

8-3734/17

SEPARATUM

ANNALES

UNIVERSITATIS SCIENTIARUM
BUDAPESTINENSIS
DE ROLANDO EÖTVÖS NOMINATAE

SECTIO MATHEMATICA

TOMUS III—IV.

T. POPOVICIU

REMARQUES SUR LA CONSERVATION DU SIGNE ET
DE LA MONOTONIE PAR CERTAINS POLYNOMES
D'INTERPOLATION D'UNE FONCTION
D'UNE VARIABLE



1960/61

ANNALES

UNIVERSITATIS SCIENTIARUM
BUDAPESTINENSIS
DE ROLANDO EÖTVÖS NOMINATAE

SECTIO BIOLOGICA
inceptit anno MCMLVII
SECTIO CHIMICA
inceptit anno MCMLIX
SECTIO GEOLOGICA
inceptit anno MCMLVII
SECTIO HISTORICA
inceptit anno MCMLVII
SECTIO IURIDICA
inceptit anno MCMLIX
SECTIO MATHEMATICA
inceptit anno MCMLVIII
SECTIO PHILOLOGICA
inceptit anno MCMLVII

REMARQUES SUR LA CONSERVATION DU SIGNE ET DE LA MONOTONIE PAR CERTAINS POLYNOMES D'INTERPOLATION D'UNE FONCTION D'UNE VARIABLE

Par
TIBERIU POPOVICIU
(Cluj, R. P. Roumaine)
(Reçu le 14 Avril 1960.)
Dédié à la mémoire de L. FEJÉR

On connaît l'intérêt tout particulier que L. FEJÉR a montré aux problèmes d'interpolation par polynômes. Lui-même a obtenu des résultats d'une très grande importance dans ce domaine. Dans la suite je me propose de faire quelques remarques bien simples sur certains de ces problèmes.

1. Considérons l'opérateur linéaire

$$(1) \quad \Phi[f|x] = \sum_{i=1}^n \varphi_i(x) f(x_i),$$

défini sur l'espace des fonctions f , réelles et d'une variable réelle x , définies sur un intervalle I contenant les *noeuds* distincts

$$(2) \quad x_1, x_2, \dots, x_n$$

et où

$$(3) \quad \varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)$$

sont des fonctions réelles, de la variable réelle x , définies sur l'intervalle I' . Pour fixer les notations, nous supposons toujours que

$$(4) \quad x_1 < x_2 < \dots < x_n.$$

Si, en particulier, les (3) sont des polynômes nous pouvons prendre pour I' l'axe réelle $(-\infty, \infty)$.

En donnant à x la valeur x_0 on déduit de (1) la fonctionnelle linéaire $\Phi[f|x_0]$.

Nous dirons que l'opérateur (1) *conservé le signe* de la fonction f si nous avons $\Phi[f|x] \geq 0$ sur I' pour toute fonction f non-négative sur I . Pour qu'il en soit ainsi il faut et il suffit que la fonctionnelle linéaire $\Phi[f|x_0]$ conserve le signe de la fonction f , donc qu'elle soit non-négative pour toute fonction f non-négative sur I et pour tout $x_0 \in I'$.

Il est toujours possible de construire une fonction f non-négative sur I et prenant sur les noeuds (2) des valeurs non-négatives quelconques. Telle est, par exemple, toute fonction représentée par une ligne polygonale convenable réunissant les points représentatifs correspondants aux noeuds. Il en résulte que la condition nécessaire et suffisante pour que la fonctionnelle linéaire $\Phi[f|x_0]$ conserve le signe de la fonction f est que la suite (3) soit non-négative pour $x = x_0$.

Nous dirons que l'opérateur (1) conserve la monotonie de la fonction f si la fonction de x , $\Phi[f|x]$ est non-décroissante sur I' pour toute fonction f non-décroissante sur I .

