[f]$ soit de la forme simple.*

La démonstration est immédiate. Il suffit de remarquer que la dérivée d'une fonction convexe d'ordre n est une fonction convexe d'ordre $n - 1$ et que toute primitive d'une telle fonction est une fonction convexe d'ordre $n + 1$.

26. — Pour faire une application, considérons la formule de quadrature numérique

$$(62) \quad \int_a^b f(x) dx = \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i f^{(i)}(a) + \sum_{i=0}^{l-1} \beta_i f^{(i)}(c) + \sum_{i=0}^{m-1} \gamma_i f^{(i)}(b) + R[f]$$

où f est une fonction continue sur $[a, b]$ ayant les dérivées prescrites continues et $a < c < b$.

Dans la suite nous supposons que le reste de la formule (62) soit nul sur tout polynôme du degré $n - 1 = k + l + m - 1 \neq 0$. Alors la formule rentre dans la catégorie de celles considérées au no. 20. Les nombres k, l, m peuvent être nuls, ce qui signifie que la somme correspondante (donc le point a, c ou b correspondant) n'intervient pas dans le second membre de (62).

Des cas particuliers de la formule (62) ont été étudiés par d'autres méthodes et par divers auteurs, en particulier par K. PETR [10, 11], G. N. WATSON [27], N. OBRÉŠCHKOFF [9].

En vertu du théorème 10, le reste est de la forme simple si l est un nombre pair, en particulier donc si $l = 0$. Nous retrouverons ce résultat plus loin à l'aide des théorèmes 12 et 13.

On voit facilement que $R[f]$ a un degré d'exactitude fini qui est, d'ailleurs, égal à $n - 1$ ou à n . La fonctionnelle linéaire $R^*[f] = R[f']$ est bien de la forme (58), avec des noeuds non pas tous confondus, leur nombre total étant $n + 2$ si $l = 0$ et $n + 3$ si $l > 0$. Nous pouvons donc discuter la simplicité du reste à l'aide des théorèmes 12 et 13.

$R[f]$ est du degré d'exactitude n si et seulement si

$$(63) \quad P(c) = \int_a^b (x-a)^k (x-c)^l (b-x)^m dx = 0.$$

Cette équation algébrique (du degré l) en c n'a aucune racine réelle dans (a, b) (et d'ailleurs sur l'axe réelle) si l est pair et a une seule racine réelle c^* qui est dans (a, b) si l est impair. On obtient ce résultat en remarquant que l'équation dérivée $P'(c) = 0$ est de la même forme. $R[f]$ est donc du degré d'exactitude n si et seulement si l est impair et $c = c^*$.

Le théorème 11 nous montre que si $l = 0$, $R^*[f]$ est du degré d'exactitude n et est de la forme simple. Donc $R[f]$ est du degré d'exactitude $n - 1$ et de la forme simple. De la même manière on voit que si l est impair et $c = c^*$ elle est du degré d'exactitude n et encore de la forme simple.

Pour étudier les autres cas possibles il faut calculer les coefficients μ_1, μ_2 de la formule (60) correspondant à $R^*[f]$. Des calculs, que nous ne reproduisons pas en détail, nous donnent

$$\mu_1 = (-1)^{l+m} k! (c-a)^{l+1} (b-c)^m \alpha_{k-1}, \quad \mu_2 = -m! (b-a)^k (b-c)^{l+1} \gamma_{m-1},$$

où

$$\alpha_{k-1} = \frac{(-1)^l}{(k-1)! (c-a)^l (b-a)^m} \int_a^b (x-a)^{k-1} (x-c)^l (b-x)^m dx, \quad (k > 0)$$

$$\gamma_{m-1} = \frac{(-1)^{l-1}}{(m-1)! (b-a)^k (b-c)^l} \int_a^b (x-a)^k (x-c)^l (b-x)^{m-1} dx, \quad (m > 0)$$

$$\alpha_{-1} = 1, \quad \gamma_{-1} = -1, \quad (0! = 1).$$

En appliquant le théorème 12 nous voyons que si $l > 0$ et si le reste $R[f]$ est du degré d'exactitude $n - 1$, il est de la forme simple si et seulement si $\mu_1 \mu_2 > 0$. Cette condition est bien vérifiée si l est un nombre pair.

Si l est impair et $k > 0$ il y a dans (a, b) une valeur de c et une seule c_1 pour laquelle $\mu_1 = 0$ et si $m > 0$ une valeur et une seule c_2 pour laquelle $\mu_2 = 0$.

Nous avons $c_1 < c^* < c_2$. Pour démontrer la première inégalité il suffit de remarquer que pour le polynôme (63) nous avons

$$P(a) > 0, \quad P(c_1) = \int_a^b (x-a)^{k-1} (x-c_1)^{l+1} (b-x)^m dx > 0.$$

On démontre de la même manière la seconde inégalité.

On voit maintenant que si $c_1 < c < c_2$ nous avons $\mu_1 \mu_2 < 0$ et si $c \leq c_1$ ou $c_2 \leq c$ nous avons $\mu_1 \mu_2 \geq 0$. Les résultats subsistent aussi lorsque $k=0$ en prenant $c_1=a$ et lorsque $m=0$ en prenant $c_2=b$.

Le reste $R[f]$ de la formule (62) est donc de la forme simple dans les cas et seulement dans les cas suivants :

- 1° l impair, $c = c^*$.
- 2° l impair, $a < c \leq c_1$ ou $c_2 \leq c < b$.
- 3° l pair.

Dans le cas 1°, le reste est de la forme

$$R[f] = K^* [\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{k+l+m+2}; f]$$

et dans les cas 2°, 3° de la forme

$$R[f] = K [\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{k+l+m+1}; f]$$

où ξ_i sont des points distincts de l'intervalle (a, b) et

$$K^* = \int_a^b (x-a)^k (x-c^*)^{l+1} (x-b)^m dx, \quad K = \int_a^b (x-a)^k (x-c)^l (x-b)^m dx.$$

Dans le cas „symétrique” $k = m$, nous avons $c^* = \frac{1}{2}(a+b)$ et $c_1 + c_2 = a+b$.

Dans le cas $l = 1$,

$$c_1 = \frac{(m+1)a+kb}{m+k+1}, \quad c^* = \frac{(m+1)a+(k+1)b}{m+k+2}, \quad c_2 = \frac{ma+(k+1)b}{m+k+1}$$

On peut démontrer que dans les mêmes cas la simplicité du reste a lieu si la fonction f est supposée seulement continue sur $[a, b]$, ayant sur les points a, c, b les dérivées qui figurent effectivement au second membre de la formule (62). L'hypothèse de la continuité de la dérivée d'ordre $\max(k-1, l-1, m-1)$ a été imposée seulement par la définition adoptée pour les différences divisées sur des noeuds multiples et par le critère que nous avons utilisé pour prouver la simplicité du reste.

27. — Toujours dans le cas particulier (21), (21'), nous allons reprendre, en le précisant et en le complétant, un critère que nous avons déjà donné [15].

Posons

$$(64) \quad \varphi_{n+1, \lambda} = \left(\frac{x-\lambda+|x-\lambda|}{2} \right)^n$$

où n est un nombre naturel. C'est une fonction non-concave d'ordre n pour tout x . Sa dérivée d'ordre k existe si $0 \leq k \leq n-1$ et est continue pour tout x . Nous avons, d'ailleurs,

$$(65) \quad \varphi_{n+1, \lambda}^{(k)} = \frac{n!}{(n-k)!} \varphi_{n+1-k, \lambda} \quad (0 \leq k \leq n-1)$$

Soit n un nombre naturel et divisons l'intervalle fini et fermé $[a, b]$ en $m > 2n$ parties égales par les points

$$(66) \quad \lambda_i = a + ih, \quad i = 0, 1, \dots, m, \quad h = \frac{b-a}{m}$$

Désignons par

$$(67) \quad D_j^i[f] = [\lambda_i, \lambda_{i+1}, \dots, \lambda_{i+j}; f], \quad i=0, 1, \dots, m-j, \quad j=0, 1, \dots, m$$

les différences divisées (habituelles) de la fonction f sur des points (66) consécutifs.

