SEPARATUM

ANNALES
UNIVERSITATIS SCIENTIARUM BUDAPESTINENSIS DE ROLANDO EÖTVÖS NOMINATAE

SECTIO MATHEMATICA

TOMUS III—IV.

T. POPOVICIU

REMARQUES SUR LA CONSERVATION DU SIGNE ET DE LA MONOTONIE PAR CERTAINS POLYNOMES D'INTERPOLATION D'UNE FONCTION D'UNE VARIABLE

1960/61

ANNALES
UNIVERSITATIS SCIENTIARUM BUDAPESTINENSIS DE ROLANDO EÖTVÖS NOMINATAE

SECTIO BIOLOGICA
incepit anno MCMLVII
SECTIO CHIMICA
incepit anno MCMLIX
SECTIO GEOLOGICA
incepit anno MCMLVII
SECTIO HISTORICA
incepit anno MCMLVII
SECTIO IURIDICA
incepit anno MCMLIX
SECTIO MATHEMATICA
incepit anno MCMLVIII
SECTIO PHILOLOGICA
incepit anno MCMLVII

REMARQUES SUR LA CONSERVATION DU SIGNE ET DE LA MONOTONIE PAR CERTAINS POLYNOMES D'INTERPOLATION D'UNE FONCTION D'UNE VARIABLE

Par
TIBERIU POPOVICIU
(Cluj, R. P. Roumaine)

(Reçu le 14 Avril 1960.)

Dédié à la mémoire de L. FEJÉR

On connait l'intérêt tout particulier que L. FEJÉR a montré aux problèmes d'interpolation par polynomes. Lui-même a obtenu des résultats d'une très grande importance dans ce domaine. Dans la suite je me propose de faire quelques remarques bien simples sur certains de ces problèmes.

1. Considérons l'opérateur linéaire

$$\Phi\,[f|x] = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x)\, f(x_i), \tag{1}$$

défini sur l'espace des fonctions f, réelles et d'une variable réelle x, définies sur un intervalle I contenant les *noeuds* distincts

$$x_1, x_2, \ldots, x_n \tag{2}$$

et où

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x) \tag{3}$$

sont des fonctions réelles, de la variable réelle x, définies sur l'intervalle I'.

Pour fixer les notations, nous supposerons toujours que

$$x_1 < x_2 < \ldots < x_n. \tag{4}$$

Si, en particulier, les (3) sont des polynomes nous pouvons prendre pour I' l'axe réelle $(-\infty, \infty)$.

En donnant à x la valeur x_0 on déduit de (1) la fonctionnelle linéaire $\Phi[f|x_0]$.

Nous dirons que l'opérateur (1) *conserve le signe* de la fonction f si nous avons $\Phi[f|x] \geqq 0$ sur I' pour toute fonction f non-négative sur I. Pour qu'il en soit ainsi il faut et il suffit que la fonctionnelle linéaire $\Phi[f|x_0]$ conserve le signe de la fonction f, donc qu'elle soit non-négative pour toute fonction f non-négative sur I et pout tout $x_0 \in I'$.

Il est toujours possible de construire une fonction f non-négative sur I et prenant sur les noeuds (2) des valeurs non-négatives quelconques. Telle est, par exemple, toute fonction représentée par une ligne polygonale convenable réunissant les points représentatifs correspondants aux noeuds. Il en résulte que la condition nécessaire et suffisante pour que la fonctionnelle linéaire $\Phi[f|x_0]$ conserve le signe de la fonction f est que la suite (3) soit non-négative pour $x = x_0$.

Nous dirons que l'opérateur (1) *conserve la monotonie* de la fonction f si la fonction de x, $\Phi[f|x]$ est non-décroissante sur I' pour toute fonction f non-décroissante sur I.

