

DIFFERENCES DIVISEES ET DERIVEES

par
TIBERIU POPOVICIU

à Cluj

I.

1. — Soit $A[f] = A[f(x)]$ une fonctionnelle linéaire, donc additive et homogène, définie sur un espace vectoriel S de fonctions $f = f(x)$, réelles, de la variable réelle x , définies et continues sur un intervalle I . Nous désignerons par a l'extrémité gauche et par b l'extrémité droite de l'intervalle I . Dans la suite nous supposons toujours que les éléments de S vérifient toutes les propriétés de dérivabilité nécessaires pour que les fonctionnelles linéaires considérées aient un sens. Nous supposons toujours que S contienne tous les polynômes. On suppose toujours que $a < b$.

Toute fonctionnelle linéaire $A[f]$ a un degré d'exactitude bien déterminé. Ce degré d'exactitude est le nombre entier $n \geq -1$, ou le nombre impropre $n = \infty$, caractérisé par la propriété :

1°. $n = -1$ si $A[1] \neq 0$.

2°. $A[x^i] = 0$, $i = 0, 1, \dots, n$, $A[x^{n+1}] \neq 0$ si $A[1] = 0$ et si l'un au moins des nombres $A[x^i]$, $i = 0, 1, \dots$ est différent de zéro.

3°. $n = \infty$ si $A[x^i] = 0$, $i = 0, 1, \dots$

Dans les cas 1° et 2° le degré d'exactitude est fini. Ce cas a lieu si et seulement si $A[f]$ est différent de zéro sur un polynôme au moins. Dans le cas 3°, le degré d'exactitude est infini et alors $A[f]$ est nul sur tout polynôme.

Pour qu'une fonctionnelle linéaire $A[f]$ soit nulle sur tout polynôme de degré n , il faut et il suffit que son degré d'exactitude soit égal à n au moins (on suppose toujours que $n < \infty$). Un polynôme de degré n est de la forme $\alpha_0 x^n + \alpha_1 x^{n-1} + \dots + \alpha_n$, les coefficients $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ étant des nombres réelles quelconques. Si le plus haut coefficient α_0 est $\neq 0$, le polynôme est dit de degré effectif n .

2. — Nous allons nous occuper, en particulier, des fonctionnelles linéaires $A[f]$ qui sont égales à une combinaison linéaire des valeurs, sur un nombre fini de points, de la fonction f et d'un nombre fini de ses dérivées de divers ordres. Une telle fonctionnelle linéaire est de la forme

$$(1) \quad A[f] = \sum_{i=1}^p \sum_{j=0}^{k_i-1} a_{i,j} f^{(j)}(z_i)$$

où, $p, k_1, k_2, \dots, k_p$ sont des nombres naturels donnés, $z_i, i = 1, 2, \dots, p$, p points distincts de l'intervalle I et $a_{i,j}, j = 0, 1, \dots, k_i - 1, i = 1, 2, \dots, p$, des nombres indépendants de la fonction f . Les points z_i sont les *noeuds* et les nombres $a_{i,j}$ sont les *coefficients* de la fonctionnelle linéaire (1).

Dans l'expression (1) et relativement au noeud z_i figurent les valeurs de la fonction et de ses $k_i - 1$ premières dérivées, donc de ses premières k_i dérivées si nous convenons que la fonction elle-même soit sa propre dérivée d'ordre 0, sur ce point. Pour ce motif nous convenons qu'en z_i soient confondus k_i noeuds. Alors k_i est l'ordre de multiplicité du noeud z_i (c'est un noeud simple si $k_i = 1$, double si $k_i = 2$, etc.). Nous pouvons dire aussi que z_i est un noeud d'ordre k_i de multiplicité. De cette façon le nombre total des noeuds distincts ou non (donc chaque noeud compté avec son ordre de multiplicité) est égal à $m = k_1 + k_2 + \dots + k_p$. Le nombre m est $\geq p$ et est égal à p si et seulement si tous les noeuds sont simples.

Les m noeuds, simples ou non, peuvent être désignés par $x_1, x_2, \dots, x_m$. Parmi ces points, exactement k_i coïncident avec z_i pour $i = 1, 2, \dots, p$. De cette manière nous avons numéroté une certaine permutation des noeuds. En principe la permutation, donc le numérotage des noeuds, est arbitraire. Ils existent cependant certains numérotages privilégiés, que nous appellerons des *numérotages normaux*. Dans un numérotage normal, pour tout i , les k_i noeuds x_j qui coïncident avec z_i sont numérotés avec k_i indices consécutifs. Un numérotage normal est, par ex., $x_{k_1+k_2+\dots+k_{i-1}+v} = z_i, v = 1, 2, \dots, k_i, i = 1, 2, \dots, p$ ($k_0 = 0$). En particulier, si la suite $x_1, x_2, \dots, x_m$ est monotone (non-décroissante ou non-croissante), le numérotage est normal.

3. — La fonctionnelle (identiquement) nulle sur S est de la forme (1), où tous les coefficients $a_{i,j}$ sont égaux à 0. Cette fonctionnelle linéaire a le degré d'exactitude égal à ∞ .

Une fonctionnelle linéaire de la forme (1) ne détermine pas complètement le système des noeuds z_i avec leurs ordres de multiplicités respectifs. En effet, nous pouvons ajouter un nombre fini quelconque de noeuds quelconques sans que la fonctionnelle linéaire considérée soit modifiée. Il suffit de démontrer cette propriété pour un seul noeud x_0 ajouté aux précédents. Alors nous pouvons ajouter à $A[f]$, sans modifier ses valeurs, le terme 0. $f(x_0)$ si x_0 ne coïncide avec aucun de noeuds z_i et le terme 0. $f^{(k_i)}(z_i)$ si $x_0 = z_i$.

Considérons alors une fonctionnelle linéaire (1) qui n'a pas tous ses coefficients nuls. Nous pouvons supposer, sans restreindre la généralité, que

$$(2) \quad a_{1, k_1-1} \neq 0, i = 1, 2, \dots, p.$$

Dans ce cas les noeuds sont réduits à leur plus petit nombre puisque, d'une part, si les conditions (2) sont vérifiées nous pouvons supprimer un certain nombre de noeuds sans modifier la fonctionnelle $A[f]$, et,

d'autre part, on ne peut pas faire de telles suppressions de noeuds si les conditions (2) ne sont pas toutes vérifiées. Il est facile de voir comment on peut obtenir le nombre minimum des noeuds.

Considérons le polynôme de degré m

$$(3) \quad l(x) = \prod_{v=1}^m (x - x_v).$$

Alors*)

$$A \left[\frac{l(x)}{x - z_i} \right] = a_{i, k_i-1} \left[\frac{l(x)}{x - z_i} \right]_{x=z_i}^{(k_i-1)} = a_{i, k_i-1} (k_i - 1)! \prod_{v=1}^p (z_i - z_v)^{k_v} \\ i = 1, 2, \dots, p$$

qui, d'après l'hypothèse (2) sont tous différents de zéro. Nous avons donc le

L e m m e 1. — La fonctionnelle linéaire (1), où les coefficients $a_{i,j}$ ne sont pas tous nuls, a un degré d'exactitude (fini et) au plus égal à $m - 2$.

Il en résulte que si la fonctionnelle linéaire (1) a un degré d'exactitude plus grand que $m - 2$ elle est nulle identiquement.

4. — Si la fonctionnelle linéaire (1) a un degré d'exactitude égal à $m - 2$, elle se réduit, en dehors d'un facteur non nul et indépendant de la fonction f , à la *différence divisée d'ordre $m - 1$* sur les m noeuds $x_1, x_2, \dots, x_m$ de la fonction f . Cette différence divisée sera désignée par

$$(4) \quad [x_1, x_2, \dots, x_m; f]$$

ou par

$$\underbrace{[z_1, z_1, \dots, z_1]}_{k_1}, \underbrace{[z_2, z_2, \dots, z_2]}_{k_2}, \dots, \underbrace{[z_p, z_p, \dots, z_p]}_{k_p}; f$$

La différence divisée est une fonctionnelle linéaire de la forme (1) déterminée complètement par les conditions de s'annuler sur tout polynôme de degré $m - 2$ et de se réduire à 1 sur le polynôme x^{m-1} .

Les différences divisées jouissent de diverses propriétés et vérifient des formules bien connues. Nous allons rappeler les principales formules qui seront utilisées plus loin.

La différence divisée est symétrique par rapport aux noeuds sur lesquels elle est définie. Il en résulte que dans la notation (4) le numérotage des noeuds est indifférent.

Nous avons la *relation de récurrence*

$$(5) \quad [t_1, t_2, \dots, t_{q+1}; f] = \frac{[t_2, t_3, \dots, t_{q+1}; f] - [t_1, t_2, \dots, t_q; f]}{t_{q+1} - t_1}$$

*) $\sum_{v=1}^p i, \prod_{v=1}^p i$ signifient que dans la somme resp. le produit la valeur i de l'indice est exclue.

qui est une relation entre les différences divisées d'ordre q et les différences divisées d'ordre $q-1$. La formule (5) est valable sous la seule condition que les noeuds t_1, t_{q+1} , soient distincts, en supposant, bien entendu, que les différences divisées qu'y figurent aient un sens.