Considérons les fonctions

$$(68) \quad \psi_m = f_m + Q_m$$

où

$$(69) \quad f_m = (n+1)h \sum_{i=0}^{m-n-1} D_{n+1}^i[f] \varphi_{n+1, \lambda_{i+n}},$$

$$(70) \quad Q_m = \frac{(-1)^n}{n!h^n} \left\{ \sum_{r=0}^n (-1)^r f(\lambda_r) \left[\sum_{i=0}^r (-1)^i \binom{n+1}{r-i} (x-\lambda_{i+n})^n \right] \right\}$$

La fonction (68) est continue et admet une dérivée continue d'ordre $n-1$ (donc de tout ordre $\leq n-1$) pour tout x . Elle se réduit à un polynôme du degré n dans chacun des intervalles $[\lambda_i, \lambda_{i+1}]$, $i=0, 1, \dots, m-1$. ψ_m est ce que nous avons appelé une *fonction élémentaire d'ordre n* .

Nous avons démontré [15] que si f est continue sur $[a, b]$, la suite $\{\psi_m\}$ converge uniformément dans tout l'intervalle $[a, b]$ vers f , pour $m \rightarrow \infty$. C'est cette propriété de convergence que nous allons compléter, dans le cas où la fonction f est dérivable un certain nombre de fois.

28. — Avant de donner l'énoncé et la démonstration du théorème 14, que nous établirons plus loin, il est nécessaire de faire quelques calculs préliminaires.

La formule de récurrence $D_j^i[f] = \frac{1}{jh} \{D_{j-1}^{i+1}[f] - D_{j-1}^i[f]\}$ permet d'établir diverses relations entre les différences divisées (67). Ainsi nous avons

$$(71) \quad (n+1)h D_{n+1}^i[f] = \frac{(-1)^{n+1-k} k!}{n!h^{n-k}} \sum_{j=0}^{n+1-k} (-1)^j \binom{n+1-k}{j} D_k^{i+j}[f]$$

Ici k est un entier tel que $0 \leq k \leq n+1$. Pour la suite il suffira de supposer que $0 \leq k \leq n-1$.

Compte tenant de la formule (71), la fonction (69) devient

$$(72) \quad f_m = \frac{(-1)^{n+1-k} k!}{n!h^{n-k}} \sum_{r=0}^{m-k} D_k^r[f] \left[(-1)^r \sum_{i=r-n+1+k}^r (-1)^i \binom{n+1-k}{r-i} \varphi_{n+1, \lambda_{i+n}} \right]$$

où $\varphi_{n+1, \lambda_{i+n}} = 0$ pour $i < 0$ et pour $i > j$ si $x \in [\lambda_{j+n}, \lambda_{j+n+1}]$, $j = -n, -n+1, \dots, m-n-1$.

Pour simplifier nous introduisons les notations

$$(73) \quad P_{r,u,v} = (-1)^r \sum_{i=u}^v (-1)^i \binom{n+1-k}{r-i} (x-\lambda_{i+n})^n.$$

Compte tenant de (73) nous trouvons

$$f_m = 0, \text{ pour } x \in [\lambda_0, \lambda_n]$$

$$f_m = \frac{(-1)^{n+1-k} k!}{n! h^{n-k}} \left[\sum_{r=0}^{n-k} D_k^r[f] P_{r,0,r} - \sum_{r=j+1}^{n-k} D_k^r[f] P_{r,j+1,r} + \right. \\ \left. + \sum_{r=n+1-k}^{n+1-k+j} D_k^r[f] P_{r,r-n+1+k,j} \right], \text{ pour } x \in [\lambda_{j+n}, \lambda_{j+n+1}],$$

$$j = 0, 1, \dots, n-k-1,$$

$$f_m = \frac{(-1)^{n+1-k} k!}{n! h^{n-k}} \left[\sum_{r=0}^{n-k} D_k^r[f] P_{r,0,r} + \sum_{r=n+1-k}^{2n-2k+1} D_k^r[f] P_{r,r-n+1+k,n-k} \right],$$

pour $x \in [\lambda_{2n-k}, \lambda_{2n-k+1}]$

$$f_m = \frac{(-1)^{n+1-k} k!}{n! h^{n-k}} \left[\sum_{r=0}^{n-k} D_k^r[f] P_{r,0,r} + \sum_{r=n+1-k}^j D_k^r[f] P_{r,r-n+1+k,r} + \right. \\ \left. + \sum_{r=j+1}^{n+1-k+j} D_k^r[f] P_{r,r-n+1+k,j} \right], \text{ pour } x \in [\lambda_{j+n}, \lambda_{j+n+1}],$$

$$j = n-k+1, n-k+2, \dots, m-n-1.$$

Pour mettre aussi le polynome (70) sous une forme convenable nous appliquons la formule de transformation

$$\sum_{r=0}^n c_r f(\lambda_r) = (-1)^k k! h^k \sum_{r=0}^{n-k} D_k^r[f] \left[\sum_{s=0}^r \binom{k+s-1}{s} c_{r-s} + \right. \\ \left. + (-1)^n \sum_{r=n+1-k}^n (-1)^r (n-r)! h^{n-r} D_{n-r}^r[f] \left[\sum_{s=0}^r \binom{n-r+s}{s} c_{r-s} \right] \right]$$

Prenons

$$c_r = (-1)^r \sum_{i=0}^r (-1)^i \binom{n+1}{r-i} (x - \lambda_{i+n})^n, \quad r = 0, 1, \dots, n,$$

compte tenant alors de la formule bien connue (voir par ex., E. NETTO [8])

$$\sum_{s=0}^t (-1)^s \binom{s+a}{s} \binom{b}{t-s} = \binom{b-a-1}{t}$$

nous déduisons

$$\sum_{s=0}^r \binom{k+s-1}{s} c_{r-s} = (-1)^r \sum_{i=0}^r (-1)^i \left[\sum_{s=0}^{r-i} (-1)^s \binom{k+s-1}{s} \right] \binom{n+1}{r-i-s} (x - \lambda_{i+n})^n = \\ = P_{r,0,r},$$

$$\sum_{s=0}^r \binom{n-r+s}{s} c_{r-s} = (-1)^r \sum_{i=0}^r (-1)^i \binom{r}{r-i} (x - \lambda_{i+n})^n$$

d'où, enfin,

$$(74) \quad Q_m = \frac{(-1)^{n-k} k!}{n! h^{n-k}} \sum_{r=0}^{n-k} D_k^r[f] P_{r,0,r} + \\ + \sum_{r=n+1-k}^n \left\{ \frac{(n-r)!}{n! h^r} D_{n-r}^r[f] \left[\sum_{i=0}^r (-1)^i \binom{r}{r-i} (x - \lambda_{i+n})^n \right] \right\}$$

Nous allons calculer maintenant la dérivée de la fonction (68). Remarquons que

$$\sum_{i=0}^r (-1)^i \binom{r}{r-i} (x - \lambda_{i+n})^{n-k} = (-1)^r r! h^r D_r^n [(x-t)^{n-k}],$$

où nous considérons x comme un paramètre et t la variable du polynome $(x-t)^{n-k}$ dont on calcule la différence divisée sur les noeuds $\lambda_n, \lambda_{n+1}, \dots, \lambda_{n+r}$. Mais, la différence divisée d'ordre r d'un polynome du degré $r-1$ est nulle identiquement. Il en résulte que la dérivée $k^{\text{ième}}$ de la seconde somme du second membre de la formule (74) disparaît. On voit de la même manière que $P_{r,r-n+1+k,r}^{(k)} = 0$ pour $r \geq n+1-k$.