Supposons que l'on ait

(5) $$\sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x) = 1$$

et que les fonctions (3) soient dérivables sur I'. Alors, la dérivée $\Phi'[f|x]$ de la fonction (1) peut s'écrire

$$\Phi'[f|x] = \sum_{i=1}^{n-1} \left(\sum_{j=i+1}^{n} \varphi_j'(x) \right) \left(f(x_{i+1}) - f(x_i) \right) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n-1} \left(- \sum_{j=1}^{i} \varphi_j'(x) \right) \left(f(x_{i+1}) - f(x_i) \right).$$

Remarquons qu'on peut toujours construire une fonction f non-décroissante sur I et prenant sur les noeuds (2) des valeurs formant une suite non-décroissante quelconque. Telle est encore, par exemple, toute fonction représentée par une ligne polygonale convenable réunissant les points représentatifs correspondants aux noeuds. Il en résulte que la condition nécessaire et suffisante pour que (1), sous les hypothèses précédentes, conserve la monotonie de la fonction f est que la suite des dérivées des fonctions (3) ait toutes ses suites partielles non-positives, donc que l'on ait

(6) $$\sum_{j=1}^{i} \varphi_j'(x) \leq 0, \; i = 1,2,\ldots,n, \quad x \in I'$$

où pour $i = n$ l'égalité est valable identiquement en x.

2. Supposons, en particulier, que (1) soit le polynome de Lagrange $L[f|x]$ de la fonction f sur les noeuds (2). Alors les fonctions (3) se réduisent aux polynomes fondamentaux d'interpolation

(7) $$\varphi_i(x) = l_i(x), \quad i = 1,2,\ldots,n$$

où

(8) $$l_i(x) = \frac{l(x)}{(x - x_i)\, l'(x_i)}, \quad i = 1,2,\ldots,n, \quad l(x) = \prod_{i=1}^{n} (x - x_i).$$

Nous avons alors la propriété suivante:

I. *Si $n \geqq 3$ et si x_0 est différent des noeuds (2), la fonctionnelle linéaire $L[f|x_0]$ ne conserve pas le signe de la fonction f.*

En supposant toujours que la condition (4) soit vérifiée, cette propriété résulte seulement du fait que les 3 premiers polynomes (8), $l_1(x)$, $l_2(x)$, $l_3(x)$, ne peuvent pas avoir le même signe (ne peuvent être tous $\geqq 0$ ou bien tous $\leqq 0$) pour $x = x_0$. En effet, nous avons

$$l_1(x)\, l_2(x) = \frac{l^2(x)}{(x - x_1)(x - x_2)\, l'(x_1)\, l'(x_2)} < 0, \text{ pour } x \in (-\infty, x_1) \cup (x_2, \infty)$$

$$l_1(x)\, l_3(x) = \frac{l^2(x)}{(x - x_1)(x - x_3)\, l'(x_1)\, l'(x_3)} < 0, \text{ pour } x \in (x_1, x_3),$$

x étant toujours différent des noeuds.

Nous donnerons aussi une autre démonstration de la propriété I. Soit x_0 différent des noeuds et soit a un nombre positif suffisamment petit pour que l'intervalle fermé $[x_0 - a, x_0 + a]$ ne contienne aucun noeud. Construisons (ce qui est toujours possible) une fonction positive f qui prend les mêmes valeurs que le polynome de degré 2, $(x - x_0)^2 - a^2$ sur les noeuds. Nous avons $L[f|x_0] = L[(x - x_0)^2 - a^2|x_0] = -a^2 < 0$ et la propriété est démontrée.

Pour $n = 1$ nous avons $L[f|x] = f(x_1)$ et la fonctionnelle linéaire $L[f|x_0]$ conserve le signe de la fonction f pour tout x_0.

Pour $n = 2$ nous avons

$$L[f|x] = \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2)$$

et la fonctionnelle linéaire $L[f|x_0]$ conserve le signe de la fonction f si et seulement si x_0 appartient à l'intervalle $[x_1, x_2]$ des noeuds $(x_1 < x_2)$.

3. Dans le cas (7) du polynome de Lagrange, l'égalité (5) est bien vérifiée et les fonctions (3) (qui sont alors des polynomes) sont partout dérivables.

Nous avons la propriété suivante:

II. *Si $n \geqq 4$, le polynome de Lagrange $L[f|x]$ ne conserve pas la monotonie de la fonction f sur aucun intervalle* (non nul) I'.

Nous allons donner une démonstration analogue à la seconde démonstration de la propriété I.