Si tous les noeuds d'une différence divisée d'ordre q coïncident avec le même point t , cette différence divisée est égale à $\frac{1}{q!} f^{(q)}(t)$. Nous avons donc la formule

$$(6) \quad \underbrace{[t, t, \dots, t; f]}_{q+1} = \frac{1}{q!} f^{(q)}(t).$$

Nous avons aussi la formule de décomposition

$$(7) \quad [t_1, t_2, \dots, t_q, t'_1, t'_2, \dots, t'_q; f] = \left[t_1, t_2, \dots, t_q; \frac{f(x)}{(x-t'_1)(x-t'_2) \dots (x-t'_q)} \right] + \left[t'_1, t'_2, \dots, t'_q; \frac{f(x)}{(x-t_1)(x-t_2) \dots (x-t_q)} \right]$$

qui est valable à condition qu'aucun des noeuds $t_1, t_2, \dots, t_q$ ne coïncident avec l'un des noeuds $t'_1, t'_2, \dots, t'_q$.

Nous avons aussi la formule de réduction

$$(8) \quad [t_1, t_2, \dots, t_q, t'_1, t'_2, \dots, t'_q; f(x)(x-t_1)(x-t'_2) \dots (x-t'_q)] = [t_1, t_2, \dots, t_q; f].$$

Les formules précédentes permettent de trouver les coefficients $c_{i,j}$ de la différence divisée (4),

$$(9) \quad [x_1, x_2, \dots, x_m; f] = \sum_{i=1}^p \sum_{j=0}^{k_i-1} c_{i,j} f^{(j)}(z_i).$$

Si nous posons

$$l_i(x) = \frac{l(x)}{(x-z_i)^{k_i}} = \frac{1}{i!} (x-z_i)^{k_i}, \quad i = 1, 2, \dots, p$$

où $l(x)$ est le polynôme (3), en appliquant convenablement et plusieurs fois s'il est nécessaire, les formules (6), (7), nous en déduisons

$$\begin{aligned} [x_1, x_2, \dots, x_m; f] &= \sum_{i=1}^p \left[\frac{z_i, z_i, \dots, z_i; f}{k_i} \right] = \\ &= \sum_{i=1}^p \frac{1}{(k_i-1)!} \left[\frac{f(x)}{l_i(x)} \right]_{x=z_i}^{(k_i-1)}. \end{aligned}$$

Nous avons donc

$$c_{i,j} = \frac{1}{(k_i-1)!} \cdot \binom{k_i-1}{j} \left[\frac{1}{l_i(x)} \right]_{x=z_i}^{(k_i-1-j)},$$

$$j = 0, 1, \dots, k_i-1, \quad i = 1, 2, \dots, p.$$

Nous avons, en particulier,

$$c_{i,k_i-1} = \frac{1}{(k_i-1)!} \cdot \frac{1}{\frac{1}{i!} (z-z_i)^{k_i}}, \quad i = 1, 2, \dots, p.$$

On voit que, dans le cas de la différence divisée (4), les conditions (2) sont vérifiées. Il en résulte que dans le cas de la différence divisée, la notation (4) met en évidence précisément le système de noeuds au nombre minimum.

5. — Désignons par $L(x_1, x_2, \dots, x_m; f|x)$, le polynôme de Lagrange-Hermite relatif à la fonction f et sur les noeuds $x_1, x_2, \dots, x_m$. C'est le polynôme (unique) $L(x)$ de degré $m-1$ qui vérifie les égalités

$$(10) \quad L^{(j)}(z_i) = f^{(j)}(z_i), \quad j = 0, 1, \dots, k_i-1, \quad i = 1, 2, \dots, p.$$

Nous avons*)

$$(11) \quad L(x_1, x_2, \dots, x_m; f|x) = \sum_{v=0}^{m-1} (x-x_1)(x-x_2) \dots (x-x_v) \cdot [x_1, x_2, \dots, x_{v+1}; f].$$

De (10) il résulte que

$$(12) \quad A[f] = A[L(x_1, x_2, \dots, x_m; f|x)]$$

et, compte tenant de la formule (11),

$$(13) \quad A[f] = \sum_{v=0}^{m-1} a_v [x_1, x_2, \dots, x_{v+1}; f]$$

où

$$(14) \quad a_v = A[(x-x_1)(x-x_2) \dots (x-x_v)], \quad v = 0, 1, \dots, m-1.$$

Si la fonctionnelle linéaire considérée a un degré d'exactitude au moins égal à n ($0 \leq n \leq m-2$) nous avons $a_v = 0$, $v = 0, 1, \dots, n$ et réciproquement. Si elle a un degré d'exactitude égal à n ($-1 \leq n \leq m-2$) nous avons, de plus, $a_{n+1} = A[x^{n+1}] \neq 0$ et réciproquement. Cette propriété peut être énoncée sous la forme du

L e m m e 2. — Pour que la fonctionnelle linéaire (1) ait le degré d'exactitude au moins égal à n , il faut et il suffit que dans son expression sous la forme (13) l'on ait $a_0 = a_1 = \dots = a_n = 0$. Pour que le degré d'exac-

*) Si $v = 0$, le produit $(x-x_1)(x-x_2) \dots (x-x_v)$ est remplacé par 1. De telles conventions s'appliquent aussi plus loin dans des formules analogues.

titude soit égal exactement à n il est nécessaire et suffisante que, de plus, l'on ait $a_{n+1} \neq 0$.

6. — Le résultat précédent est vrai pour un numérotage quelconque des noeuds.

Supposons maintenant que la suite $x_1, x_2, \dots, x_m$ (donc le numérotage respectif) des noeuds jouisse de la propriété que si i, j sont deux quelconques des indices $1, 2, \dots, m$,

$$(15) \quad j - i \geq n + 2 \Rightarrow x_i \neq x_j.$$

En appliquant la formule (5) aux différences divisées $[x_1, x_2, \dots, x_{v+1}; f]$, $v = n + 2, n + 3, \dots, m - 1$ (si $m \geq n + 3$), lorsqu'il est nécessaire même plusieurs fois (si $m > n + 3$), nous déduisons la formule ($m \geq n + 3$),

$$(16) \quad A[f] = \sum_{v=0}^n a_v [x_1, x_2, \dots, x_{v+1}; f] + \sum_{i=1}^{m-n-1} \mu_i [x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+n+1}; f],$$

où les coefficients a_v , donnés par (14), et les coefficients $\mu_i, i = 1, 2, \dots, m - n - 1$ sont indépendants de la fonction f .

Nous pouvons énoncer alors le

L e m m e 3. — Pour que la fonctionnelle linéaire (1) ait le degré d'exactitude au moins égal à $n \geq \max(k_1, k_2, \dots, k_p) - 2$ (donc pour qu'elle soit nulle sur tout polynôme de degré $n \geq \max(k_1, k_2, \dots, k_p) - 2$) il faut et il suffit qu'elle soit de la forme

$$(17) \quad A[f] = \sum_{i=1}^{m-n-1} \mu_i [x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+n+1}; f],$$

où les $\mu_i, i = 1, 2, \dots, m - n - 1$ sont des coefficients indépendants de la fonction f .

Pour que, sous les mêmes conditions, le degré d'exactitude soit égal à n , il est, de plus, nécessaire et suffisant que l'on ait $\sum_{i=1}^{m-n-1} \mu_i \neq 0$.

La condition est nécessaire. En effet, d'une part, sous les hypothèses du lemme, nous pouvons trouver un numérotage des noeuds tel que les conditions (15) soient vérifiées. Un tel numérotage est, par ex., tout numérotage normal*). D'autre part, alors de la formule (16) il résulte la formule (17).

*) Ils peuvent exister des numérotages, différents d'un numérotage normal, pour lesquels les conditions (15) soient vérifiées. Si, par ex., nous avons $p = 3, k_1 = 3, k_2 = k_3 = 2$ (donc $m = 7$), $n = 3$, les permutations $(P): z_1, z_1, z_2, z_2, z_3, z_3, z_3$, $(P'): z_1, z_2, z_1, z_2, z_3, z_3, z_3$ donnent des numérotages qui vérifient les conditions (15). Ces deux numérotages diffèrent en ce que la formule (17) correspondante à (P) conduit aux mêmes différences divisées que la permutation (P'') : $z_1, z_1, z_1, z_2, z_2, z_3, z_3$ qui correspond à un numérotage normal, tandis que la formule (17) correspondante à (P') conduit à des différences divisées qui ne sont pas les mêmes (dans leur ensemble). Il en résulte que le numérotage correspondant à la permutation (P) est, d'une certaine façon, réductible à un numérotage normal, tandis qu'il n'en est pas ainsi pour la permutation (P') . La notion de „réductibilité” qui intervient ici est suffisamment claire.

La condition est suffisante. En effet, toute différence divisée d'ordre $n + 1$ est de degré d'exactitude n , donc s'annule sur tout polynôme de degré n . Il est donc de même pour toute combinaison linéaire de telles différences divisées.

La suffisance de la dernière condition du lemme résulte de la formule $A[x^{n+1}] = \sum_{i=1}^{m-n-1} \mu_i$.

