

8 - 3734/16
Tiré à part du

Symposium, Centre International Provisoire de Calcul, 1960

Birkhäuser Verlag Basel

SUR LA DÉLIMITATION DU RESTE DANS LES FORMULES D'APPROXIMATION LINÉAIRES DE L'ANALYSE

by Tiberiu Popoviciu

Université de Cluj

Cluj (Rumania)

1. Dans beaucoup de formules d'approximation de l'analyse le reste, ou terme complémentaire, $R[f]$ est une fonctionnelle linéaire (additive et homogène) définie sur un espace vectoriel S , formé par des fonctions $f = f(x)$, définies et continues sur un intervalle I de l'axe réel. Les formules habituelles d'interpolation (polynomiale ou trigonométrique), de dérivation et d'intégration numériques, etc., ont un reste de cette forme.

Dans les applications il est important de pouvoir délimiter convenablement le reste $R[f]$. Pour cela on a cherché, tout au moins dans des cas particuliers bien déterminés, à mettre le reste sous diverses formes convenables. Par exemple sous la forme d'une intégrale définie ou d'une combinaison linéaire d'un nombre fini de valeurs des dérivées, d'ordres divers, de la fonction f , etc.

Il existe un grand nombre de travaux sur la structure du reste $R[f]$. Je citerai seulement A.A. Markoff [4], G.D. Birkhoff [2], G. Kowalewski [3], R.v. Mises [5], J. Radon [12], E. Ya. Remez [13], A. Sard [14].

J'ai obtenu, à l'aide de la théorie des fonctions convexes d'ordre supérieur que j'ai étudiée autrefois [7, 9], une nouvelle représentation du reste, qui est plus générale et met mieux en évidence sa structure [10, 11].

Dans cette communication je ferai quelques remarques sur cette représentation.

Nous supposons dans la suite que la fonction f et la fonctionnelle $R[f]$ sont réelles et que S contient tous les polynômes.

2. Nous disons que $R[f]$ est de la forme simple s'il existe un entier $n \geq -1$ tel que l'on ait

$$(1) \quad R[f] = K \cdot [\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+2}; f]; \quad f \in S$$

où $K = R[x^{n+1}]$ est $\neq 0$, indépendant de la fonction f et les ξ_i , $i = 1, 2, \dots, n+2$ sont $n+2$ points distincts de l'intervalle I (pouvant en général, dépendre de la fonction f et même situés à l'intérieur de I si $n \geq 0$). La notation $[\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+2}; f]$ désigne la différence divisée (d'ordre $n+1$) de la fonction f sur les noeuds $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+2}$.

Le nombre n est le *degré d'exactitude* du reste et jouit de la propriété (caractéristique) que $R[f]$ est nul sur tout polynôme de degré n , mais que l'on a $R[x^{n+1}] \neq 0$.

De la forme simple est, par exemple, le reste dans la formule de Taylor, dans la formule d'interpolation de Lagrange, dans la formule de quadrature de Gauss, etc.

Rappelons la propriété suivante:

I. La condition nécessaire et suffisante pour que $R[f]$, supposé du degré d'exactitude n , soit de la forme simple est que l'on ait $R[f] \neq 0$ pour tout $f \in S$, convexe d'ordre n .

Dans ce cas il est, d'ailleurs, nécessaire que $R[f]$ garde son signe pour f convexe d'ordre n . En remarquant que la fonction x^{n+1} est bien convexe d'ordre n , la condition précédente peut aussi s'écrire

$$(2) \quad R[x^{n+1}]R[f] > 0$$

La condition (2), pour tout $f \in S$ convexe d'ordre n , est donc nécessaire et suffisante pour que $R[f]$ soit de la forme simple (1). Remarquons que pour cela est aussi nécessaire (mais non pas suffisant) que l'on ait $R[x^{n+1}] \neq 0$ et

$$(3) \quad R[x^{n+1}]R[f] \geq 0,$$

pour toute fonction $f \in S$, non-concave d'ordre n .

Rappelons que la fonction f est dite convexe resp. non-concave d'ordre n sur I si la différence divisée d'ordre $n+1$ sur $n+2$ points distincts quelconques de I reste constamment positive resp. non-négative.

3. Si $R[f]$ est de la forme simple, on peut le délimiter par la formule

$$(4) \quad |R[f]| \leq |R[x^{n+1}]| M$$

ou

$$(5) \quad M = \sup_{x_i \in I} |[\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+2}; f]|.$$

D'ailleurs, si f a une dérivée d'ordre $n+1$ (bornée) sur I , le nombre (5) est donné par l'égalité

$$M = \frac{1}{(n+1)!} \sup_{x \in I} |f^{(n+1)}(x)|.$$

La délimitation (4) est valable dans un cas plus général que dans celui de la simplicité de $R[f]$. Nous avons la propriété suivante:

II. La délimitation (4) est valable si $R[f]$ est de degré d'exactitude n et si l'inégalité (3) est vérifiée pour toute fonction $f \in S$, non-concave d'ordre n .

4. Pour pouvoir affirmer que le reste $R[f]$ est de la forme simple, il suffit de connaître des critères permettant d'affirmer que (sous l'hypothèse $R[x^{n+1}] \neq 0$) l'inégalité (2) est vérifiée pour tout $f \in S$ convexe d'ordre n .