Nous avons donc,

$$\psi_m^{(k)} = \frac{(-1)^{n-k} k!}{n! h^{n-k}} \sum_{r=0}^{n-k} D_k^r[f] P_{r,0,r}^{(k)}, \text{ pour } x \in [\lambda_0, \lambda_n]$$

$$\psi_m^{(k)} = \frac{(-1)^{n+1-k} k!}{h! h^{n-k}} \left[- \sum_{r=j+1}^{n-r} D_k^r[f] P_{r,j+1,r}^{(k)} + \sum_{r=n+1-k}^{n+1-k+j} D_k^r[f] P_{r,r-n+1+k,j}^{(k)} \right]$$

pour $x \in [\lambda_{j+n}, \lambda_{j+n+1}], j=0, 1, \dots, n-k-1$

$$\psi_m^{(k)} = \frac{(-1)^{n+1-k} k!}{n! h^{n-k}} \sum_{r=j+1}^{n+1-k+j} D_k^r[f] P_{r,r-n+1+k,j}^{(k)}$$

$$\text{pour } x \in [\lambda_{j+n}, \lambda_{j+n+1}], j=n-k, n-k+1, \dots, m-n-1$$

Nous aurons besoin aussi de délimitations convenables des dérivées d'ordre k des polynomes (73) qui interviennent dans ces formules.

Pour $0 \leq s \leq r \leq n-k$, $x \in [\lambda_0, \lambda_{2n-k}]$ nous avons

$$|P_{r,s,r}^{(k)}| \leq \frac{n!}{(n-k)!} \sum_{i=0}^r \binom{n+1-k}{r-i} |x - \lambda_{i+n}|^{n-k} =$$

$$= \frac{n!}{(n-k)!} \sum_{i=0}^r \binom{n+1-k}{i} |x - \lambda_{r+n-i}|^{n-k} \leq$$

$$\leq \frac{n!}{(n-k)!} \sum_{i=0}^r \binom{n+1-k}{i} \left[\max_{x \in [\lambda_0, \lambda_{2n-k}]} |x - \lambda_{r+n-i}|^{n-k} \right] \leq$$

$$\leq \frac{n! h^{n-k}}{(n-k)!} (2n-k)^{n-k} (2^{n+1-k} - 1)$$

Si nous posons donc

$$(75) \quad M = \frac{k!}{(n-k)!} (2n-k)^{n-k} (2^{n+1-k} - 1)$$

nous avons, en particulier,

$$|P_{r,0,r}^{(k)}| \leq \frac{n! h^{n-k}}{k!} M, \text{ pour } 0 \leq r \leq n-k, x \in [\lambda_0, \lambda_n]$$

$$|P_{r,j+1,r}^{(k)}| \leq \frac{n! h^{n-k}}{k!} M, \text{ pour } j+1 \leq r \leq n-k, x \in [\lambda_{j+n}, \lambda_{j+n+1}], \\ 0 \leq j \leq n-k-1$$

Pour $j+1 \leq r \leq n+1-k+j$, $x \in [\lambda_{j+n}, \lambda_{j+n+1}]$, $j = 0, 1, \dots, m-n-1$, nous avons

$$|P_{r,r-n+1+k,j}^{(k)}| \leq \frac{n!}{(n-k)!} \sum_{i=r-n+1+k}^j \binom{n+1-k}{r-i} |x - \lambda_{i+n}|^{n-k} \leq \\ \leq \frac{n!}{(n-k)!} \sum_{i=0}^{n+1-k+j-r} \binom{n+1-k}{i} \max_{x \in [\lambda_{j+n}, \lambda_{j+n+1}]} |x - \lambda_{r+k-1+i}|^{n-k} \leq \\ \leq \frac{n! h^{n-k}}{(n-k)!} \sum_{i=0}^{n+1-k+j-r} \binom{n+1-k}{i} (n+2-k+j-r-i)^{n-k} \leq \\ \leq \frac{n! h^{n-k}}{(n-k)!} (n+2-k+j-r)^{n-k} \sum_{i=0}^{n+1-k+j-r} \binom{n+1-k}{i} < \\ < \frac{n! h^{n-k}}{(n-k)!} (n+1-k)^{n-k} (2^{n+1-k} - 1) \leq \frac{n! h^{n-k}}{(n-k)!} M$$

On peut trouver de meilleurs délimitations. C'est ce que nous avons donné dans un autre travail dans le cas $k=0$ [15]. Pour la suite il suffit de remarquer que le nombre (75) est indépendant de m (et de j).

29. — Nous pouvons maintenant démontrer le

THÉOREME 14. — Etant donné le nombre naturel n et l'entier k , $0 \leq k \leq n-1$, si la fonction f admet une dérivée d'ordre k continue sur l'intersection I de l'intervalle fini et fermé $[a, b]$ avec un intervalle ouvert, la suite $\{\psi_m^{(k)}\}$ des dérivées d'ordre k des fonctions (68) converge uniformément vers $f^{(k)}$ lorsque $m \rightarrow \infty$ et sur tout intervalle fermé appartenant à I .

La dérivée d'ordre 0 d'une fonction coïncide avec la fonction elle-même.

La conclusion de l'énoncé signifie que la convergence est uniforme sur $[a', b'] \subseteq [a, b]$ si $f^{(k)}$ est continue sur $[a', b']$ et si, de plus, pour $a < a'$ il est continue sur un intervalle $[a'', a']$ avec $a < a'' < a'$, de même que pour $b' < b$ il est continue sur un intervalle $[b', b'']$ avec $b' < b'' < b$.

Pour faire la démonstration nous allons délimiter la différence $f^{(k)} - \psi_m^{(k)}$.

Si nous remplaçons dans l'expression de $\psi_m^{(k)}$ toutes les différences divisées $D_k^r[f]$ par 1, la fonction $f_m^{(k)}$ s'annule identiquement et le polynôme $Q_m^{(k)}$ se réduit à

$$\frac{(-1)^{n-k} k!}{n! h^{n-k}} \sum_{r=0}^{n-k} P_{r,0,r}^{(k)} = \\ = \frac{(-1)^{n-k} k!}{(n-k)! h^{n-k}} \sum_{r=0}^{n-k} (-1)^r \left[\sum_{i=0}^r (-1)^i \binom{n+1-k}{r-i} (x - \lambda_{i+n})^{n-k} \right] = \\ = \frac{(-1)^{n-k} k!}{(n-k)! h^{n-k}} \sum_{i=0}^{n-k} (-1)^i \left[\sum_{r=i}^{n-k} (-1)^r \binom{n+1-k}{r-i} \right] (x - \lambda_{i+n})^{n-k} = \\ = \frac{k!}{(n-k)! h^{n-k}} \sum_{i=0}^{n-k} (-1)^i \binom{n-k}{i} (x - \lambda_{i+n})^{n-k} = \\ = \frac{k!}{(n-k)!} \sum_{i=0}^{n-k} (-1)^i \binom{n-k}{i} (n-k-i)^{n-k} = k!$$

Dans ce calcul nous avons tenu compte d'une remarque déjà faite sur les différences divisées d'un polynôme. On voit donc que l'expression est indépendante de x et on peut donc prendre (par ex.) $x = \lambda_{2n-k}$.

Il en résulte que la différence $f^{(k)} - \psi_m^{(k)}$ s'obtient de $\psi_m^{(k)}$ en remplaçant $D_k^r[f]$ par $\frac{f^{(k)}}{k!} - D_k^r[f]$, $r = 0, 1, \dots, m-k$.

Compte tenant des calculs faits au no. précédent, nous avons

$$|f^{(k)} - \psi_m^{(k)}| \leq M \sum_{r=0}^{n-k} \left| \frac{f^{(k)}}{k!} - D_k^r[f] \right|, \text{ pour } x \in [\lambda_0, \lambda_1]$$

$$|f^{(k)} - \psi_m^{(k)}| \leq M \sum_{r=j+1}^{n+1-k+j} \left| \frac{f^{(k)}}{k!} - D_k^r[f] \right|, \text{ pour } x \in [\lambda_{j+n}, \lambda_{j+n+1}] \\ j = 0, 1, \dots, m-n-1.$$

Soit maintenant $[a', b']$ un sous-intervalle fermé de I . Supposons d'abord $a < a' < b' < b$ et soient alors $a < a'' < a'$, $b' < b'' < b$, la dérivée d'ordre k , $f^{(k)}$ étant continue sur $[a'', b'']$. Désignons par $\omega_k(\delta)$ le module d'oscillation de $\frac{1}{k!} f^{(k)}$ sur l'intervalle $[a'', b'']$.