La condition $n \geq \max(k_1, k_2, \dots, k_p) - 2$ du lemme est essentielle. Si cette condition n'est pas vérifiée il peut ne pas exister une relation de la forme (17). Ceci résulte facilement du fait que si les noeuds d'une fonctionnelle linéaire de la forme (17) sont réduits à leur nombre minimum, parmi ces noeuds il n'existe aucun qui ait un ordre de multiplicité $> n + 2$. D'ailleurs, si $n < \max(k_1, k_2, \dots, k_p) - 2$, il n'existe aucun numérotage vérifiant la propriété (15).

II.

7. — Nous allons rappeler la notion de fonctionnelle linéaire de la forme simple. La fonctionnelle linéaire $A[f]$, définie sur l'espace S est dite de la forme simple s'il existe un nombre entier $n \geq -1$ tel que, pour tout $f \in S$, l'on ait

$$(18) \quad A[f] = K \cdot [\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+2}; f],$$

où K est un coefficient différent de 0 et indépendant de la fonction f et les $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+2}$ sont $n + 2$ points distincts de l'intervalle I , si $n \geq 0$ même de l'intérieur de l'intervalle I et qui, en général, peuvent dépendre de la fonction f . Le fait que, pour $n \geq 0$, les points ξ_i peuvent être choisis à l'intérieur de l'intervalle I résulte des propriétés de moyenne des différences divisées [6]. Dans ce cas le degré d'exactitude de $A[f]$ est nécessairement égal à n . Il en résulte que si une fonctionnelle linéaire est de la forme simple, elle est de cette forme pour une seule valeur de n . Il existe une importante propriété qui caractérise les fonctionnelles de la forme simple [4] et qui peut être énoncée sous la forme du :

L e m m e 4. — Pour que la fonctionnelle linéaire $A[f]$ soit de la forme simple, il faut et il suffit qu'il existe un nombre entier $n \geq -1$ tel que l'on ait $A[f] \neq 0$ pour tout $f \in S$, convexe d'ordre n .

La propriété d'être de la forme simple est donc très intimement liée à la notion de fonction convexe d'ordre supérieur.

Une fonction définie sur I est dite convexe d'ordre n si toutes ses différences divisées d'ordre $n + 1$, sur $n + 2$ noeuds distincts (appartenant à I) sont positives. La fonction est dite non-concave d'ordre n (sur I) si toutes ses différences divisées d'ordre $n + 1$ sur des points distincts (ou non) sont non-négatives. Une fonction convexe d'ordre n est une fonction non-concave d'ordre n particulière.

Le nombre n du lemme 4 est celui qui figure dans la formule (18) correspondante. Le coefficient K de cette formule est égal à $A[x^{n+1}]$ ou

à $A[f]$ où f est un polynome quelconque de degré $n+1$ avec le plus haut coefficient égal à 1.

Si la fonctionnelle linéaire $A[f]$ est de la forme simple et si la fonction f a une dérivée d'ordre $n+1$ (pour $n \geq 0$) sur l'intérieur de l'intervalle I , nous avons

$$(19) \quad A[f] = \frac{K}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi),$$

où K est un coefficient indépendant de la fonction f (d'ailleurs égal à celui qui figure dans la formule (18)) et ξ un point de I , si $n \geq 0$ même de l'intérieur de I , et qui dépend, en général, de la fonction f .

Nous retrouvons un cas classique bien connu si $A[f]$ est le reste dans la formule de Taylor. La formule (19) est alors la forme classique du reste donnée par Lagrange.

8. — Nous allons rappeler quelques propriétés des fonctions convexes d'ordre supérieur. Toute fonction convexe d'ordre $n > 0$ sur I est continue sur l'intérieur de I et si $n > 1$ elle a une dérivée continue d'ordre $n-1$ sur l'intérieur de I . Si la dérivée $f^{(n+1)}(x)$, d'ordre $n+1$, existe, la condition $f^{(n+1)}(x) \geq 0$ sur I est nécessaire et suffisante pour que la fonction soit non-concave d'ordre n sur I . Cette condition est seulement nécessaire et la condition $f^{(n+1)}(x) > 0$ sur I est seulement suffisante pour que la fonction f soit convexe d'ordre n sur I . Si $f^{(n+1)}(x) \geq 0$ sur I et s'il n'existe aucun sous-intervalle non-nul de I sur lequel $f^{(n+1)}(x)$ soit nul, f est convexe d'ordre n sur I . En particulier nous avons le

Lemme 5. — Pour qu'un polynome f de degré effectif $> n$ soit convexe d'ordre n sur I , il faut et il suffit que l'on ait $f^{(n+1)}(x) \geq 0$ sur I .

La condition est suffisante puisque la dérivée d'ordre $n+1$ d'un polynome de degré effectif $> n$ n'est pas identiquement nulle, donc ne peut s'annuler que sur un nombre fini (≥ 0) de points. Cette dérivée ne peut donc s'annuler identiquement sur aucun sous-intervalle de longueur positive. Un polynome de degré effectif n est un polynome de degré n qui ne se réduit pas (sur un intervalle de longueur positive) à un polynome de degré $n-1$.

La convexité d'ordre -1 est équivalente à la positivité et la non-concavité d'ordre -1 à la non-négativité de la fonction. La convexité d'ordre 0 est équivalente à la croissance et la non-concavité d'ordre 0 à la non-décroissance de la fonction.

9. — Une fonction convexe d'ordre n jouit de la propriété que toute différence divisée d'ordre $n+1$ de cette fonction sur $n+2$ noeuds qui ne sont pas tous confondus, est positive, à condition, bien entendu, que cette différence divisée existe*).

Considérons une fonctionnelle linéaire de la forme (17). Compte tenant du lemme 4, il résulte que si tous les coefficients μ_i , $i = 1, 2, \dots, m-n-1$ sont ≥ 0 , ou bien tous sont ≤ 0 et s'il existe au moins un

*) L'existence au sens du nr. 1, donc au sens que la fonction admette effectivement les dérivées qui interviennent dans l'expression (1) de la différence divisée considérée.

coefficient μ_i différent de zéro pour lequel les noeuds $x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+n+1}$ de la différence divisée correspondante ne sont pas tous confondus, alors la fonctionnelle linéaire (17) est du degré d'exactitude n et est de la forme simple.

La condition que les coefficients μ_i soient du même signe n'est pas, en général, nécessaire pour que la fonctionnelle linéaire (17) ait le degré d'exactitude n et soit de la forme simple.

Supposons maintenant que $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_m$ et que les ordres de multiplicité des noeuds distincts soient $\leq n+2$. D'après certains résultats obtenus déjà [5], il résulte que si $n = -1, 0$ ou 1 , la condition que tous les coefficients μ_i de la fonctionnelle linéaire soient du même signe et qu'il existe au moins un i pour lequel $\mu_i \neq 0$ et les noeuds $x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+n+1}$ ne soient pas tous confondus, est nécessaire et suffisante pour que la fonctionnelle linéaire considérée soit du degré d'exactitude n et de la forme simple. Bien, entendu, pour $n = -1$, la dernière condition, donc que les $x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+n+1}$ ne soient pas confondus, ne se pose pas. Nous allons reprendre ici la démonstration que nous avons, d'ailleurs, donnée, avec certaines modifications non essentielles, dans notre travail cité [5].

D'après ce qui précède, il suffit de montrer que si la fonctionnelle linéaire (17) est du degré d'exactitude n (pour $n = -1, 0$ ou 1) et est de la forme simple, aucun des coefficients μ_i ne peut être différent de zéro et de

signe contraire avec le nombre $A[x^{n+1}] = \sum_{i=1}^{m-n-1} \mu_i$ (qui est nécessairement

$\neq 0$). En supposant $\sum_{i=1}^{m-n-1} \mu_i \neq 0$, la propriété est donc équivalente au fait

que les inégalités $\left(\sum_{v=1}^{m-n-1} \mu_v \right) \mu_i \geq 0$, $i = 1, 2, \dots, m-n-1$ sont vérifiées.

Pour la démonstration nous tenons compte du fait que si f est une fonction non-concave d'ordre n , il faut que $A[f]$ ne change pas de signe (qu'il soit constamment ≥ 0 ou constamment ≤ 0). Plus exactement que, sous

l'hypothèse $\sum_{i=1}^{m-n-1} \mu_i \neq 0$, l'on ait $\left(\sum_{v=1}^{m-n-1} \mu_v \right) A[f] \geq 0$, pour toute fonction f

non-concave d'ordre n .

10. — Pour la démonstration nous allons distinguer trois cas, suivant les valeurs $-1, 0, 1$ de n .