Supposons que l'on ait

$$(5) \quad \sum_{i=1}^n \varphi_i(x) = 1$$

et que les fonctions (3) soient dérivables sur I' . Alors, la dérivée $\Phi'[f|x]$ de la fonction (1) peut s'écrire

$$\begin{aligned} \Phi'[f|x] &= \sum_{i=1}^{n-1} \left(\sum_{j=i+1}^n \varphi_j'(x) \right) (f(x_{i+1}) - f(x_i)) = \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \left(- \sum_{j=i+1}^n \varphi_j'(x) \right) (f(x_{i+1}) - f(x_i)). \end{aligned}$$

Remarquons qu'on peut toujours construire une fonction f non-décroissante sur I et prenant sur les noeuds (2) des valeurs formant une suite non-décroissante quelconque. Telle est encore, par exemple, toute fonction représentée par une ligne polygonale convenable réunissant les points représentatifs correspondants aux noeuds. Il en résulte que la condition nécessaire et suffisante pour que (1), sous les hypothèses précédentes, conserve la monotonie de la fonction f est que la suite des dérivées des fonctions (3) ait toutes ses suites partielles non-positives, donc que l'on ait

$$(6) \quad \sum_{j=1}^i \varphi_j'(x) \leq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad x \in I'$$

où pour $i = n$ l'égalité est valable identiquement en x .

2. Supposons, en particulier, que (1) soit le polynôme de Lagrange $L[f|x]$ de la fonction f sur les noeuds (2). Alors les fonctions (3) se réduisent aux polynômes fondamentaux d'interpolation

$$(7) \quad \varphi_i(x) = l_i(x), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

où

$$(8) \quad l_i(x) = \frac{l(x)}{(x - x_i) l'(x_i)}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad l(x) = \prod_{i=1}^n (x - x_i).$$

Nous avons alors la propriété suivante:

1. Si $n \geq 3$ et si x_0 est différent des noeuds (2), la fonctionnelle linéaire $L[f|x_0]$ ne conserve pas le signe de la fonction f .

En supposant toujours que la condition (4) soit vérifiée, cette propriété résulte seulement du fait que les 3 premiers polynômes (8), $l_1(x)$, $l_2(x)$, $l_3(x)$,

ne peuvent pas avoir le même signe (ne peuvent être tous ≥ 0 ou bien tous ≤ 0) pour $x = x_0$. En effet, nous avons

$$l_1(x) l_2(x) = \frac{l^2(x)}{(x - x_1)(x - x_2) l'(x_1) l'(x_2)} < 0, \text{ pour } x \in (-\infty, x_1) \cup (x_2, \infty)$$

$$l_1(x) l_3(x) = \frac{l^2(x)}{(x - x_1)(x - x_3) l'(x_1) l'(x_3)} < 0, \text{ pour } x \in (x_1, x_3),$$

x étant toujours différent des noeuds.

Nous donnerons aussi une autre démonstration de la propriété I. Soit x_0 différent des noeuds et soit a un nombre positif suffisamment petit pour que l'intervalle fermé $[x_0 - a, x_0 + a]$ ne contienne aucun noeud. Construisons (ce qui est toujours possible) une fonction positive f qui prend les mêmes valeurs que le polynôme de degré 2, $(x - x_0)^2 - a^2$ sur les noeuds. Nous avons $L[f|x_0] = L[(x - x_0)^2 - a^2|x_0] = -a^2 < 0$ et la propriété est démontrée.

Pour $n = 1$ nous avons $L[f|x] = f(x_1)$ et la fonctionnelle linéaire $L[f|x_0]$ conserve le signe de la fonction f pour tout x_0 .

Pour $n = 2$ nous avons

$$L[f|x] = \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2)$$

et la fonctionnelle linéaire $L[f|x_0]$ conserve le signe de la fonction f si et seulement si x_0 appartient à l'intervalle $[x_1, x_2]$ des noeuds ($x_1 < x_2$).

3. Dans le cas (7) du polynôme de Lagrange, l'égalité (5) est bien vérifiée et les fonctions (3) (qui sont alors des polynômes) sont partout dérivables.

Nous avons la propriété suivante:

II. Si $n \geq 4$, le polynôme de Lagrange $L[f|x]$ ne conserve pas la monotonie de la fonction f sur aucun intervalle (non nul) I' .

Nous allons donner une démonstration analogue à la seconde démonstration de la propriété I.

Il est clair qu'il suffit de démontrer la propriété pour tout intervalle I' fermé à gauche. Soit alors x_0 l'extrémité gauche de I' et, si $x_0 < x_n$, soit x_r le premier terme de la suite (2) situé à droite de x_0 (nous avons (4)). On peut alors toujours construire une fonction f non-décroissante prenant les valeurs, formant une suite non-décroissante, du polynôme de degré 2 ou 3,

$$P(x) = \begin{cases} (x - x_0)^2 (x - x_r) & \text{si } x_0 < x_n \\ -(x - x_0)^3 & \text{si } x_0 \geq x_n \end{cases}$$

sur les noeuds. Mais $L[P|x] = P(x)$ et le polynôme P n'est pas non-décroissant sur I' . Au contraire, ce polynôme est décroissant

$$\text{sur } \left[x_0, \frac{x_0 + 2x_r}{3} \right] \text{ si } x_0 < x_n \text{ et sur } [x_0, \infty) \text{ si } x_0 \geq x_n.$$