Prenons le nombre naturel m assez grand pour avoir

$$(76) \quad m > \max \left(2n, \frac{n(b-a)}{a'-a''}, \frac{b-a}{b''-b'}, \frac{2(b-a)}{b''-a'} \right)$$

et posons $j_0 = \left[\frac{a'-a}{h} \right] - n$, $j_1 = \left[\frac{b''-a}{h} \right] - n - 1$, où $h = \frac{b-a}{m}$ et $[\alpha]$ désigne le plus grand entier $\leq \alpha$.

Nous avons alors $0 \leq j_0 + 1, j_0 \leq j_1$ et $[a', b'] \subseteq [\lambda_{j_0+n}, \lambda_{j_1+n+1}] \subseteq [\lambda_{j_0+1}, \lambda_{j_1+n+1}] \subseteq [a'', b'']$.

Si $j_0 \leq j \leq j_1, j+1 \leq r \leq n+1-k+j$, les noeuds de la différence divisée $D_k^r[f]$ sont dans l'intervalle $[\lambda_{j+1}, \lambda_{j+n+1}] \subseteq [a'', b'']$ où $f^{(k)}$ est continue. Il existe alors un point ξ de manière que

$$D_k^r[f] = \frac{1}{k!} f^{(k)}(\xi), \xi \in [\lambda_{j+1}, \lambda_{j+n+1}]$$

et il en résulte que

$$\left| \frac{f^{(k)}}{k!} - D_k^r[f] \right| \leq \omega_k(nh), \text{ pour } x \in [\lambda_{j+n}, \lambda_{j+n+1}]$$

Nous avons donc

$$|f^{(k)} - \psi_m^{(k)}| \leq (n+1-k) M \omega_k(nh), \text{ pour } x \in [\lambda_{j+n}, \lambda_{j+n+1}]$$

$$j = j_0, j_0 + 1, \dots, j_1$$

donc, à fortiori,

$$(77) \quad |f^{(k)} - \psi_m^{(k)}| \leq (n+1-k) M \omega_k(nh), \text{ pour } x \in [a', b']$$

ce qui, d'après les propriétés bien connues des modules d'oscillation des fonctions continues, démontre le théorème, dans ce cas.

Il est facile de voir que la délimitation (77) est valable aussi dans les autres cas possibles.

Les modifications à apporter à la démonstration sont les suivantes :

Si $b' = b$, on supprime le terme $\frac{b-a}{b''-b'}$ dans le second membre de (76).

Si $a' = a$, on supprime le terme $\frac{n(b-a)}{a'-a''}$ dans le second membre de (76)

et on remarque que pour $j < 0$ le nombre r est soumis à la condition $0 \leq r \leq n-k$. Les noeuds de la différence divisée $D_k^r[f]$ sont alors bien dans l'intervalle $[\lambda_0, \lambda_n]$.

Ainsi le théorème 14 est démontré.

30. — Nous pouvons maintenant revenir à l'étude des critères de simplicité des fonctionnelles linéaires.

Soit $[a, b]$ un intervalle fini et fermé et considérons la suite non-ascendante de $k+1$ intervalles partiels $[a_0, b_0] \supseteq [a_1, b_1] \supseteq \dots \supseteq [a_k, b_k]$, où $a_0 = a, b_0 = b$.

Soit $\mathcal{C}_k$ l'espace des fonctions f qui admettent des dérivées continues d'ordre i sur $[a_i, b_i]$ pour $i = 0, 1, \dots, k$ et considérons la norme

$$(78) \quad \|f\| = \sum_{i=0}^k \max_{x \in [a_i, b_i]} |f^{(i)}|$$

de cet espace.

Nous avons alors le

THÉORÈME 15. — *Etant donnés le nombre naturel n et l'entier $k, 0 \leq k \leq n-1$, si la fonctionnelle linéaire $R[f]$ est : 1° définie sur $\mathcal{C}_k$, 2° du degré d'exactitude n , 3° bornée par rapport à la norme (78), pour que $R[f]$ soit de la forme simple il faut et il suffit que l'on ait*

$$(79) \quad R[x^{n+1}] R[\varphi_{n+1,\lambda}] \geq 0, \text{ pour } \lambda \in [a, b],$$

où les fonctions $\varphi_{n+1,\lambda}$ sont définies par (64).

Remarquons que les polynômes et les fonctions $\varphi_{n+1,\lambda}$ appartiennent à $\mathcal{C}_k$.

La condition est nécessaire. En effet, x^{n+1} est convexe et $\varphi_{n+1,\lambda}$ est non-concave, d'ordre n . La propriété résulte de la formule (31).

La condition est aussi suffisante. Par hypothèse, nous avons

$$|R[f]| \leq A \|f\|, f \in \mathcal{C}_k$$

A étant un nombre indépendant de la fonction f et $\|f\|$ la norme (78).

Démontrons d'abord que $R[\varphi_{n+1,\lambda}]$ est une fonction continue de λ sur $[a, b]$. En effet, nous avons,

$$|\varphi_{n+1,\lambda} - \varphi_{n+1,\lambda'}| \leq n |\lambda - \lambda'| (b-a)^{n-1}, x \in [a, b]$$

donc aussi ($0 \leq i \leq n-1$),

$$|\varphi_{n+1,\lambda}^{(i)} - \varphi_{n+1,\lambda'}^{(i)}| = \frac{n!}{(n-i)!} |\varphi_{n+1-i,\lambda} - \varphi_{n+1-i,\lambda'}| \leq \frac{n!}{(n-i-1)!} |\lambda - \lambda'| (b-a)^{n-i-1}, x \in [a, b].$$

Nous avons donc

$$|R[\varphi_{n+1,\lambda}] - R[\varphi_{n+1,\lambda'}]| = |R[\varphi_{n+1,\lambda} - \varphi_{n+1,\lambda'}]| \leq A \|\varphi_{n+1,\lambda} - \varphi_{n+1,\lambda'}\|$$

Mais

$$\|\varphi_{n+1,\lambda} - \varphi_{n+1,\lambda'}\| \leq \left[\sum_{i=0}^k \frac{n!}{(n-i-1)!} (b-a)^{n-1-i} \right] |\lambda - \lambda'|$$

d'où la propriété résulte sans difficultés.

Par hypothèse $R[x^{n+1}] \neq 0$, donc $R[\varphi_{n+1,\lambda}]$ ne change pas de signe lorsque λ parcourt l'intervalle $[a, b]$. Rappelons qu'une fonction convexe d'ordre n sur $[a, b]$ a une dérivée continue de toute ordre $\leq n-1$ sur (a, b) . Si donc $f \in \mathcal{C}_k$ est convexe d'ordre n , en vertu du théorème 14, la suite $\{R[\psi_m]\}$ tend vers $R[f]$ pour $m \rightarrow \infty$. Mais, d'après les formules (68) — (70), nous avons

$$R[\psi_m] = R[f_m] = (n-1) h \sum_{i=0}^{m-n-1} D_{n+1}^i[f] R[\varphi_{n+1,\lambda_{i+n}}]$$

et de (79) il résulte que si f est convexe d'ordre n , nous avons

$$(80) \quad R[x^{n+1}] R[f] \geq 0,$$

Il reste à démontrer que dans cette formule l'égalité ne peut pas avoir lieu. Nous avons déjà donné cette démonstration [15], que nous ne reproduisons pas ici.

On en déduit que pour toute fonction $f \in \mathcal{C}_k$ convexe d'ordre n , le signe $>$ est valable dans (80), donc que $R[f] \neq 0$.

Le théorème 15 est donc démontré.