Cas 1. $n = -1$. Nous pouvons supposer $x_1 < x_2 < \dots < x_m$ et la fonctionnelle linéaire (17) se réduit à $A[f] = \sum_{i=1}^m \mu_i f(x_i)$. Si $0 < \varepsilon <$

$\min_{i=1,2,\dots,m-1} (x_{i+1} - x_i)$, la fonction continue

$$f_i(x) = \frac{1}{2\varepsilon} (|x - x_i + \varepsilon| + |x - x_i - \varepsilon| - 2|x - x_i|)$$

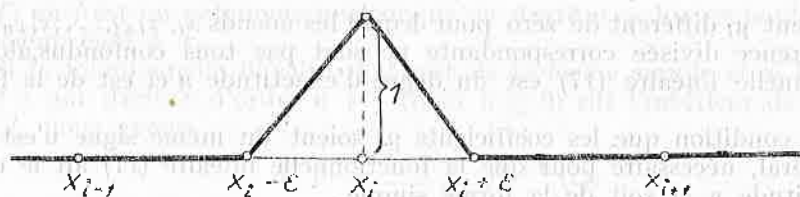


Fig. 1

est non-négative, se réduit à 1 sur x_i et à 0 sur les autres noeuds. Nous avons donc $A[f_i] = \mu_i$, $i = 1, 2, \dots, m$. Il en résulte que $\left(\sum_{v=1}^m \mu_v\right) \mu_i \geq 0$, $i = 1, 2, \dots, m$, ce qui démontre la propriété.

Cas 2. $n = 0$. Nous pouvons supposer, sans restreindre la généralité, que tous les noeuds soient doubles. Supposons donc que m soit pair et

$x_{2i-1} = x_{2i}$, $i = 1, 2, \dots, \frac{m}{2}$, $x_1 < x_3 < \dots < x_{m-1}$. La fonctionnelle liné-

aire (17) se réduit à $A[f] = \sum_{i=1}^{m-1} \mu_i [x_i, x_{i+1}; f]$. Le cas où quelques uns ou tous les noeuds sont simples est compris dans le précédent comme un cas particulier. Si, par ex., au lieu du noeud double $x_{2i-1} = x_{2i}$, nous avons un noeud simple qui coïncide avec ce point, il suffit de prendre $\mu_{2i-1} = 0$ dans la formule précédente. Alors la dérivée de la fonction f sur ce point disparaît dans l'expression de $A[f]$.

Il faut maintenant distinguer deux cas, suivant la parité de l'indice i du coefficient μ_i .

1°. Soit i pair. Alors les noeuds x_i, x_{i+1} sont distincts ($x_i < x_{i+1}$) et la fonction continue

$$f_i(x) = \frac{1}{2} (x_{i+1} - x_i + |3x - 2x_i - x_{i+1}| - |3x - x_i - 2x_{i+1}|)$$

$$i = 2, 4, \dots, m-2$$

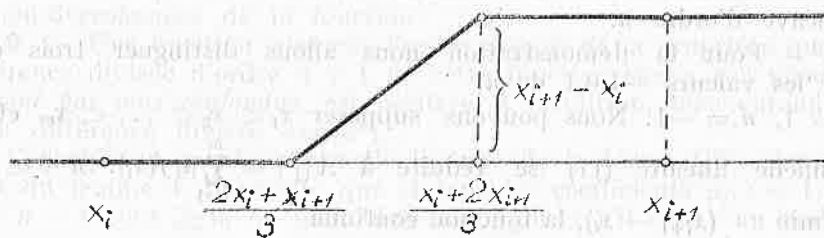


Fig. 2

est non-décroissante et nous donne $A[f_i] = \mu_i$. Nous avons donc

$$(20) \quad \left(\sum_{v=1}^{m-1} \mu_v\right) \mu_i \geq 0$$

pour $i = 2, 4, \dots, m-2$.

2°. Soit i impair. Alors $x_{i-1} < x_i = x_{i+1} < x_{i+2}$. Si $0 < \varepsilon < \min(x_i - x_{i-1}, x_{i+2} - x_{i+1})$, la fonction continue

$$f_i(x) = \frac{1}{2} (2\varepsilon + |x - x_i + \varepsilon| - |x - x_i - \varepsilon|)$$

$$i = 1, 3, \dots, m-1$$

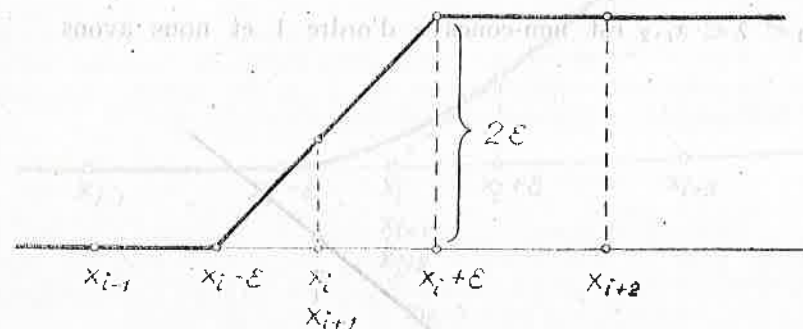


Fig. 3

est non-décroissante et nous avons $A[f_i] = \varepsilon \left(\frac{\mu_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} + \frac{\mu_{i+1}}{x_{i+2} - x_{i+1}} \right) + \mu_i$.

Si $\mu_i \neq 0$, pour ε suffisamment petit, $A[f_i]$ est aussi $\neq 0$ et du même signe avec μ_i . On en déduit que l'inégalité (20) est vraie aussi pour $i = 1, 3, \dots, m-1$.

L'inégalité (20) est donc vraie pour $i = 1, 2, \dots, m-1$ et la propriété est démontrée.

Cas 3. $n = 1$. Nous pouvons supposer, sans restreindre la généralité, que tous les noeuds soient triples. Soit donc m un multiple de 3 et soient $x_{3i-2} = x_{3i-1} = x_{3i}$, $i = 1, 2, \dots, \frac{m}{3}$, $x_1 < x_4 < x_7 < \dots < x_{m-2}$. La

fonctionnelle linéaire (17) se réduit à $A[f] = \sum_{i=1}^{m-2} \mu_i [x_i, x_{i+1}, x_{i+2}; f]$. Le

cas où quelques uns ou tous les noeuds sont doubles ou simples est compris dans le précédent comme un cas particulier. Si par ex., au lieu du noeud triple $x_{3i-2} = x_{3i-1} = x_{3i}$ nous avons un noeud double coïncidant avec ce point, il suffit de prendre $\mu_{3i-2} = 0$ dans la formule précédente. Alors la

dérivée seconde de la fonction f sur ce point disparaît dans l'expression de $A[f]$. Si au lieu d'un noeud double, nous avons un noeud simple en ce point, il suffit de prendre $\mu_{3i-2} = 0$ et μ_{3i-1}, μ_{3i-3} de manière que l'on ait $(x_{3i+1} - x_{3i})\mu_{3i-3} = (x_{3i-2} - x_{3i-3})\mu_{3i-1}$, pour que dans l'expression de $A[f]$ disparaisse aussi la première dérivée de f sur ce point.

Nous allons ici encore distinguer deux cas, suivant les valeurs de l'indice i de μ_i par rapport au diviseur 3.

1°. Considérons le pair de coefficients μ_i, μ_{i+1} où $i+1$ est un multiple de 3. Nous avons $x_{i+1} < x_{i+2}$ et la fonction continue

$$f_i(x) = (x_{i+2} - x_{i+1}) \frac{x - \lambda + |x - \lambda|}{2}$$

$$i = 2, 5, 8, \dots, m-4$$

où $x_{i+1} < \lambda < x_{i+2}$ est non-concave d'ordre 1 et nous avons

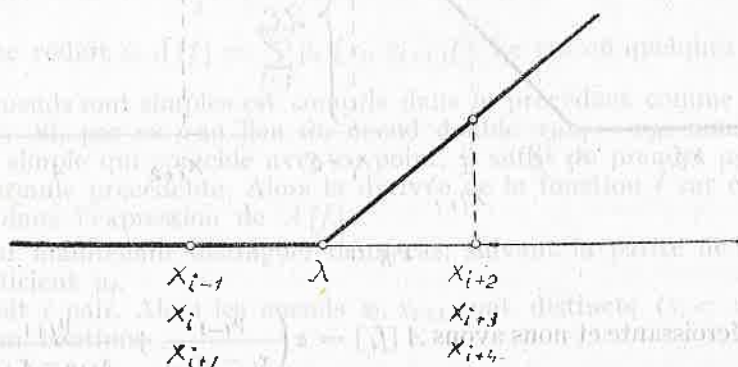


Fig. 4

$$A[f_i] = \frac{\mu_i(x_{i+2} - \lambda) + \mu_{i+1}(\lambda - x_{i+1})}{x_{i+2} - x_{i+1}}$$

On voit que si $\mu_i \neq 0$ et λ est suffisamment proche de x_{i+1} , $A[f_i]$ est $\neq 0$ et a le même signe que μ_i et si $\mu_{i+1} \neq 0$ et λ est suffisamment proche de x_{i+2} , $A[f_i]$ est $\neq 0$ et a le même signe que μ_{i+1} . Il en résulte que

$$(21) \quad \left(\sum_{v=1}^{m-2} \mu_v \right) \mu_v \geq 0$$

pour $i = 2, 3, 5, 6, 8, 9, \dots, m-4, m-3$.

