SOCIETATEA DE ŞTIINŢE MATEMATICE ŞI FIZICE DIN R. P. R.
FILIALA CLUJ

MATHEMATICA

VOLUMUL 2 (25)

FASCICOLA 1

1960

EXTRAS

TIBERIU POPOVICIU

SUR LA DÉLIMITATION DU RESTE DANS CERTAINES FORMULES D'APPROXIMATION LINÉAIRES DE L'ANALYSE

CLUJ

MATHEMATICA VOL. 2 (25), 1, 1960, pp. 159 – 162

SUR LA DÉLIMITATION DU RESTE DANS CERTAINES FORMULES D'APPROXIMATION LINÉAIRES DE L'ANALYSE

par

TIBERIU POPOVICIU

à Cluj

1. Supposons que le reste $R[f]$ d'une formule d'approximation linéaire soit une fonctionnelle linéaire définie sur l'espace vectoriel S, formé par des fonctions $f = f(x)$, définies et continues sur un intervalle I. Les fonctions f et la fonctionnelle linéaire $R[f]$ sont réelles et S contient tous les polynomes.

Nous disons que $R[f]$ est *de la forme simple* si'l existe un entier $n \geqq -1$ tel que l'on ait

$$R[f] = K \cdot [\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n+1}; f], \ f \in S, \tag{1}$$

où $K = R[x^{n+1}]$ est $\neq 0$, indépendant de la fonction f et ξ_i, $i = 1, 2, \ldots$ $\ldots, n+2$ sont $n+2$ points distincts de l'intervalle I (pouvant, en général, dépendre de la fonction f et situés même à l'intérieur de I si $n \geqq 0$). La notation $[\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n+2}; f]$ désigne la différence divisée de la fonction f sur les noeuds $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n+2}$. Pour ces notions et les quelques propriétés qui vont suivre nous prions le lecteur de se rapporter à nos travaux antérieurs, en particulier, à notre travail du volume précédent de cette revue [3].

Dans ce cas n est le degré d'exactitude du reste et jouit de la propriété (caractéristique) que $R[f]$ est nul sur tout polynome de degré n, mais $R[x^{n+1}] \neq 0$.

Rappelons que *la condition nécessaire et suffisante pour que* $R[f]$, *supposé du degré d'exactitude n, soit de la forme simple est que l'on ait* $R[f] \neq 0$ *pour tout* $f \in S$, *qui est convexe d'ordre* n (sur I). Dans ce cas il est, d'ailleurs, nécessaire que $R[f]$ garde son signe pour f convexe d'ordre n. En remarquant que la fonction x^{n+1} est bien convexe d'ordre n, la condition précédente peut aussi s'écrire

$$R[x^{n+1}]\, R[f] > 0. \tag{2}$$

La condition (2), pour tout $f \in S$ convexe d'ordre n, est donc nécessaire et suffisante pour que $R[f]$ soit de la forme simple (1). Remarquons que pour cela est aussi nécessaire (mais non pas suffisante) que l'on ait $R[x^{n+1}] \neq 0$ et

$$R[x^{n+1}]\, R[f] \geqq 0, \tag{3}$$

pour toute fonction $f \in S$, non-concave d'ordre n.

2. Si $R[f]$ est de la forme simple (1), on peut le délimiter par la formule

$$|R[f]| \leqq |R[x^{n+1}]|\, M \tag{4}$$

où

$$M = \sup_{x_i \in I} |[x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}\, ; f]|. \tag{5}$$

D'ailleurs, si f a une dérivée d'ordre $n+1$ (bornée) sur I, le nombre (5) est donné par l'égalité

$$M = \frac{1}{(n+1)!} \sup_{x \in I} |f^{(n+1)}(x)|.$$

Mais, la délimitation (4) est valable dans un cas plus général. Notamment, nous allons démontrer que :

La délimitation (4) *est valable si* $R[f]$ *est du degré d'exactitude n et si l'inégalité* (3) *est vérifiée pour toute fonction* $f \in S$, *non-concave d'ordre n.*

Nous avons $R[x^{n+1}] \neq 0$ et pour la démonstration nous pouvons supposer que $R[x^{n+1}] > 0$. Considérons alors la fonctionnelle linéaire (définie aussi sur S)

$$R_1[f] = R[f] + \varepsilon\, [x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}\, ; f], \tag{6}$$

où $x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}$ sont $n+2$ points distincts fixes (indépendants de la fonction f) de l'intervalle I et ε est un nombre positif quelconque. Nous allons montrer que $R_1[f]$ est de la forme simple (1). En effet, si nous tenons compte du fait que la différence divisée sur $n+2$ noeuds (non tous confondus) d'une fonction convexe d'ordre n est, par définition positive, nous déduisons que $R_1[f] > 0$, pour $f \in S$ convexe d'ordre n. La propriété est démontrée. Compte tenant de (5) et de (6), en écrivant aussi la délimitation (4) correspondante pour $R_1[f]$, nous obtenons

$$|R[f]| \leqq (R[x^{n+1}] + 2\varepsilon)\, M.$$

Cette inégalité étant vraie quelque soit le nombre positif ε, il résulte que nous avons (4) et la propriété cherchée est démontrée. Si nous avons $R[x^{n+1}] < 0$, la démonstration est tout à fait analogue. On prend alors dans (6) pour ε un nombre négatif quelconque.

3. Pour appliquer le propriété précédente il suffit de connaître des critères permettant d'affirmer que (sous l'hypothèse $R[x^{n+1}] \neq 0$) l'inégalité

(3) est vérifiée pour toute fonction $f \in S$ non-concave d'ordre n. Nous allons faire connaître ici un tel critère qui résulte de la remarquable propriété des polynomes d'approximation de S. N. Bernstein de conserver les caractères de convexité des fonctions [2].