Pour $n=1$ et pour $n=2$ la propriété II n'est pas vraie. Dans ces cas on a $L'[f/x] = 0$ et $L'[f/x] = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ respectivement et $L[f/x]$ conserve la monotonie de f sur tout l'intervalle I' . Si $n=3$, un calcul simple nous montre que les conditions (6) de conservation de la monotonie deviennent

$$2x - x_2 - x_3 \leq 0, \quad 2x - x_1 - x_2 \geq 0$$

et on voit que $L[f/x]$ conserve la monotonie de la fonction f sur I' si et seulement si cet intervalle est un sous-intervalle de

$$\left[\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{x_2 + x_3}{2} \right] (x_1 < x_2 < x_3).$$

4. Supposons maintenant que (1) soit le polynôme de Fejér $F[f/x]$ de la fonction f sur les noeuds (2). Alors les fonctions (3) se réduisent aux polynômes fondamentaux d'interpolation de Lagrange-Hermite de la première espèce

$$(9) \quad \varphi_i(x) = \left[1 - \frac{l''(x_i)}{l'(x_i)} (x - x_i) \right] l_i^2(x), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

On sait qu'alors $F[f/x]$ peut bien conserver le signe de la fonction f sur tout l'intervalle fini I' .

Supposons que I se réduise à l'intervalle $[-1, 1]$. Alors L. FEJÉR [1] a démontré que si le polynôme $l(x)$ vérifie l'équation différentielle

$$(10) \quad (1 - x^2)l''(x) - (\lambda + 1)xl'(x) + n(n + \lambda)l(x) = 0$$

des polynômes ultrasphériques et si $0 \leq \lambda \leq 1$, l'opérateur $F[f/x]$ conserve le signe de la fonction f sur l'intervalle $[-1, 1]$.

Lorsque $l(x)$ vérifie l'équation différentielle (10) nous dirons que nous sommes dans le cas ultrasphérique de paramètre λ ($\lambda > -1$). D'ailleurs si $\lambda > -1$ le polynôme $l(x)$ de degré n qui vérifie l'équation différentielle (10) a bien toutes ses racines réelles, distinctes et comprises dans l'intervalle $(-1, 1)$. En particulier, nous sommes dans le cas de Legendre si $\lambda = 1$ et dans le cas de Tchebycheff si $\lambda = 0$. Alors les noeuds sont les racines du polynôme de Legendre resp. du polynôme de Tchebycheff de la première espèce de degré n .

En particulier donc $F[f/x]$ conserve le signe de la fonction f sur l'intervalle $[-1, 1]$ dans le cas de Legendre et dans le cas de Tchebycheff.

5. Toujours dans le cas de l'opérateur $F[f/x]$ de Fejér, supposons que le nombre $n=2m$ des noeuds soit pair et que ces noeuds soient distribués symétriquement par rapport à l'origine. Nous avons alors $l(0) \neq 0$, $l'(0) = 0$, $x_{2m+1-j} = -x_j$, $l_{2m+1-j}(0) = l_j(0) \neq 0$, $l'(x_{2m+1-j}) = -l'(x_j)$, $l''(x_{2m+1-j}) = l''(x_j)$, $j = 1, 2, \dots, m$ et

$$(11) \quad \begin{cases} \varphi_i(0) = \left[1 + x_i \frac{l''(x_i)}{l'(x_i)} \right] l_i^2(0), & i = 1, 2, \dots, 2m \\ \varphi'_i(0) = \left[\frac{2}{x_i} + \frac{l''(x_i)}{l'(x_i)} \right] l_i^2(0) = \frac{1}{x_i} [\varphi_i(0) + l_i^2(0)], \\ & i = 1, 2, \dots, 2m. \end{cases}$$

Nous en déduisons que les $\varphi_i(0)$, $i = 1, 2, \dots, 2m$ sont positifs si et seulement si

$$(12) \quad 1 + x_i \frac{l''(x_i)}{l'(x_i)} > 0, \quad i = 1, 2, \dots, 2m.$$

Nous avons la propriété suivante:

III. Si le nombre $n = 2m$ des noeuds est pair, si ces noeuds sont symétriquement distribués par rapport à l'origine et si les inégalités (12) sont vérifiées, l'opérateur $F[f/x]$ de Fejér conserve le signe et conserve aussi la monotonie de la fonction f , sur un certain intervalle non nul $[-a, a]$, ($a > 0$), ayant son centre dans l'origine.