2°. Supposons maintenant que i soit congru à 1 modulo 3. Alors $x_i = x_{i+1} = x_{i+2}$. Si $0 < \varepsilon < \min(x_i - x_{i-1}, x_{i+3} - x_{i+2})$, la fonction continue

$$f_i(x) = \frac{1}{2} \left[4\varepsilon(x - x_i) + (x - x_i + \varepsilon)|x - x_i + \varepsilon| - \right. \\ \left. - (x - x_i - \varepsilon)|x - x_i - \varepsilon| \right]$$

$$i = 1, 4, 7, \dots, m-2$$

est non concave d'ordre 1 et nous avons

$$A[f_i] = \varepsilon^2 \left[\frac{\mu_{i-2} - \mu_{i-1}}{(x_i - x_{i-1})^2} + \frac{\mu_{i+2} - \mu_{i+1}}{(x_{i+3} - x_{i+2})^2} \right] + 2\varepsilon \left[\frac{\mu_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} + \frac{\mu_{i+1}}{x_{i+3} - x_{i+2}} \right] + \mu_i$$

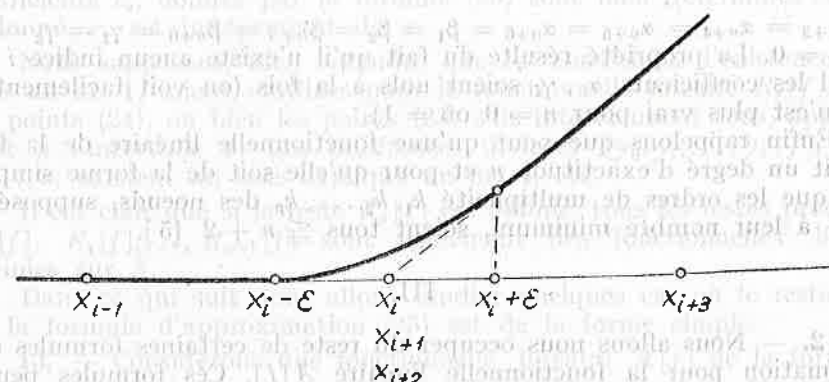


Fig. 5

Si $\mu_i \neq 0$, pour ε suffisamment petit, $A[f_i]$ est $\neq 0$ et est de même signe avec μ_i . Il en résulte que l'inégalité (21) est vraie aussi pour $i = 1, 4, 7, \dots, m-2$. L'inégalité (21) est donc vraie pour $i = 1, 2, \dots, m-2$ et la propriété est démontrée.

II. — La propriété mise en évidence pour $n = -1, 0$ et 1 n'est plus vraie pour $n > 1$. Pour démontrer cette propriété il suffit de montrer que si $n > 1$, $x_1 < x_2 < \dots < x_{n+4}$ et si μ', μ'' sont deux nombres positifs suffisamment grands ($\mu' + \mu'' > 1$), la fonctionnelle linéaire

$$(22) \quad \mu' [x_1, x_2, \dots, x_{n+2}; f] - [x_2, x_3, \dots, x_{n+3}; f] + \mu'' [x_3, x_4, \dots, x_{n+4}; f]$$

est (de degré d'exactitude n et) de la forme simple. En effet, introduisons entre les noeuds x_i encore $n+3$ noeuds, en formant ainsi la suite de noeuds $x'_1 < x'_2 < \dots < x'_{2n+7}$, $x'_{2i-1} = x_i$, $i = 1, 2, \dots, n+4$. Des formules de moyenne des différences divisées [3] il résulte que

$$[x_1, x_2, \dots, x_{n+2}; f] = \sum_{i=1}^{n+2} \alpha_i [x_i, x'_{i+1}, \dots, x'_{i+n+1}; f] \\ [x_2, x_3, \dots, x_{n+3}; f] = \sum_{i=2}^{n+4} \beta_i [x'_i, x'_{i+1}, \dots, x'_{i+n+1}; f]$$

$$[x_3, x_4, \dots, x_{n+4}; f] = \sum_{i=3}^{n+6} \gamma_i [x'_i, x'_{i+1}, \dots, x'_{i+n+1}; f]$$

où $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ sont des coefficients positifs, indépendants de la fonction f (et $\sum_{i=1}^{n+2} \alpha_i = \sum_{i=3}^{n+4} \beta_i = \sum_{i=5}^{n+6} \gamma_i = 1$). La fonctionnelle linéaire (22) peut donc s'écrire sous la forme

$$\sum_{i=1}^{n+6} (\mu' \alpha_i + \mu'' \gamma_i - \beta_i) [x'_i, x'_{i+1}, \dots, x'_{i+n+1}; f]$$

où $\alpha_{n+3} = \alpha_{n+4} = \alpha_{n+5} = \alpha_{n+6} = \beta_1 = \beta_2 = \beta_{n+3} = \beta_{n+6} = \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = \gamma_4 = 0$. La propriété résulte du fait qu'il n'existe aucun indice i pour lequel les coefficients α_i, γ_i soient nuls à la fois (on voit facilement que ceci n'est plus vrai pour $n = 0$ où $= 1$).

Enfin rappelons que pour qu'une fonctionnelle linéaire de la forme (1) ait un degré d'exactitude n et pour qu'elle soit de la forme simple, il faut que les ordres de multiplicité $k_1, k_2, \dots, k_p$ des noeuds, supposés réduits à leur nombre minimum, soient tous $\leq n + 2$ [5].

III.

12. — Nous allons nous occuper du reste de certaines formules d'approximation pour la fonctionnelle linéaire $A[f]$. Ces formules peuvent être considérées comme des généralisations de la formule d'interpolation de Lagrange, qui a comme cas particulier la formule de Taylor.

Soit $A[f]$ une fonctionnelle linéaire définie sur l'espace S (voir ur. 1). Nous considérons une suite finie ou infinie de points

$$(23) \quad y_0, y_1, \dots$$

distincts ou non. Nous considérons une section

$$(24) \quad y_0, y_1, \dots, y_s$$

de cette suite et le polynôme de Lagrange-Hermite $L(y_0, y_1, \dots, y_s; f|x)$ sur ces points et relativement à la fonction f . Pour tout $x \in I$ ce polynôme est une fonctionnelle linéaire de la forme (1). Plus exactement, ce polynôme peut être mis sous la forme (1), où les $a_{i,j}$ sont des polynômes indépendants de la fonction f , le nombre total des noeuds, distincts ou non, étant égal à $s + 1^*$.

Nous avons alors la formule d'approximation

$$(25) \quad A[f] = A[L(y_0, y_1, \dots, y_s; f|x)] + R_s[f]$$

où $R_s[f]$ est le reste de cette formule.

La formule (11) nous donne

*) Il existe des valeurs de x (en nombre fini), pour lesquels le nombre minimum des noeuds est plus petit que $s + 1$.

$$(26) \quad A[f] = \sum_{v=0}^s c_v [y_0, y_1, \dots, y_v; f] + R_s[f]$$

où

$$(27) \quad c_v = A \left[\prod_{i=0}^{v-1} (x - y_i) \right], \quad v = 0, 1, \dots, s.$$

La formule (25) est complètement caractérisée par le fait qu'elle est de la forme (26), avec un reste $R_s[f]$ fonctionnelle linéaire de degré d'exactitude au moins égal à s . En effet, pour tout polynôme f de degré s , le polynôme $L(y_0, y_1, \dots, y_s; f|x)$ se réduit à f , donc $R_s[f]$ est nul. Alors les coefficients c_v , donnés par la formule (26) sont bien déterminés et, pour v donné, c_v est indépendant de s .

Nous supposons, bien entendu, que les conditions d'existence, données au nr. 1, soient vérifiées pour la fonctionnelle linéaire $R_s[f]$. Ainsi, les points (24), ou bien les points (23) s'ils interviennent tous, appartiennent à l'intervalle I . Les différences divisées $[y_0, y_1, \dots, y_v; f]$, $v = 0, 1, \dots, s$, existent au sens expliqué au nr. 4, etc.

Il est clair que si le reste $R_s[f]$ est définie, tous les restes précédents $R_0[f], R_1[f], \dots, R_{s-1}[f]$ sont également des fonctionnelles linéaires définies sur S .

Dans ce qui suit nous allons étudier quelques cas où le reste $R_s[f]$ de la formule d'approximation (25) est de la forme simple.

13. — Considérons une fonctionnelle linéaire $A[f]$ de la forme (1). Sauf avis contraire, nous nous occuperons exclusivement de fonctionnelles linéaires de cette forme. Le reste $R_s[f]$ de la formule (25) est alors de la même forme. Les ordres de multiplicité des noeuds peuvent être pris tous $\leq \max(k_1, k_2, \dots, k_p, s + 1)$, donc si $s + 2 \geq \max(k_1, k_2, \dots, k_p)$ on peut appliquer le lemme 3 et la fonctionnelle linéaire $R_s[f]$ est une combinaison linéaire de différences divisées d'ordre $s + 1$. Pour mettre $R_s[f]$ effectivement sous la forme (17), il suffit d'abord de réaliser un numérotage convenable des noeuds de manière que la condition (15) correspondante soit vérifiée.

Pour aller plus loin nous allons distinguer les cas où la suite (24) et la suite des noeuds $z_1, z_2, \dots, z_p$ de la fonctionnelle linéaire $A[f]$ ont ou non des termes communs. Dans la suite nous examinerons seulement les cas où la coïncidence a lieu au plus avec un seul des noeuds z_i . Soit z_1 ce noeud, dont l'ordre de multiplicité est k_1 et supposons que $x_1, x_2, \dots, x_m$ soit un numérotage normal des noeuds de $A[f]$, où $x_1 = x_2 = \dots = x_{k_1} = z_1$. Alors (si $p > 1$) aucun terme de la suite (24) ne coïncide pas avec l'un des points $x_{k_1+1}, x_{k_1+2}, \dots, x_m$.