31. — Soit $R[f]$ une fonctionnelle linéaire définie sur $\mathcal{C}_k$ et bornée par rapport à la norme (78). Supposons $0 \leq k \leq n-1$ et $a=a_0=a_1=\dots=a_k$, $b=b_0=b_1=\dots=b_k$. Alors, d'après E. Ya. REMEZ, [22] si $R[f]$ est du degré d'exactitude n , on a

$$(81) \quad R[f] = \int_a^b f^{(\mu)}(x) d\alpha_\mu(x),$$

où μ est un entier, $k \leq \mu \leq n-1$ et α_μ une fonction à variation bornée qui, pour $\mu \leq n$ vérifie les égalités $\alpha_\mu(a) = \alpha_\mu(b) = 0$. La représentation (81) est valable si la dérivée $\mu^{ième}$, $f^{(\mu)}$ est continue sur $[a, b]$. E. Ya. REMEZ a aussi démontré [22], les formules

$$(82) \quad \alpha_{\mu+1}(x) = - \int_a^b \alpha_\mu(x) dx, \quad k \leq \mu \leq n,$$

$$(83) \quad R[f] = - \int_a^b f^{(\mu)}(x) \alpha_{\mu-1}(x) dx, \quad k+1 \leq \mu \leq n+1$$

En particulier la fonction $\varphi_{n+1, \lambda}$ de λ admet une dérivée continue d'ordre $n-1$ sur $[a, b]$. Nous avons donc, compte tenant de (80), (81),

$$\begin{aligned} R[\varphi_{n+1, \lambda}] &= n! \int_a^b (x - \lambda) d\alpha_{n-1}(x) = -n! \int_a^b \alpha_{n-1}(x) dx = \\ &= n! \int_a^\lambda \alpha_{n-1}(x) dx = -n! \alpha_n(\lambda). \end{aligned}$$

De (83) il résulte donc que si f a une dérivée d'ordre $n+1$ continue sur $[a, b]$, nous avons la représentation

$$(84) \quad R[f] = \frac{1}{n!} \int_a^b R[\varphi_{n+1, x}] f^{(n+1)}(x) dx.$$

32. — Reprenons la formule (56) de GAUSS. Nous avons établi la formule (57) sous l'hypothèse de la continuité de la fonction f sur $[-1, 1]$ et de sa dérivée première sur $(-1, 1)$. Mais dans ce cas la fonctionnelle linéaire $R[f]$ est bornée sur l'espace $\mathcal{C}_0$ des fonctions continue sur $[-1, 1]$ par rapport à la norme $\max_{x \in [-1, 1]} |f|$.

La formule (57) est en particulier vraie pour les fonctions $f = \varphi_{2m, \lambda}$ qui sont non-concaves d'ordre $2m-1$. On en déduit $R[\varphi_{2m, \lambda}] \geq 0$ pour $\lambda \in [-1, 1]$ et, en appliquant le théorème 15, il en résulte que la formule (57) est vraie sous la seule hypothèse de la continuité sur $[a, b]$ de la fonction f .

§ 4.

33. — Nous allons examiner dans ce §, sans entrer dans beaucoup de détails, le cas où la fonctionnelle linéaire $R[f]$ n'est pas de la forme simple.

Une fonctionnelle linéaire $R_1[f]$ définie sur $\mathcal{F}$ s'appelle une *majorante simple* de $R[f]$ si: 1° elle est de la forme simple, 2° on a $R_1[f] > R[f]$ pour toute fonction $f \in \mathcal{F}$ convexe.

Nous avons alors le

THÉOREME 16. — Si la fonctionnelle linéaire $R[f]$ définie sur $\mathcal{F}$ admet une majorante simple, on a

$$(85) \quad R[f] = K[\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+2}; f] - K'[\xi'_1, \xi'_2, \dots, \xi'_{n+2}; f],$$

où 1° K, K' sont des nombres différents de zéro et indépendants de la fonction f , 2° les points $\xi_i \in E, i=1, 2, \dots, n+2$ d'une part et les points $\xi'_i \in E, i=1, 2, \dots, n+2$ d'autre part, sont distincts (ils peuvent dépendre en général de la fonction f).

En effet, soit $R_1[f]$ une majorante simple de $R[f]$. Nous avons $R[f] = R_1[f] - [R_1[f] - R[f]]$, où les fonctionnelles linéaire $R_1[f]$, $R_1[f] - R[f]$ sont de la forme simple.

Considérons une fonctionnelle linéaire $R[f]$ définie sur $\mathcal{F}$ et de la forme (85) indiquée dans le théorème 16. Si les constantes K, K' sont de signes contraires, $R[f]$ est de la forme simple. Il suffit donc d'examiner le cas où K, K' sont (différents de zéro et) du même signe. Sans restreindre la généralité on peut alors supposer qu'ils soient positifs.

Nous avons alors le

Lemme 4. — Si la fonctionnelle linéaire $R[f]$ est définie sur l'espace $\mathcal{F}$ et si elle est de la forme (85), indiquée au théorème 16, pour toute fonction $f \in \mathcal{F}$ dont la différence divisée est bornée,

la représentation (85) est valable pour tout $f \in \mathcal{F}$ (donc aussi pour les éléments de $\mathcal{F}$ dont la différence divisée n'est pas bornée).

On voit facilement que le lemme 4 est une conséquence du

Lemme 5. — Si: 1° $R[f]$ est une fonctionnelle linéaire définie sur $\mathcal{F}$, 2° K, K' sont deux nombres positifs,

pour tout $f \in \mathcal{F}$ dont la différence divisée n'est pas bornée on peut trouver les $n+2$ points distincts $\xi_i \in E, i=1, 2, \dots, n+2$ et les $n+2$ points distincts $\xi'_i \in E, i=1, 2, \dots, n+2$, tels que l'on ait (85).

Supposons, pour fixer les idées, que la différence divisée de la fonction f ne soit pas bornée supérieurement. En vertu du théorème 4, si la différence divisée de cette fonction prend la valeur m , elle prend aussi toute valeur plus grande que m . Soit alors m une valeur prise par la différence divisée et $[\xi'_1, \xi'_2, \dots, \xi'_{n+2}; f]$ une différence divisée prenant une valeur $> \frac{mK - R[f]}{K'}$

et $[\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+2}; f]$ une différence divisée prenant la valeur $\frac{1}{K} \{K' [\xi'_1, \xi'_2, \dots, \xi'_{n+2}; f] + R[f]\} > m$. La formule (85) en résulte.

On procède de la même manière si la différence divisée de la fonction f n'est pas bornée inférieurement.

Le lemme 5 est donc démontré.

La différence divisée, la notion de simplicité et l'espace sont pris dans le sens du § 1.

Il est clair qu'au lieu de la notion de majorante simple, on peut employer la notion de *minorante simple* $R_1[f]$ de $R[f]$ qui jouit des propriétés qu'elle est de la forme simple et que $R_1[f] < R[f]$ pour toute fonction f convexe.

Pour mettre la fonctionnelle linéaire $R[f]$ sous la forme (85), il suffit donc de connaître une majorante simple. Par ex., la fonctionnelle linéaire (58) qui s'annule sur les fonctions (19) et qui peut donc être mise sous la forme (59), a comme majorante simple la fonctionnelle linéaire

$$\sum_{i=1}^{m-n-1} \frac{|\mu_i| + \mu_i}{2} [x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+n+1}; f] + \mu [x'_1, x'_2, \dots, x'_{n+2}; f]$$

où μ est un nombre positif et x'_i , $n+2$ points distincts de l'intervalle E . Toute fonctionnelle linéaire de la forme (58) peut donc être mise sous la forme (85), indiquée au théorème 16.

34. — Lorsque la fonctionnelle linéaire $R[f]$ est de la forme (85), la différence $K - K' = R[f_{n+1}]$ a une valeur parfaitement déterminée. Supposons K, K' positifs. Nous pouvons alors remplacer K, K' par $K + \varepsilon, K' + \varepsilon$ respectivement, ε étant un nombre positif quelconque. En effet, si nous avons (85), pour un $f \in \mathcal{F}$ donné, nous avons $R[f] = R_1[f] - R_2[f]$, où $R_1[f] = K[\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+2}; f] + \varepsilon[x_1, x_2, \dots, x_{n+2}; f]$, $R_2[f] = K'[\xi'_1, \xi'_2, \dots, \xi'_{n+2}; f] + \varepsilon[x_1, x_2, \dots, x_{n+2}; f]$, où les x_i sont $n+2$ points distincts de l'intervalle E . On peut regarder $R_1[f], R_2[f]$ comme des fonctionnelles linéaires définies sur $\mathcal{F}$. Alors elles sont de la forme simple. La propriété énoncée en résulte en remarquant que $R_1[f_{n+1}] = K + \varepsilon, R_2[f_{n+1}] = K' + \varepsilon$.