La conservation du signe résulte du fait que nous avons $\varphi_i(0) > 0$, $i = 1, 2, \dots, 2m$, par suite de (11) et du fait que les $\varphi_i(x)$ sont des fonctions continues.

Pour démontrer la propriété relative à la conservation de la monotonie il suffit de démontrer les inégalités (6) pour $I' = [-a, a]$. Pour être sûr de l'existence d'un tel nombre a il suffit, par suite de la continuité des fonctions $\varphi_i(x)$, de démontrer que, dans le cas considéré, on a

$$(13) \quad \sum_{j=0}^i \varphi'_j(0) < 0, \quad i = 1, 2, \dots, 2m - 1.$$

Mais, compte tenant de (11) et de la symétrie signalée des noeuds, nous déduisons

$$\varphi'_j(0) = -\varphi'_{2m+1-j}(0) < 0, \quad j = 1, 2, \dots, m,$$

d'où les inégalités (13) résultent immédiatement.

La propriété III est donc démontrée.

6. En particulier, si nous sommes dans le cas ultrasphérique les noeuds sont symétriquement distribués par rapport à l'origine.

L'équation différentielle (10) nous montre que dans ce cas, si $\lambda > -1$,

$$1 + x_i \frac{l''(x_i)}{l'(x_i)} = \frac{1 + \lambda x_i^2}{1 - x_i^2} > 0, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

donc les conditions (12) sont vérifiées.

Il en résulte que nous avons la propriété suivante:

IV. Si nous sommes dans le cas ultrasphérique de paramètre $\lambda > -1$ et si le nombre $n = 2m$ des noeuds est pair, l'opérateur $F[f/x]$ de Fejér conserve le signe et conserve aussi la monotonie de la fonction f sur un certain intervalle non nul $[-a, a]$ ($a > 0$), ayant son centre dans l'origine.

La propriété est vraie, en particulier, dans le cas de Legendre et dans le cas de Tchebycheff.

Les résultats précédents sont à rapprocher de l'importante propriété de conservation des convexités de tous les ordres, dont jouissent sur l'intervalle $[0, 1]$ les polynomes de S. N. Bernstein

$$B[f|x] = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} f\left(\frac{i}{n}\right) x^i (1-x)^{n-i}$$

qui sont également de la forme (I). Nous avons obtenu autrefois ces propriétés [2].

Bibliographie

- [1] L. FEJÉR, Über Weierstrassche Approximation besonders durch Hermitesche Interpolation, *Mathematische Annalen*, **102** (1930), 707—725.
 [2] T. POPOVICIU, Sur l'approximation des fonctions convexes d'ordre supérieur, *Mathematica*, **10** (1934), 49—54.

INDEX

TOMUS III—IV

ACZÉL, J., Über die Differenzierbarkeit der integrierbaren Lösungen gewisser Funktionalgleichungen	5
Ахмезер, Н. И. и Крейн, М. Г., Одна экстремум-проблема относительно многочленов	9
ALEXITS, G. und TANDORI, K., Über das Konvergenzverhalten einer Klasse von Orthogonalreihen	15
ALPÁR, L., Sur la divergence de certaines séries de Taylor lacunaires	19
BAGEMHIL, F. and PIRANIAN, G., Absolutely convergent power series	27
BRUIJN, N. G., Asymptotically orthonormal sequences in Hilbert space	35
CSÁSZÁR, Á., Monotonité locale et dérivabilité approximatives de fonctions quelconques	41
ERDŐS, P. and SZEKERES, G., On some extremum problems in elementary geometry	53
FEJES TÓTH, L., On the stability of a circle packing	63
FINCH, P. D., Storage problems along a production line of continuous flow	67
GRÄTZER, G. and SCHMIDT, E. T., A note on a special type of fully invariant subgroups of abelian groups	85
HEPPES, A., Ein Satz über gitterförmige Kugelpackungen	89
HEWERS, W. und ZELLER, K., Tschebyscheff-Approximation und Tschebyscheff-Entwicklung	91
HOSSZÚ, M., Homogeneous groupoids	95
KAHANE, J. P., Sur la divergence presque sûre presque partout de certaines séries de Fourier aléatoires	101
KÓSA, A., Über die diskontinuierlichen Lösungen von räumlichen Variationsproblemen höherer Ordnung	109
Крейн, М. Г. и Ахмезер, Н. И., Одна экстремум-проблема относительно многочленов	9
KUCZMA, M. and VOPEŃKA, P., On the functional equation $\lambda[f(x)]\lambda(x) + A(x)\lambda(x) + B(x) = 0$	123
LÉVY, P., Le paradoxe de la sphère et les fissions en chaîne	135
Лозинский, С. М., О вариации фундаментальных полиномов интерполяции Лагранжа	145
LUKACS, E., On the characterization of a family of populations which includes Poisson populations	159
MAKAI, E., On a minimum problem	177
MANDELBROJT, S., Sur les singularités d'une série de Taylor sur son cercle de convergence	183
MIKOLÁS, M., Über die Dirichlet-Summation Fourierscher Reihen	189
MÖLNÁR, F., Eine Verallgemeinerung des Satzes von Ceva	197
Молнар, Й., Замечание в связи с выводом гиперболической тригонометрии	201