Supposons que $I = [0, 1]$ et que les éléments de S aient une dérivée d'ordre j ($\geqq 0$) continue sur $[0, 1]$. Considérons la fonctionnelle linéaire $R[f]$, du degré d'exactitude n et qui soit bornée par rapport à la norme

$$\|f\| = \sum_{i=0}^{j} \sup_{x \in [0,1]} |f^{(i)}(x)|. \tag{7}$$

Posons

$$\pi_{k,l} = \frac{(-1)^{n+1}}{n!} \int_x^1 (t-x)^n\, t^k (1-t)^l\, dt.$$

Sous les hypothèses précédentes, nous avons la propriété suivante :

Pour que l'inégalité (3) *soit vérifiée pour toute fonction* $f \in S$ *non-concave d'ordre n, il* (faut et il) *suffit que l'on ait* $R[x^{n+1}]\, R[\pi_{k,l}] \geqq 0$, *quels que soient les entiers non-négatifs k et l.*

Remarquons que $\pi_{k,l}^{(n+1)} = x^k (1-x)^l$. Si

$$B_m = B_m(x\, ; f) = \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} f\left(\frac{i}{m}\right) x^i (1-x)^{m-i}$$

est le polynome de S. N. Bernstein de degré m, pour sa dérivée d'ordre $n+1$ nous avons ($m \geqq n+1$),

$$B_m^{(n+1)} = \frac{(m-1)!\,(n+1)!}{m^n (m-n-1)!} \sum_{i=0}^{m-n-1} \binom{m-n-1}{i} \left[\frac{i}{m}, \frac{i+1}{m}, \ldots, \frac{i+n+1}{m}\, ; f\right] \pi_{i,m-n-1-i}^{(n+1)},$$

d'où

$$B_m = \frac{(m-1)!\,(n+1)!}{m^n (m-n-1)!} \sum_{i=0}^{m-n-1} \binom{m-n-1}{i} \left[\frac{i}{m}, \frac{i+1}{m}, \ldots, \frac{i+n+1}{m}\, ; f\right] \pi_{i,m-n-1-i} + \beta_m,$$

où β_m est un polynome de degré n.

D'après S. N. BERNSTEIN [1] et S. WIGERT [4] si la dérivée $f^{(i)}$ d'ordre i ($\geqq 0$) de la fonction f existe et est continue sur $[0,1]$, la suite $(B_m^{(i)})$ tend, pour $m \to \infty$, uniformément sur $[0, 1]$, vers $f^{(i)}$. Il en résulte que $R[B_m] \to R[f]$ pour $m \to \infty$, donc

$$\lim_{m \to \infty} R[x^{n+1}]\, R[B_m] = R[x^{n+1}]\, R[f]. \tag{8}$$

Si nous remarquons que

$$R[B_m] = \frac{(m-1)!\,(n+1)!}{m^n (m-n-1)!} \sum_{i=0}^{m-n-1} \binom{m-n-1}{i} \left[\frac{i}{m}, \frac{i+1}{m}, \ldots, \frac{i+n+1}{m}\, ; f\right] R[\pi_{i,m-n-1-i}]$$

et que les différences divisées sur $n+2$ noeuds d'une fonction non-concave d'ordre n sont non-négatives, il en résulte que $R[x^{n+1}]R[B_m] \geq 0$, pour une fonction f non-concave d'ordre n. Compte tenant de (8), la propriété cherchée en résulte.

4. Pour donner une application soit $R[f]$ le reste dans la formule de quadrature numérique

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{2}{3} f(0) + \frac{1}{5} f'(0) + \frac{1}{30} f''(0) + \frac{1}{360} f'''(0) + \frac{1}{3} f(1) - \frac{1}{30} f'(1) + R[f],$$

où f a une dérivée d'ordre 3 continue sur $[0,1]$.

Dans ce cas $R[f]$ est du degré d'exactitude $n=5$ et est borné par rapport à la norme (7) pour $j=3$. Dans notre cas

$$\pi_{k,l} = \frac{1}{5!}\int_x^1 (t-x)^5\, t^k (1-t)^l\, dt.$$

Nous déduisons

$$R[x^6] = \frac{1}{105} > 0, \quad \int_0^1 \pi_{k,l}\, dx = \frac{1}{6!}\int_0^1 t^{6+k}(1-t)^l\, dt$$

et un calcul simple nous donne

$$R[\pi_{k,l}] = \frac{1}{6!}\int_0^1 t^{k+2}(1-t)^{l+4}\, dt > 0.$$

La délimitation (4) est donc bien applicable dans ce cas et nous avons

$$|R[f]| \leq \frac{1}{105} \sup_{x_i \in [0,1]} |[x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7; f]|.$$

Si la dérivée d'ordre 6, $f^{(6)}$, existe sur $[0,1]$, nous avons

$$|R[f]| \leq \frac{1}{150} \cdot \frac{1}{6!} \sup_{x \in [0,1]} |f^{(6)}(x)|.$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] Bernstein S. N., *Démonstration du théorème de Weierstrass fondée sur le calcul des probabilités.* Сообщ. Харьк. Матем. Об-ва, серия 2, **13**, 1—2 (1912).

[2] Popoviciu T., *Sur l'approximation des fonctions convexes d'ordre supérieur.* Mathematica, **10**, 49—54 (1934).

[3] — *Sur le reste dans certaines formules linéaires d'approximation de l'analyse.* Mathematica **1(24)**, 95—142 (1960).

[4] Wigert S., *Sur l'approximation par polynomes des fonctions continues.* Arkiv för Mat., Astr., och Fysik, **22** B, No. 9, 1—4 (1932).

Reçu le 28. II. 1960.