Soit k ($0 \leq k \leq k_1$) le plus petit entre le nombre k_1 et le nombre des termes de la suite (24) égaux à z_1 . L'égalité $k = 0$ signifie qu'aucun des termes de la suite (24) ne coïncide avec un noeud z_i . Si $k > 0$, parmi les points (24) il y en a au moins k qui coïncident avec z_1 . Désignons par s' le plus petit indice tel que la suite $y_0, y_1, \dots, y_{s'-1}$ (ayant s' termes) contient au moins k termes égaux à z_1 . Nous avons $s' \geq k$ et si $k = 0$ nous pouvons prendre $s' = 0$.

Les noeuds de la fonctionnelle linéaire $R_s[f]$ peuvent être écrits dans la suite*) $y_s, y_{s+1}, \dots, y_0, x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_m$. Leur nombre est égal à $s+1+m-k$ et le numérotage correspondant à cette suite vérifie la condition (15) (avec $n=s$) si $s \geq s' + m - k - 1$ ($\geq m-1$). Il en résulte que si $m \leq k$ la fonctionnelle linéaire $R_s[f]$ est nulle identiquement**). Mais l'inégalité $m \leq k$ a lieu si et seulement si tous les noeuds x_i sont confondus avec le même point z_1 et la suite (24) contient au moins m termes égaux à z_1 .

Dans le cas contraire, donc si ou bien $p > 1$ ou bien $p = 1, k < k_1$ (dans les deux cas on a $m > k$), nous avons la formule

$$(28) \quad R_s[f] = \sum_{i=k+1}^m \mu_i^{(s)} [y_0, y_1, \dots, y_{s+1+k-i}, x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_i; f]$$

où les coefficients $\mu_i^{(s)}$ sont indépendants de la fonction f .

Nous pouvons calculer le coefficient $\mu_m^{(s)}$ de la manière suivante. Soit $x_m = z_\mu$. Alors, compte tenant de la formule (1), le coefficient de $f^{(k_\mu-1)}(z_\mu)$ dans le premier membre de (28) est égal à $a_{\mu, k_\mu-1}$ et le même coefficient dans le second membre est égal à $\mu_m^{(s)}$ multiplié par

$$\frac{1}{(k_\mu-1)!} \cdot \frac{1}{P(z_\mu) \prod_{v=k+1}^{m-k_\mu} (z_\mu - x_v)}, \text{ si } p > 1 \text{ (alors } \mu \neq 1)$$

$$\frac{1}{(k_1-1)!} \cdot \frac{k!}{P^{(k)}(z_1)}, \text{ si } p = 1, k < k_1,$$

$$\text{où } P(x) = \prod_{v=0}^{s+1+k-m} (x - y_v).$$

Il en résulte que

$$\mu_m^{(s)} = \begin{cases} (k_\mu-1)! P(z_\mu) \prod_{v=k+1}^{m-k_\mu} (z_\mu - x_v) a_{\mu, k_\mu-1} & \text{si } p > 1 \\ \frac{(k_1-1)!}{k!} P^{(k)}(z_1) a_{1, k_1-1} & \text{si } p = 1, k < k_1. \end{cases}$$

En supposant donc que la condition (2) soit vérifiée, nous avons $\mu_m^{(s)} \neq 0$.

Il en résulte que si les hypothèses précédentes sont vérifiées et si les coefficients $\mu_i^{(s)}, i = k+1, k+2, \dots, m$ sont tous du même signe, le reste $R_s[f]$ est de degré d'exactitude s et est de la forme simple. Le coefficient K de la formule (18) correspondante est égal à $R_s[x^{s+1}] = A \left[\prod_{v=0}^s (x - y_v) \right]$.

*) Ce ne sont pas nécessairement les noeuds réduits à leur nombre minimum.

**) La propriété peut ne pas subsister si $s < s' + m - k - 1$.

Dans la suite nous supposons toujours, sauf avis contraire, que pour la fonctionnelle linéaire $A[f]$ la condition (2) soit vérifiée.

14. — On obtient un intéressant cas particulier en prenant pour $A[f]$ la différence divisée (4). Pour énoncer la propriété respective, nous allons poser $a' = \min(z_1, z_2, \dots, z_p), b' = \max(z_1, z_2, \dots, z_p)$. Donc $[a', b'] \subseteq I$ est le plus petit intervalle fermé qui contient les noeuds de la fonctionnelle $A[f]$. Nous avons alors le

THÉORÈME 1. — Si sous les hypothèses et les notations précédentes : 1° les points (24) sont ou bien tous $\leq a'$, ou bien tous $\geq b'$, 2° nous avons $p > 1$ ou bien $p = 1$ et $k < k_1$, 3° $s' = k, s \geq m-1$, le reste $R_s[f]$ de la formule d'approximation

$$(29) \quad [x_1, x_2, \dots, x_m; f] = \sum_{v=0}^s \left[x_1, x_2, \dots, x_m; \prod_{i=1}^{v-1} (x - y_i) \right] \cdot [y_0, y_1, \dots, y_v; f] + R_s[f]$$

a le degré d'exactitude s et est de la forme simple.

Pour la démonstration il suffira de vérifier que les coefficients $\mu_i^{(s)}$ de la formule (28) correspondante sont tous du même signe. Nous allons calculer ces coefficients.

Nous allons calculer, en général, les coefficients $\mu_i^{(s)}$ de la formule (28) pour $A[f]$ de la forme (1), en supposant que les conditions 2° et 3° du théorème 1 soient vérifiées. Pour faire le calcul remarquons que nous avons*)

$$(30) \quad A[f(x)(x - z_1)^k] = \sum_{i=k+1}^m \mu_i^{(s)} \left[x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_i; \frac{f(x)}{\prod_{v=k}^{s+1+k-i} (x - y_v)} \right]$$

Si $k < k_1$ cette formule résulte, en appliquant les formules (7), (8), par l'identification des parties des expressions de $R_s[f]$ tirées de (26) et de (28) et qui contiennent seulement les termes correspondants aux noeuds z_i . Si $k = k_1$ la formule résulte de la même manière, en identifiant les termes qui proviennent des noeuds $z_2, z_3, \dots, z_p$.

Prenons maintenant comme fonction f le polynôme

$$(x_i - y_{s+1+k-i}) \prod_{v=k}^{s+k-i} (x - y_v) \prod_{v=k+1}^{i-1} (x - x_v), \text{ où } \prod_{v=k+1}^{i-1} (x - x_v) \text{ pour } i = k+1$$

et $\prod_{v=k}^{s+k-m} (x - y_v)$ pour $s = m-1$ sont remplacés par 1. Alors le second membre de (30) se réduit à $\mu_i^{(s)}$ et nous obtenons

$$(31) \quad \mu_i^{(s)} = (x_i - y_{s+1+k-i}) A \left[\prod_{v=1}^{i-1} (x - x_v) \prod_{v=k}^{s+k-i} (x - y_v) \right]$$

$$i = k+1, k+2, \dots, m.$$

*) Si $k = 0, A[f(x)(x - z_1)^k]$ se réduit à $A[f]$.

En revenant au théorème 1, nous avons dans ce cas $A[f] = [x_1, x_2, \dots, x_m; f]$ et en tenant compte de la formule (8),

$$(32) \quad \mu_i^{(s)} = (x_i - y_{s+1+k-i}) \cdot \left[x_i, x_{i+1}, \dots, x_m; \prod_{v=k}^{s+k-i} (x - y_v) \right],$$

$$i = k+1, k+2, \dots, m.$$

Mais le polynôme $\prod_{v=k}^{s+k-i} (x - y_v)$ a une dérivée d'ordre $m - i$ négative sur l'intervalle (a', b') si les points (24) sont à droite de b' et $s - m + 1$ est impair. Dans les autres cas, compatibles avec les hypothèses du théorème 1, cette dérivée est positive sur (a', b') . Il en résulte que les coefficients $\mu_i^{(s)}$ sont positifs si les points (24) sont ou bien à gauche de a' ou bien à droite de b' et $s - m + 1$ est impair et ils sont négatifs si les points (24) sont à droite de b' et $s - m + 1$ est pair. On a supposé $a' < b'$. Lorsque $a' = b'$ nous sommes dans le cas $p = 1$, $k < k_1$ et on voit facilement que la propriété est encore vraie.

Le théorème 1 est donc démontré.

Dans le cas du théorème 1, dans les formules (27) nous avons $c_0 = c_1 = \dots = c_{m-2} = 0$, donc si $s < m - 1$, on a $R_s[f] = [x_1, x_2, \dots, x_m; f]$.

Le théorème 1 généralise certaines propriétés de H. D. Kloosterman [1]. On obtiennent ces propriétés pour

$$x_i = x + (i-1)h, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (h \neq 0), \quad y_i = x, \quad i = 0, 1, \dots, s$$

$$x_i = x, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad y_i = x + ih, \quad i = 0, 1, \dots, s \quad (h \neq 0),$$

respectivement et si, de plus, nous supposons que la fonction f admette une dérivée continue d'ordre $s+1$ à l'intérieur du plus petit intervalle contenant les points x_i, y_i .