Никольский, С. М., Об одном свойстве классов $H_p^{(r)}$	205
ORLICZ, W., Some remarks on the absolute convergence of biorthogonal expansions in the space C	217
PEÁK, I. und POLLÁK, G., Bemerkungen über die Halbgruppen mit Minimalbedingung	223
PÉTER, R., Zu einem Rekursionsschema von Hu Shih-Hua	227
PIRANIAN, G. and BAGEMIHL, F., Absolutely convergent power series	27
POLLÁK, G. und PEÁK, I., Bemerkungen über die Halbgruppen mit Minimalbedingung	223
PÓLYA, G., On the role of the circle in certain variational problems	233
POPOVICIU, T., Remarques sur la conservation du signe et de la monotonie par certains polynomes d'interpolation d'une fonction d'une variable	241
RÉNYI, A., Legendre polynomials and probability theory	247
ROGOSINSKI, W. W., On non-negative polynomials	253
SANSONE, G., Les intégrales de l'équation de M. Dini $xy'' + y' = \sin y$ pour $x \rightarrow 0$. . .	281
SCHMIDT, E. T. and GRÄTZER, G., A note on a special type of fully invariant subgroups of abelian groups	85
SÓS, V. T., On a problem in the theory of simultaneous approximation	291
STEIN, E. M. and ZYGMUND, A., Smoothness and differentiability of functions	295
STEINFELD, O., Über das Zassenhaussche Lemma in allgemeinen algebraischen Strukturen	309
STROMMER, J., Zur Vereinfachung des Parallelenaxioms	315
SURÁNYI, J., Über einen Satz von G. Szekeres in der Geometrie der Zahlen	319
SZÁSZ, P., A simpler determining of the angle of parallelism after the method of János Bolyai	327
SZEGŐ, G., On the gradient of solid harmonic polynomials	331
SZEKERES, G. and ERDŐS, P., On some extremum problems in elementary geometry .	53
SZ.-NAGY, B., On Schäffer's construction of unitary dilations	343
SZÜSZ, P., Bemerkung zu einer Arbeit von Herrn Tomić	347
TANDORI, K., Über Approximationen mit allgemeinen Orthogonalreihen	351
TANDORI, K. und ALEXITS, G., Über das Konvergenzverhalten einer Klasse von Orthogonalreihen	15
TCHAKALOFF, L., Sur les domaines d'univalence des polynomes algébriques	357
TOMIĆ, M., Sur la convergence de certaines séries de Fourier lacunaires	363
TURÁN, P., A remark on Hermite-Fejér interpolation	369
VARGA, O., Bemerkung zur Winkelmetrik in Finslerschen Räumen	379
VERMES, P., Matrix structure of basic sets of polynomials	383
VINCZE, E., Über die Verallgemeinerung der trigonometrischen und verwandten Funktionalgleichungen	389
VOPĚNKA, P. and KUCZMA, M., On the functional equation $\lambda[f(x)]\lambda(x) + A(x)\lambda(x) + B(x) = 0$	123
ZELLER, K. und HEWERS, W., Tschebyscheff-Approximation und Tschebyscheff-Entwicklung	91
ZYGMUND, A. and STEIN, E. M., Smoothness and differentiability of functions	295

Technikai szerkesztő: Scharnitzky Viktor

A kiadásért felelős: Az Eötvös Loránd Tudományegyetem rektora

61.1803. Állami Nyomda, Budapest