Lorsque $R[f]$ est de la forme (85) mais n'est pas de la forme simple les coefficients K, K' , supposés positifs, ont des minima dont la connaissance est importante surtout si $R[f]$ est le reste d'une formule d'approximation. Nous allons dans ce sens examiner, au no. suivant, un cas particulier important.

35. — Supposons que nous soyons dans le cas particulier (21), (21') et considérons une fonctionnelle linéaire $R[f]$ définie et bornée sur l'espace $\mathcal{C}_k$ considéré au no. 30. Nous avons le

THÉOREME 17. — Si : 1° la fonctionnelle linéaire $R[f]$ est définie sur $\mathcal{C}_k$, bornée par rapport à la norme (78) et du degré d'exactitude n , avec $R[x^{n+1}] > 0$, 2° A est la borne supérieure de $R[f]$ pour les fonctions $f \in \mathcal{C}_k$ dont la différence divisée d'ordre $n+1$ est comprise dans $[0, 1]$ et $B = A - R[x^{n+1}]$,

pour tout $\varepsilon > 0$, la fonctionnelle linéaire $R[f]$ est de la forme (85), indiquée au théorème 16, avec $K = A + \varepsilon, K' = B + \varepsilon$.

De la démonstration il résultera que A, B sont finis. Nous avons $A > 0$ puisque, en particulier, x^{n+1} a sa différence divisée d'ordre $n+1$ comprise dans $[0, 1]$. Nous avons évidemment $B \geq 0$.

Si nous considérons les fonctions (69), par la formule $R_m[f] = R[f_m]$ nous définissons une fonctionnelle linéaire qui, pour $m \rightarrow \infty$, tend vers $R[f]$ pour tout $f \in \mathcal{C}_k$. Posons

$$(86) \quad R_m^+[f] = (n+1)h \sum_{i=1}^{m-n-1} D_{n+1}^i[f] \frac{R[\varphi_{n+1, \lambda_{i+n}}] + |R[\varphi_{n+1, \lambda_{i+n}}]|}{2}$$

et désignons par $\mathcal{C}_k^*$ le sous-ensemble de $\mathcal{C}_k$ formé par les fonctions $f \in \mathcal{C}_k^*$ qui ont leurs différences divisées d'ordre $n+1$ bornées. D'ailleurs, toute fonction définie sur $[a, b]$ ayant la $(n+1)^{\text{ième}}$ différence divisée bornée appartient à $\mathcal{C}_k$. Remarquons que, la fonction de x , $R[\varphi_{n+1, x}]$ étant continue sur $[a, b]$, la suite à termes positifs

$$(87) \quad \left\{ (n+1)h \sum_{i=1}^{m-n-1} \frac{R[\varphi_{n+1, \lambda_{i+n}}] + |R[\varphi_{n+1, \lambda_{i+n}}]|}{2} \right\}$$

tend, pour $m \rightarrow \infty$, vers une limite finie et bien déterminée égale à

$$(88) \quad A = (n+1) \int_a^b \frac{R[\varphi_{n+1, x}] + |R[\varphi_{n+1, x}]|}{2} dx$$

Il en résulte que la suite (87) est bornée. Si $f \in \mathcal{C}_k^*$ la suite $\{R_m^+[f]\}$ est aussi bornée. On peut extraire de cette suite une suite partielle convergente vers la fonctionnelle $R^+[f]$. On voit facilement que la fonctionnelle $R^+[f]$ ainsi définie sur $\mathcal{C}_k^*$ est linéaire et s'annule sur tout polynôme du degré n . Mais, nous avons $R_m^+[f] > 0, R_m^+[f] \cong R_m[f]$ si $f \in \mathcal{C}_k$ est convexe, donc $R^+[f] \cong 0, R^+[f] \cong R[f]$ si $f \in \mathcal{C}_k^*$ est convexe. Il en résulte immédiatement que si ε est un nombre positif et $x_1, x_2, \dots, x_{n+2}$, $n+2$ points fixes de l'intervalle E , la fonctionnelle linéaire $R_1[f] = R^+[f] + \varepsilon[x_1, x_2, \dots, x_{n+2}; f]$ est une majorante simple de $R[f]$. On voit facilement que $R_1[x^{n+1}] = A + \varepsilon$, où A est donné par la formule (88).

Il reste à démontrer que le nombre A , donné par la formule (88), coïncide avec la borne supérieure de $R[f]$ si f parcourt l'ensemble des fonctions dont la $(n+1)^{\text{ième}}$ différence divisée reste comprise dans $[0, 1]$. Or, si f est une telle fonction, il est clair que $R_m[f]$ ne dépasse pas le terme général (correspondant) de la suite (87). En passant à la limite il en résulte que $R[f]$ ne dépasse pas A . Soit maintenant ε un nombre positif quelconque. Tenons compte de la continuité de la fonction $R[\varphi_{n+1, x}]$ donc de la continuité et la non-négativité sur $[a, b]$ de la fonction $\frac{1}{2}[R[\varphi_{n+1, x}] + |R[\varphi_{n+1, x}]|]$ et remarquons que les points sur lesquels une fonction continue sur $[a, b]$ s'annule forment un ensemble fermé. Il en résulte qu'on peut trouver un nombre fini k d'intervalles disjoints $[\alpha_i, \beta_i]$, $i=1, 2, \dots, k$, appartenant à (a, b) et tels que la fonction $R[\varphi_{n+1, x}]$ soit non-négative sur ces intervalles et tels aussi que l'on ait

$$(89) \quad (n+1) \sum_{i=1}^k \int_{\alpha_i}^{\beta_i} R[\varphi_{n+1, x}] dx > A - \frac{1}{2} \varepsilon$$

Nous pouvons supposer $a < \alpha_1 < \beta_1 < \alpha_2 < \beta_2 < \dots < \alpha_k < \beta_k < b$. Soit $M = \max_{x \in [a, b]} (n+1) |R[\varphi_{n+1, x}]|$ et choisissons les points α'_i, β'_i , $i = 1, 2, \dots, k$ de manière que l'on ait $a < \alpha'_1 < \alpha_1, \beta_k < \beta'_k < b$, $\beta_{i-1} < \beta'_{i-1} < \alpha'_i < \alpha_i$, $i = 2, 3, \dots, k$ et que

$$(90) \quad M \sum_{i=1}^k (\alpha_i - \alpha'_i + \beta'_i - \beta_i) < \frac{1}{2} \varepsilon.$$

Soit alors f une fonction dont la $(n+1)^{\text{ième}}$ dérivée est, continue sur $[a, b]$, se réduit à $(n+1)!$ sur les intervalles $[\alpha_i, \beta_i]$, $i = 1, 2, \dots, k$, est nulle sur les intervalles $[a, \alpha'_1]$, $[\beta'_k, b]$, $[\beta'_{i-1}, \alpha'_i]$, $i = 2, 3, \dots, k$ et est linéaire sur chacun des intervalles $[\alpha'_i, \alpha_i]$, $[\beta_i, \beta'_i]$, $i = 1, 2, \dots, k$. La fonction f appartient à $\mathcal{O}_k$ et la formule de la moyenne (29) nous montre que sa différence divisée d'ordre $n+1$ reste comprise dans $[0, 1]$. Compte tenant de la représentation (85), nous avons pour cette fonction,

$$(91) \quad R[f] = (n+1) \sum_{i=1}^k \int_{\alpha_i}^{\beta_i} R[\varphi_{n+1, x}] dx + (n+1) \left\{ \sum_{i=1}^k \int_{\alpha'_i}^{\alpha_i} R[\varphi_{n+1, x}] \frac{f^{(n+1)}}{(n+1)!} dx + \sum_{i=1}^k \int_{\beta_i}^{\beta'_i} R[\varphi_{n+1, x}] \frac{f^{(n+1)}}{(n+1)!} dx \right\}$$

Mais,

$$(92) \quad (n+1) \left| \sum_{i=1}^k \int_{\alpha'_i}^{\alpha_i} + \sum_{i=1}^k \int_{\beta_i}^{\beta'_i} R[\varphi_{n+1, x}] \frac{f^{(n+1)}}{(n+1)!} dx \right| \leq \leq (n+1) \left\{ \sum_{i=1}^k \int_{\alpha'_i}^{\alpha_i} + \sum_{i=1}^k \int_{\beta_i}^{\beta'_i} |R[\varphi_{n+1, x}]| dx \right\} \leq M \sum_{i=1}^k (\alpha_i - \alpha'_i + \beta'_i - \beta_i) < \frac{1}{2} \varepsilon$$

En tenant compte de (89), (92), de la formule (91) il résulte que $R[f] > A - \varepsilon$. Le nombre A est donc la borne supérieure indiquée dans l'énoncé du théorème.