15. — Reprenons la formule (28) et tenons compte des conditions sous lesquelles cette formule a été établie. Nous pouvons alors trouver une relation simple entre les coefficients $\mu_i^{(s)}, \mu_i^{(s+1)}$. Nous avons

$$R_s[f] - c_{s+1}[y_0, y_1, \dots, y_{s+1}; f] = R_{s+1}[f] =$$

$$= \prod_{i=k+1}^m \frac{\mu_i^{(s+1)}}{x_i - y_{s+2+k-i}} \{ [y_0, y_1, \dots, y_{s+1+k-i}, x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_i; f] -$$

$$- [y_0, y_1, \dots, y_{s+2+k-i}, x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_{i-1}; f] \}$$

où la seconde différence divisée se réduit à $[y_0, y_1, \dots, y_{s+1}; f]$ pour $i = k+1$. La formule a un sens, puisque sous les hypothèses signalées, $x_i \neq y_{s+2+k-i}$, $i = k+1, k+2, \dots, m$.

En comparant avec la formule (28), nous déduisons,

$$(33) \quad \mu_i^{(s+1)} = (x_i - y_{s+2+k-i}) (\mu_i^{(s)} + \mu_{i+1}^{(s)} + \dots + \mu_m^{(s)})$$

$$i = k+1, k+2, \dots, m.$$

Ces formules permettent d'énoncer le

THÉORÈME 2. — Sous les hypothèses sous lesquelles on a établi la formule (28) et si : 1° tous les points (24) sont $\leq a'$ ou bien tous sont $\geq b'$ 2° il existe une valeur s_0 de s pour laquelle tous les coefficients $\mu_i^{(s)}$ sont du même signe,

le reste $R_s[f]$ de la formule d'approximation (25) est du degré d'exactitude s et est de la forme simple pour $s \geq s_0$.

En effet, sous les conditions du théorème, on voit que si les coefficients $\mu_i^{(s)}$ sont tous du même signe, les coefficients $\mu_i^{(s+1)}$ sont également tous du même signe.

16. — On peut se demander s'ils existent toujours, pour une fonctionnelle linéaire $A[f]$, de la forme (1) par ex., des valeurs de s pour lesquelles le reste $R_s[f]$ soit de la forme simple, ou bien si ce reste soit de la forme simple pour un s assez grand? Nous donnerons un exemple pour montrer que la réponse est négative.

Soit $A[f] = f(0) + f'(0)$ et prenons les points $y_v = (v+1)(v+2)$, $v = 0, 1, \dots$. Dans ce cas nous avons ($s \geq 0$),

$$R_s[f] = (-1)^s s! (s+1)! \{ [0, 0, y_0, y_1, \dots, y_{s-1}; f] -$$

$$- (s+2) [0, y_0, y_1, \dots, y_s; f] \}.$$

Compte tenant des résultats antérieurs, $R_s[f]$, qui est du degré d'exactitude s , n'est pas de la forme simple pour aucune valeur de $s \geq 3$.

17. — L'exemple précédent fait que la propriété suivante présente un certain intérêt,

THÉORÈME 3. — Sous les hypothèses sous lesquelles a été établie la formule (28) et si tous les points (23) sont confondus en un même point n'appartenant pas à l'intervalle ouvert (a', b') ,

le reste $R_s[f]$ est du degré d'exactitude s et est de la forme simple pour s suffisamment grand.

Dans ce cas nous avons $h = 0$ (si les points (24) sont à l'extérieur de $[a', b']$) ou $h = k_1$ (si les points (24) coïncident tous avec a' ou bien tous avec b'). Il suffira de donner la démonstration dans le cas $h = 0$.

Soit donc $h = 0$. Les formules (33) deviennent ($s \geq m-1$)

$$(34) \quad \mu_i^{(s+1)} = (x_i - y_0) (\mu_i^{(s)} + \mu_{i+1}^{(s)} + \dots + \mu_m^{(s)}), \quad i = 1, 2, \dots, m$$

Nous allons maintenant choisir les notations de manière que la suite $x_1, x_2, \dots, x_m$ soit non-décroissante resp. non-croissante suivant que $y_0 < a'$ resp. $y_0 > b'$. Alors les nombres $x_i - y_0$ sont différents de zéro, du même signe et la suite $|x_1 - y_0|, |x_2 - y_0|, \dots, |x_m - y_0|$, de leurs valeurs absolues est non-décroissante.

De (34) nous déduisons

$$(35) \quad \mu_i^{(s)} = \sum_{j=i}^m M_{i,j}^{(s)} \mu_j^{(m-1)}, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

où la matrice triangulaire $(M_{i,j}^{(s)})$ est la $(s - m + 1)^{\text{ème}}$ puissance de la matrice triangulaire

$$\begin{pmatrix} x_1 - y_0 & x_1 - y_0 & \dots & x_1 - y_0 \\ 0 & x_2 - y_0 & \dots & x_2 - y_0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & x_m - y_0 \end{pmatrix}$$

Désignons par $W_i(z_1, z_2, \dots, z_r)$ la fonction symétrique $\sum z_1^i z_2^i \dots z_r^i$, la somme étant étendue aux solutions en entiers non-négatifs de l'équation en α_i , $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_r = i$ ($W_0(z_1, z_2, \dots, z_r) = 1$). Nous avons

$$(36) \quad M_{i,j}^{(s)} = (x_i - y_0) W_{s-m}(x_i - y_0, x_{i+1} - y_0, \dots, x_i - y_0), \\ j = i, i+1, \dots, m; i = 1, 2, \dots, m.$$

18. — Avant d'aller plus loin nous allons établir un lemme qui présente un intérêt, indépendamment de l'application que nous lui donnons ici.

Lemme 6. — Si les nombres non-négatifs $z_1, z_2, \dots, z_{r-1}$ ($r > 1$) sont compris dans l'intervalle $[0, z_r]$, nous avons l'inégalité

$$(37) \quad \frac{W_i(z_1, z_2, \dots, z_r)}{(r-1+i)} \geq \frac{W_i(z_1, z_2, \dots, z_{r-1})}{(r-2+i)}$$

l'égalité étant vraie si et seulement si ou bien $i = 0$, ou bien $i > 0$ et tous les nombres $z_1, z_2, \dots, z_r$ sont égaux.

La propriété est immédiate pour $i = 0$ et pour $i > 0$ et $z_1 = z_2 = \dots = z_{r-1} = 0$.

Supposons que $z_1, z_2, \dots, z_{r-1}$ ne soient pas tous nuls. Alors on a nécessairement $z_r > 0$. Nous avons

$$W_i(z_1, z_2, \dots, z_r) = [z_1, z_2, \dots, z_r; x^{r-1+i}]$$

$$W_i(z_1, z_2, \dots, z_{r-1}) = [z_1, z_2, \dots, z_{r-1}; x^{r-2+i}] =$$

$$= [z_1, z_2, \dots, z_r; x^{r-2+i} (x - z_r)]$$

d'où

$$\left(\frac{r-1+i}{i} \right) \left[\frac{W_i(z_1, z_2, \dots, z_r)}{(r-1+i)} - \frac{W_i(z_1, z_2, \dots, z_{r-1})}{(r-2+i)} \right] = W_i(z_1, z_2, \dots, z_r) - \\ - \frac{r-1+i}{r-1} W_i(z_1, z_2, \dots, z_{r-1}) = \frac{1}{r-1} [z_1, z_2, \dots, z_r; x^{r-2+i} ((r-1+i)z_r - ix)],$$

Mais la dérivée $(r-1)^{\text{ème}}$ du polynôme $x^{r-2+i} [(r-1+i)z_r - ix]$ est égale à $\frac{(r-1+i)!}{(i-1)!} x^{i-1} (z_r - x)$, qui est positive sur l'intervalle $(0, z_r)$. Il en résulte que le polynôme considéré est convexe d'ordre $r-2$. L'inégalité (37) en résulte immédiatement.

Le cas de l'égalité est facile à étudier.

Le lemme 6 est donc démontré.