Ici nous allons faire connaître un critère permettant d'affirmer que (sous l'hypothèse $R[x^{n+1}] \neq 0$) l'inégalité (3) est vérifiée pour toute fonction $f \in S$, non-concave d'ordre n , donc un critère permettant d'appliquer la propriété II. Ce critère est basé sur les remarquables propriétés de convergence et de la conservation des caractères de convexité de la fonction f , par les polynômes correspondant de S.N. Bernstein [1, 8, 15].

Supposons que $I = [0, 1]$ et que les éléments de S aient une dérivée d'ordre $j (\geq 0)$ continue sur $[0, 1]$ (la dérivée d'ordre 0 est la fonction elle-même). Considérons alors la fonctionnelle linéaire $R[f]$, de degré d'exactitude n et qui est bornée par rapport à la norme

$$(6) \quad \|f\| = \sum_{i=0}^j \sup_{x \in [0, 1]} |f^{(i)}(x)|.$$

Posons

$$\pi_{k,l} = \frac{(-1)^{n+1}}{n!} \int_x^1 (t-x)^n t^k (1-t)^l dt$$

Sous les hypothèses précédentes, nous avons la propriété suivante:

III. Pour que l'inégalité (3) soit vérifiée pour toute fonction $f \in S$ non-concave d'ordre n il (faut et il) suffit que l'on ait

$$R[x^{n+1}]R[\pi_{k,l}] \geq 0$$

quels que soient les entiers non-négatifs k et l .

La démonstration résulte du fait que si

$$B_m = \sum_{i=0}^m \binom{m}{i} f\left(\frac{i}{m}\right) x^i (1-x)^{m-i} \quad (m \geq n+1)$$

sont les polynômes de S.N. Bernstein, nous avons, sous les hypothèses précédentes,

$$R[B_m] = \frac{(m-1)!(n+1)!}{m^n(m-n-1)!} \sum_{i=0}^{m-n-1} \binom{m-n-1}{i} \left[\frac{i}{m}, \frac{i+1}{m}, \dots, \frac{i+n+1}{m}; f \right] R[\pi_{i, m-n-1-i}]$$

et

$$\lim_{m \rightarrow \infty} R[x^{n+1}] R[B_m] = R[x^{n+1}] R[f]$$

et où f est une fonction non-concave d'ordre n appartenant à S .

5. Pour donner une application, soit $R[f]$ le reste dans la formule de quadrature numérique de N. Obrechhoff [6].

$$\int_0^1 f(x) dx = \frac{2}{3} f(0) + \frac{1}{5} f'(0) + \frac{1}{30} f''(0) + \frac{1}{360} f'''(0) +$$

$$+ \frac{1}{3} f(1) - \frac{1}{30} f'(1) + R[f].$$

où f a une dérivée d'ordre 3 continue sur $[0, 1]$.

Dans ce cas $R[f]$ est de degré d'exactitude 5 et est borné par rapport à la norme (6) pour $j = 3$.

Un calcul simple nous donne dans ce cas

$$R[x^6] = \frac{1}{105} > 0, \quad R[\pi_{k,l}] = \frac{1}{6!} \int_0^1 t^{k+2} (1-t)^{l+4} dt > 0$$

La délimitation (4) est donc bien applicable et nous avons

$$|R[f]| \leq \frac{1}{105} \sup_{x_i \in [0, 1]} |[x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7; f]|$$

Si la dérivée d'ordre $f^{(6)}$ existe sur $[0, 1]$ nous avons

$$|R[f]| \leq \frac{1}{105} \cdot \frac{1}{6!} \sup_{x \in [0, 1]} |f^{(6)}(x)|$$

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Bernstein, S.N.: Hark. Matem. ob-va, s. 2, t. 13, 1-2 (1912)
- [2] Birkhoff, G.D.: Trans. Amer. Math. Soc., 7, 107-130 (1906)
- [3] Kowalewski, G.: *Interpolation und genäherte Quadratur*, 1932
- [4] Markoff, A.A.: *Differenzenrechnung*, 1896
- [5] Mises, R.V.: J.f. die reine und angew. Math., 174, 56-67 (1936)
- [6] Obrechhoff, N.: Abh. preuss. Akad. Wiss., 1940, Nr. 4, 1-20
- [7] Popoviciu, T.: Mathematica, 8, 1-85 (1934)
- [8] " : ibid., 10, 49-54 (1934)
- [9] " : ibid., 12, 81-92 (1936)
- [10] " : Lucrarile Ses. Gen. Stuntifice a Acad. R. P.R., 1950, p. 183-185.
- [11] " : Mathematica, 1 (24), 95-142 (1960)
- [12] Radon, J.: Monatshefte f. Math. u. Phys., 42, 389-396 (1935)

- [13] Ramez, E. Ya.: Zbirnik Praci Institutu Matem. Akad. Nauk. USSR, 3, 21-62 (1939)
- [14] Sard, A.: Duke Math. J. 15, 333-345 (1948)
- [15] Wigert, S.: Arkiv f. Mat. Astr. och Fysik, Bd. 22B, n. 9, 1-4 (1932).