Le théorème 17 est donc complètement démontré. Dans ce théorème nous avons supposé $R[x^{n+1}] > 0$. Dans le cas contraire, donc si $R[x^{n+1}] < 0$, la démonstration est analogue. Dans ce cas $B > 0$, $A \geq 0$.

Les cas $A=0$, $B=0$ correspondent aux $R[f]$ de la forme simple.

Il est facile de démontrer que si $f \in \mathcal{O}_k$ a une dérivée d'ordre $n+1$ continue sur $[a, b]$, on a

$$R[f] = \frac{1}{(n+1)!} [A f^{(n+1)}(\xi) - B f^{(n+1)}(\eta)], \quad \xi, \eta \in [a, b]$$

Si $f \in \mathcal{O}_k^*$ et si d est la borne supérieure de la valeur absolue de la différence divisée d'ordre $n+1$ de f , nous avons la délimitation

$$|R[f]| \leq (A+B) d.$$

36. — Il y a aussi d'autres formes sous lesquelles on peut mettre une fonctionnelle linéaire $R[f]$, donc le reste d'une formule d'approximation linéaire. Ces expressions présentent de l'intérêt surtout lorsque $R[f]$ n'est pas de la forme simple.

Supposons toujours que nous soyons dans le cas particulier (21), (21') et supposons que $R[f]$ soit une fonctionnelle linéaire définie et du degré d'exactitude n sur $\mathcal{F}$. Considérons une décomposition de la forme

$$(93) \quad R[f] = R_1[f] + \{R[f] - R_1[f]\},$$

où $R_1[f]$ est une fonctionnelle linéaire définie sur $\mathcal{F}$ et où la fonctionnelle linéaire (définie aussi sur $\mathcal{F}$) $R[f] - R_1[f]$ a un degré d'exactitude $n+p > n$. Alors si $R_1[f]$ et $R[f] - R_1[f]$ sont de la forme simple, nous avons

$$(94) \quad R[f] = R[x^{n+1}][\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+2}; f] + K[\xi'_1, \xi'_2, \dots, \xi'_{n+p+2}; f]$$

où $K \neq 0$ est indépendant de la fonction f et ξ_i, ξ'_i sont des groupes de $n+2$ resp. $n+p+2$ points distincts de E .

Sans avoir ici la prétention de faire une théorie générale, nous allons montrer, sur deux exemples, comment on peut effectivement trouver une représentation de la forme (94) pour le reste de certaines formules d'approximation.

37. — Considérons la formule de quadrature de Hardy,

$$\int_0^6 f(x) dx = 0,28[f(0) + f(6)] + 1,62[f(1) + f(5)] + 2,2f(3) + R[f]$$

Le degré d'exactitude du reste $R[f]$ est 5. Un calcul simple nous montre que $R[\varphi_{6,3}] = \frac{81}{50} > 0$, $R[\varphi_{6,5}] = -\frac{17}{150} < 0$ et, en vertu du théorème 15, le reste n'est pas de la forme simple.

Pour mettre $R[f]$ sous la forme (94) il est avantageux de considérer d'abord la fonctionnelle linéaire $R^*[f] = R[f']$, que nous avons déjà envisagé au § précédent. En effet, il suffit de chercher pour cette fonctionnelle linéaire une décomposition de la forme (94). La décomposition correspondante pour $R[f]$ en résulte immédiatement.

Nous avons

$$R^*[f] = -63[0, 0, 1, 1, 3, 3, 5, 5; f] + 190,8[0, 1, 1, 3, 3, 5, 5, 6; f] - 63[1, 1, 3, 3, 5, 5, 6, 6; f]$$

Posons

$$(95) \quad R_1[f] = \mu_1[0, 0, 1, 1, 3, 3, 5, 5; f] + \mu_2[0, 1, 1, 3, 3, 5, 5, 6; f] + \mu_3[1, 1, 3, 3, 5, 5, 6, 6; f]$$

où

$$(96) \quad \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 64,8$$

Nous avons alors

$$(97) \quad R^*[f] - R_1[f] = 6(63 + \mu_1)[0, 0, 1, 1, 3, 3, 5, 5, 6; f] - 6(63 + \mu_3)[0, 1, 1, 3, 3, 5, 5, 6, 6; f]$$

qui a le degré d'exactitude > 6 .

Les fonctionnelles linéaires (95), (97) sont de la forme simple si $\mu_1 = \mu_3$, μ_2 sont non-négatifs. On trouve ainsi l'expression suivante du reste de la formule de Hardy,

$$R[f] = \frac{9}{700} \left[6! [\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_7; f] - \frac{5(63 + \mu_1)}{648} 8! [\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_9; f] \right]$$

où f est continue sur $[0, 6]$ les ξ_i sont 7 points distincts et les η_i 9 points distincts de l'intervalle $(0, 6)$.

Dans cette formule $0 \leq \mu_1 \leq 32,4$ par suite de la manière particulière de démonstration.

Si f a une dérivée continue d'ordre 8 sur $(0, 6)$, nous avons

$$R[f] = \frac{9}{700} \left[f^{(6)}(\xi) - \frac{5(63 + \mu_1)}{648} f^{(8)}(\eta) \right], \quad \xi, \eta \in (0, 6)$$

Si dans cette formule nous prenons $\mu_1 = \frac{9}{5}$ nous trouvons le reste bien connu [24],

$$(98) \quad R[f] = \frac{9}{700} \left[f^{(6)}(\xi) - \frac{1}{2} f^{(8)}(\eta) \right], \quad \xi, \eta \in (0, 6)$$

Mais nous pouvons prendre $\mu_1 = 0$ et alors nous trouvons

$$R[f] = \frac{9}{700} \left[f^{(6)}(\xi) - \frac{35}{72} f^{(8)}(\eta) \right], \quad \xi, \eta \in (0, 6)$$

où le coefficient $\frac{35}{72}$ est plus petit que le coefficient correspondant $\frac{1}{2}$ de la formule (98).

38. — Comme un second exemple prenons la formule de quadrature de Weddle,

$$\int_0^6 f(x) dx = 0,3 [f(0) + f(2) + f(4) + f(6)] + 1,5 [f(1) + f(5)] + 1,8 f(3) + R[f],$$

dont le reste est encore du degré d'exactitude 5. On a $R[\varphi_{6,3}] = \frac{3}{10} > 0$, $R[\varphi_{6,4}] = -\frac{13}{30} < 0$, donc le reste n'est pas de la forme simple.