Le nombre $\binom{r-1+i}{i}$ est précisément le nombre des termes de la fonction symétrique $W_i(z_1, z_2, \dots, z_r)^*$

Si $0 < z_1 \leq z_2 \leq \dots \leq z_r$, qui est le cas qui nous intéresse tout particulièrement dans la démonstration du théorème 3, nous pouvons déduire encore une inégalité remarquable. Dans ce cas nous avons

$$(\nu-1)W_i(z_1, z_2, \dots, z_\nu) - (\nu-1+i)W_i(z_1, z_2, \dots, z_{\nu-1}) \geq 0, \nu = 2, 3, \dots, r.$$

Si nous ajoutons membre à membre ces inégalités, nous déduisons ($r > 1$),

$$(38) \quad \frac{W_i(z_1, z_2, \dots, z_r)}{\sum_{\nu=1}^{r-1} W_i(z_1, z_2, \dots, z_\nu)} \geq \frac{i+1}{r-1}.$$

19. — Revenons à la démonstration du théorème 3. Compte tenant de (36) et de (38), nous déduisons

$$(39) \quad \frac{M_{i,m}^{(s)}}{\sum_{j=i}^{m-1} M_{i,j}^{(s)}} \geq \frac{s-m+1}{m-i} \geq \frac{s-m+1}{m-1}, i = 1, 2, \dots, m-1$$

et de la formule (35) nous obtenons

$$\mu_i^{(s)} = \left\{ \frac{M_{i,m}^{(s)}}{\sum_{j=i}^{m-1} M_{i,j}^{(s)}} \mu_m^{(m-1)} + \frac{\sum_{j=i}^{m-1} \mu_j^{(m-1)} M_{i,j}^{(s)}}{\sum_{j=1}^{m-1} M_{i,j}^{(s)}} \right\} \frac{m-1}{\sum_{j=1}^{m-1} M_{i,j}^{(s)}} \\ i = 1, 2, \dots, m-1.$$

Nous remarquons maintenant que : 1° les sommes $\sum_{j=i}^{m-1} M_{i,j}^{(s)}$, $i = 1, 2, \dots, m-1$ sont différentes de zéro et du même signe, 2° le quotient $\frac{\sum_{j=i}^{m-1} \mu_j^{(m-1)} M_{i,j}^{(s)}}{\sum_{j=1}^{m-1} M_{i,j}^{(s)}}$ est une moyenne arithmétique pondérée des nombres $\mu_i^{(m-1)}, \mu_{i+1}^{(m-1)}, \dots, \mu_{m-1}^{(m-1)}$. Ces nombres restent compris entre deux nombres fixes, indépendants de s (entre $\min_{i=1,2,\dots,m-1} \mu_i^{(m-1)}$ et $\max_{i=1,2,\dots,m-1} \mu_i^{(m-1)}$).

*) L'inégalité (37) peut aussi s'écrire sous la forme d'une inégalité entre deux valeurs moyennes.

$$\sqrt{\frac{W_i(z_1, z_2, \dots, z_r)}{(r-1+i)}} \geq \sqrt{\frac{W_i(z_1, z_2, \dots, z_{r-1})}{(r-2+i)}}$$

3° $\mu_m^{(m-1)}$ est différent de zéro, sous les hypothèses du théorème 3 (voir nr. 13). De (39) il résulte donc que, pour

$$s > (m-1) \left(1 + \max_{i=1,2,\dots,m-1} \left| \frac{\mu_i^{(m-1)}}{\mu_m^{(m-1)}} \right| \right),$$

tous les nombres $\mu_i^{(s)}$, $i = 1, 2, \dots, m$ sont différents de zéro et du même signe (leur signe est celui de $[\operatorname{sg}(x_i - y_0)]^{s-m} \cdot \operatorname{sg} \mu_m^{(m-1)}$).

Le théorème 3 est ainsi démontré pour $k = 0$. Pour $k = k_1$ (dans ce cas $p > 1$), la démonstration se fait d'une façon tout à fait analogue, en nous basant sur les formules (33) pour $k = k_1$.

Le théorème 3 est donc démontré.

20. — Pour donner un exemple prenons la fonctionnelle linéaire

$$A[f] = f(6) - f(0) - 0,28 [f'(0) + f'(6)] - 1,62 [f'(1) + f'(5)] - 2,2 \times f'(3),$$

qui est le reste de la formule de quadrature de Hardy [2]

$$\int_0^6 f(x) dx = 0,28 [f(0) + f(6)] + 1,62 [f(1) + f(5)] + 2,2 \times f(3) + R^*[f]$$

appliquée à la fonction $f'(x)$ ($R^*[f'] = A[f]$).

$A[f]$ est du degré d'exactitude 6, mais n'est pas de la forme simple [7]. Si nous considérons le développement taylorien

$$A[f] = \sum_{v=7}^s A[x^v] \frac{f^{(v)}(0)}{v!} + R_s[f]$$

en vertu du théorème 3, le reste $R_s[f]$ est du degré d'exactitude s et est de la forme simple pour s assez grand.

Nous avons dans ce cas $p = 5$, $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = k_6 = 2$, $m = 10$, $k = s' = 2$, $x_1 = x_2 = 0$, $x_3 = x_4 = 1$, $x_5 = x_6 = 3$, $x_7 = x_8 = 5$, $x_9 = x_{10} = 6$, $y_0 = y_1 = \dots = 0$. Nous pouvons appliquer les formules (31) et nous trouvons

$$\begin{aligned} \mu_3^{(s)} &= A[x^s], & \mu_7^{(s)} &= 5A[x^{s-4}(x-1)^2(x-3)^2] \\ \mu_4^{(s)} &= A[x^{s-1}(x-1)], & \mu_8^{(s)} &= 5A[x^{s-5}(x-1)^2(x-3)^2(x-5)] \\ \mu_5^{(s)} &= 3A[x^{s-2}(x-1)^2], & \mu_9^{(s)} &= 6A[x^{s-6}(x-1)^2(x-3)^2(x-5)^2] \\ \mu_6^{(s)} &= 3A[x^{s-3}(x-1)^2(x-3)], & \mu_{10}^{(s)} &= 6A[x^{s-7}(x-1)^2(x-3)^2(x-5)^2(x-6)] \end{aligned}$$

A l'aide de ces formules on peut calculer les coefficients $\mu_i^{(9)}$, en faisant $s = 9$, en tenant compte du fait que $A[f]$ a le degré d'exactitude 6 et en calculant les nombres

$$A[x^7] = 64,8 \quad A[x^8] = 1555,2 \quad A[x^9] = 19828,8$$

Pour calculer les coefficients $\mu_i^{(s)}$ pour $s > 9$, on applique les formules de récurrence (33) qui deviennent ici

$$\begin{aligned} \mu_3^{(s+1)} &= \mu_3^{(s)} + \mu_4^{(s)} + \mu_5^{(s)} + \mu_6^{(s)} + \mu_7^{(s)} + \mu_8^{(s)} + \mu_9^{(s)} + \mu_{10}^{(s)} \\ \mu_4^{(s+1)} &= \mu_4^{(s)} + \mu_5^{(s)} + \mu_6^{(s)} + \mu_7^{(s)} + \mu_8^{(s)} + \mu_9^{(s)} + \mu_{10}^{(s)} \\ \mu_5^{(s+1)} &= 3(\mu_5^{(s)} + \mu_6^{(s)} + \mu_7^{(s)} + \mu_8^{(s)} + \mu_9^{(s)} + \mu_{10}^{(s)}) \\ \mu_6^{(s+1)} &= 3(\mu_6^{(s)} + \mu_7^{(s)} + \mu_8^{(s)} + \mu_9^{(s)} + \mu_{10}^{(s)}) \\ \mu_7^{(s+1)} &= 5(\mu_7^{(s)} + \mu_8^{(s)} + \mu_9^{(s)} + \mu_{10}^{(s)}) \\ \mu_8^{(s+1)} &= 5(\mu_8^{(s)} + \mu_9^{(s)} + \mu_{10}^{(s)}) \\ \mu_9^{(s+1)} &= 6(\mu_9^{(s)} + \mu_{10}^{(s)}), \quad \mu_{10}^{(s+1)} = 6\mu_{10}^{(s)} \end{aligned}$$

$$s = 9, 10, \dots$$

Il suffit de faire les calculs jusqu'à la valeur 13 de s et nous trouvons les valeurs des coefficients $\mu_i^{(s)}$ comprises dans le tableau

$i \backslash s$	9	10	11	12	13
3	19 828,8	174 960	1 108 792,8	3 888 777,6	-19 594 483,2
4	18 273,6	155 131,2	933 832,8	2 779 984,8	-23 483 260,8
5	50 349,6	410 572,8	2 336 104,8	5 538 456	-78 789 736,8
6	37 519,2	259 524	1 104 386,4	-1 469 858,4	-95 405 104,8
7	44 064	244 944	543 024	-7 971 696	-151 659 216
8	18 144	24 624	-681 696	-10 686 816	-111 800 736
9	388,8	-79 315,2	-965 779,2	-8 734 003,2	-70 039 987,2
10	-13 608	-81 648	-489 888	-2 939 328	-17 635 968

On voit que le reste est de la forme simple pour $s \geq 13$.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Kloostermann, H. D., *Derivatives and finite differences*. Duke Math. Journal, **17**, 169-186 (1950).
- [2] Микеладзе Ш. Е., *Численные методы математического анализа*, (§ 142), Москва, 1953.
- [3] Popoviciu, T., *Introduction à la théorie des différences divisées*. Bull. Math. de la Soc. Roumaine des sc., **42**, 65-78 (1940).
- [4] — *Asupra formulei restului în unele formule de aproximare ale analizei*. Lucr. Ses. Gen. științifice, Acad. R.P.R., 183-185, 1950.
- [5] — *Asupra restului în unele formule de derivare numerică*. Studii și Cerc. Mat., **III**, 53-122 (1952).
- [6] — *Folytonos függvények középértékteleiről*. Magy. Tud. Akad., II oszt. közlem., **IV**, 353-356 (1954).
- [7] — *Sur le reste dans certaines formules linéaires d'approximation de l'analyse*. Mathematica, **1** (24), 95-142 (1959).

Reçu le 28. XI. 1959.