En procédant comme dans l'exemple précédent, nous avons

$$\frac{5}{18} R^* [f] = -3 [0, 0, 1, 1, 2, 2, 3, 3; f] - 4 [0, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4; f] + 4 [1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5; f] - 4 [2, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 6; f] - 3 [3, 3, 4, 4, 5, 5, 6, 6; f]$$

$$(99) \quad \frac{5}{18} R_1 [f] = \mu_1 [0, 0, 1, 1, 2, 2, 3, 3; f] + \mu_2 [0, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4; f] + \mu_3 [1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4; f] + \mu_4 [1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5; f] + \mu_5 [2, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 5; f] + \mu_6 [2, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 6; f] + \mu_7 [3, 3, 4, 4, 5, 5, 6, 6; f]$$

où

$$(100) \quad 2(\mu_1 + \mu_2 + \mu_3) + \mu_4 = -10$$

et alors nous avons

$$(101) \quad -\frac{5}{18} [R^* [f] - R_1 [f]] = 16(\mu_1 + 3) [0, 0, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4; f] + 20(2\mu_1 + \mu_2 + 10) [0, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5; f] + 16(3\mu_1 + 2\mu_2 + \mu_3 + 17) [1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 5; f] + 20(2\mu_1 + \mu_2 + 10) [1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 6; f] + 16(\mu_1 + 3) [2, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 6, 6; f].$$

Prenons $\mu_1 = -3$, $\mu_2 = -2$, $\mu_3 = \mu_4 = 0$. Alors (100) est vérifié et (99), (101) sont de la forme simple. Nous en déduisons

$$R[f] = -\frac{1}{140} \left[6! [\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_7; f] + \frac{1}{5} 8! [\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_9; f] \right]$$

la fonction f et les points ξ_i , η_i ayant la même signification que dans l'exemple précédent. Si la fonction f a une dérivée continue d'ordre 8 sur $(0, 6)$, nous avons

$$R[f] = -\frac{1}{140} \left[f^{(6)}(\xi) + \frac{1}{5} f^{(8)}(\eta) \right], \quad \xi, \eta \in (0, 6)$$

Dans la formule bien connue [24],

$$R[f] = -\frac{1}{140} \left[f^{(6)}(\xi) + \frac{9}{10} f^{(8)}(\eta) \right], \quad \xi, \eta \in (0, 6)$$

le coefficient de la dérivée d'ordre 8 est 4, 5 fois plus grand en valeur absolue.

Remarquons encore que si, en dehors de (100), nous avons

$$(102) \quad 20\mu_1 + 9\mu_2 + 2\mu_3 = -96,$$

nous pouvons écrire

$$(103) \quad -\frac{5}{18} [R^* [f] - R_1 [f]] = 400(\mu_1 + 3) [0, 0, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 5; f] + 120(18\mu_1 + 5\mu_2 + 74) [0, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 6; f] + 400(\mu_1 + 3) [1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 6, 6; f].$$

Si nous prenons $\mu_1 = -\frac{51}{11}$, $\mu_2 = -\frac{4}{11}$, $\mu_3 = \mu_4 = 0$, les égalités (100), (102) sont vérifiées et les fonctionnelles linéaires (99), (103) sont de la forme simple. Pour le reste $R[f]$ de la formule de Weddle nous obtenons,

$$R[f] = -\frac{1}{140} \left[6! [\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_7; f] - \frac{61}{1815} 10! [\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{11}; f] \right]$$

où f est continue sur $[0, 6]$, les ξ_i sont 7 points distincts et les η_i 11 points distincts de l'intervalle $(0, 6)$.

Si la fonction f a une dérivée d'ordre 10 continue sur $(0, 6)$, nous avons

$$R[f] = -\frac{1}{140} \left[f^{(6)}(\xi) - \frac{61}{1815} f^{(10)}(\eta) \right], \quad \xi, \eta \in (0, 6).$$

BIBLIOGRAPHIE

- [1]. Birkhoff G. D. „General Mean Value and Remainder Theorems” Transact. Amer. Math. Soc., 7, 107–130 (1906).
- [2]. Cauchy A. „Sur les fonctions interpolaires”, Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, 11, 775–789 (1840).
- [3]. Gontscharoff I. V. „Théorie de l'interpolation et de l'approximation des fonctions”. Moscou, 1945 (en russe).
- [4]. Goursat E. „Cours d'analyse mathématique” I, (s. d).
- [5]. Kowalewski G. „Interpolation und genäherte Quadrature” 1932.
- [6]. Markoff A. A. „Differenzenrechnung”, 1896.
- [7]. Mises R. v. „Über allgemeine Quadraturformeln”, J. f. die reine u. angew. Math., 174, 56–67 (1936).
- [8]. Netto E. „Lehrbuch der Combinatorik”, 1901.
- [9]. Obrechhoff N. „Neue Quadraturformeln” Abh. preuss. Akad. Wiss., 1940, no. 4, 1–20.
- [10]. Petr K. „Sur une formule pour le calcul numérique des intégrales définies”, Casopis, 44, 454–455 (1915) (en tchèque).
- [11]. — „Observation sur le calcul numérique des intégrales définies”, Casopis, 56, 67–70 (1927) (en tchèque).
- [12]. Popoviciu T. „Sur quelques propriétés des fonctions d'une ou de deux variables réelles” Mathematica, 8, 1–85 (1934).
- [13]. — „Notes sur les fonctions convexes d'ordre supérieur” (I), Mathematica, 12, 81–92 (1936).
- [14]. — „Introduction à la théorie des différences divisées” Bulletin Math. Soc. Roum. des Sci., 42, 65–78 (1940).
- [15]. — „Notes sur les fonctions convexes d'ordre supérieur” (IX), ibid., 43, 85–141 (1942).
- [16]. — „Asupra formei restului în unele formule de aproximatie ale analizei”, Lucrările Ses., Gen., Sti. ale Acad. R.P.R., din 1950, 183–185.
- [17]. — „Asupra restului în unele formule de derivare numerică” Studii și Cerc. Matem., 3, 53–122 (1952).
- [18]. — „Folytonos függvények középértéktételéről” A Magyar Tud. Akad. Közl., 4, 353–356 (1954).
- [19]. — „Asupra unei generalizări a formulei de integrare numerică a lui Gauss” Studii și Cerc. St. Iași, 6, 29–57 (1955).
- [20]. — „Asupra unor ecuații funcționale” Studii și Cerc. Sti., Cluj, s. I, VI, 37–49 (1955).
- [21]. Radon J. „Restausdrücke bei Interpolations und Quadraturformeln durch bestimmte Integrale” Monatshefte f. Math. u. Phys., 42, 389–386 (1935).
- [22]. Remez E. Ya. „Sur certaines classes de fonctionnelles linéaires dans les espaces C_p et sur les termes complémentaires des formules d'analyse approximative” I, Rec. trav. Math. Acad. Ukraine, 3, 21–62 (1940). (en ukrainien).
- [23]. Sard A. „Integral Representation of Remainders” Duke Math. J., 15, 333–345 (1948).
- [24]. Steffensen J. F. „Interpolation” 1927.
- [25]. Stieltjes T. J. „Over Lagrange's interpolatie-formulae” Versl. en Med. der kon. Akad. v. Wetensch. te Amsterdam, (2) 17, 239 (1882).
- [26]. — „Einige bemerkungen omtrent de differentiaal quotienten van eene functie van eene veranderlijke” Nieuw Arch. voor Wiskunde, 9, 106–11 (1882).
- [27]. Watson G. N. „Über eine Formel zur numerischen Berechnung der bestimmten Integrale”, Casopis, 65, 1–7 (1935).
- [28]. Widder D. V. „On the Interpolatory Properties of a Linear Combination of Continuous Functions” Amer. J. of Math., 49, 221–234 (1927).

Reçu le 1 mars 1958

EQUAȚIUNI FUNCȚIONALE CARACTERIZANT LES MONOGRAMME AVEC TROUS ÉCHELLES RECTILIGNES*

de
FRANÇOIS RADÓ
à Cluj

Introduction

Soit

$$\overline{G}P = f(x), \overline{G}Q = g(y), \overline{G}R = h(z)$$

les équations des échelles de monogramme de la fig. 1. On suppose que les fonctions f, g et h sont continues et monotones en sens croissant. Entre les points x, y, z des points P, Q, R , situés sur une même droite, x doit le valoir.

$$(1) \quad z = H^{-1}(F(x) + G(y)),$$

$$\text{ou } F(x) = \frac{h_1}{h_1 + h_2} f(x), G(y) = \frac{h_2}{h_1 + h_2} g(y).$$

$H(x) = h(x)$. La fonction $z = f(x, y)$ définie par (1) est continue et monotone (par rapport à chacune des variables). Dans les conditions relatives indiquées toutes les fonctions f, g et h sont variables seront supposées continues et monotones. Les échelles des monogrammes ne permettent pas d'interpolations plus larges.

Il se pose le problème de caractériser les fonctions $z = f(x, y)$, qui peuvent être obtenus sous la forme (1).

* Cet article est compris dans le travail „Recherches fonctionnelles de type linéaire en monogramme” publié en langue roumaine dans le revue „Studii și Cercetări de Matematică, Cluj”, 4, 1958–1959 (1958).