Il est clair qu'il suffit de démontrer la propriété pour tout intervalle I' fermé à gauche. Soit alors x_0 l'extrémité gauche de I' et, si $x_0 < x_n$, soit x_r le premier terme de la suite (2) situé à droite de x_0 (nous avons (4)). On peut alors toujours construire une fonction f non-décroissante prenant les valeurs, formant une suite non-décroissante, du polynome de degré 2 ou 3,

$$P(x) = \begin{cases} (x - x_0)^2 (x - x_r) & \text{si } x_0 < x_n \\ -(x - x_0)^2 & \text{si } x_0 \geqq x_n \end{cases}$$

sur les noeuds. Mais $L[P|x] = P(x)$ et le polynome P n'est pas non-décroissant sur I'. Au contraire, ce polynome est décroissant

$$\text{sur } \left[x_0, \frac{x_0 + 2x_r}{3}\right] \text{ si } x_0 < x_n \text{ et sur } [x_0, \infty) \text{ si } x_0 \geqq x_n.$$

Popoviciu 13

Pour $n=1$ et pour $n=2$ la propriété II n'est pas vraie. Dans ces cas on a $L'[f|x]=0$ et $L'[f|x]=\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ respectivement et $L\,[f|x]$ conserve la monotonie de f sur tout l'intervalle I'. Si $n=3$, un calcul simple nous montre que les conditions (6) de conservation de la monotonie deviennent

$$2x-x_2-x_3\leq 0,\quad 2x-x_1-x_2\geq 0$$

et on voit que $L\,[f|x]$ conserve la monotonie de la fonction f sur I' si et seulement si cet intervalle est un sous-intervalle de

$$\left[\frac{x_1+x_2}{2},\frac{x_2+x_3}{2}\right]\ (x_1<x_2<x_3).$$

4. Supposons maintenant que (1) soit le polynome de Fejér $F\,[f|x]$ de la fonction f sur les noeuds (2). Alors les fonctions (3) se réduisent aux polynomes fondamentaux d'interpolation de Lagrange-Hermite de la première espèce

$$\varphi_i(x)=\left[1-\frac{l''(x_i)}{l'(x_i)}(x-x_i)\right]l_i^2(x),\quad i=1,2,\dots,n. \tag{9}$$

On sait qu'alors $F\,[f|x]$ peut bien conserver le signe de la fonction f sur tout l'intervalle fini I'.

Supposons que I se réduise à l'intervalle $[-1,\ 1]$. Alors L. FEJÉR [1] a démontré que si le polynome $l(x)$ vérifie l'équation différentielle

$$(1-x_2)\,l''(x)-(\lambda+1)\,x\,l'(x)+n\,(n+\lambda)\,l(x)=0 \tag{10}$$

des polynomes ultrasphériques et si $0\leq\lambda\leq 1$, l'opérateur $F\,[f|x]$ conserve le signe de la fonction f sur l'intervalle $[-1,\ 1]$.

Lorsque $l(x)$ vérifie l'équation différentielle (10) nous dirons que nous sommes dans le *cas ultrasphérique de paramètre* λ $(\lambda>-1)$. D'ailleurs si $\lambda>-1$ le polynome $l(x)$ de degré n qui vérifie l'équation différentielle (10) a bien toutes ses racines réelles, distinctes et comprises dans l'intervalle $(-1,\ 1)$. En particulier, nous sommes dans le cas de Legendre si $\lambda=1$ et dans le cas de Tchebycheff si $\lambda=0$. Alors les noeuds sont les racines du polynome de Legendre resp. du polynome de Tchebycheff de la première espèce de degré n.

En particulier donc $F\,[f|x]$ conserve le signe de la fonction f sur l'intervalle $[-1,\ 1]$ dans le cas de Legendre et dans le cas de Tchebycheff.

5. Toujours dans le cas de l'opérateur $F\,[f|x]$ de Fejér, supposons que le nombre $n=2m$ des noeuds soit pair et que ces noeuds soient distribués symétriquement par rapport à l'origine. Nous avons alors $l(0)\neq 0$, $l'(0)=0$, $x_{2m+1-j}=-x_j$, $l_{2m+1-j}(0)=l_j(0)\neq 0$, $l'(x_{2m+1-j})=-l'(x_j)$, $l''(x_{2m+1-j})=l''(x_j)$, $j=1,2,\dots,m$ et

$$\left\{\begin{aligned}&\varphi_i(0)=\left[1+x_i\frac{l''(x_i)}{l'(x_i)}\right]l_i^2(0),\quad i=1,2,\dots,2m\\ &\varphi_i'(0)=\left[\frac{2}{x_i}+\frac{l''(x_i)}{l'(x_i)}\right]l_i^2(0)=\frac{1}{x_i}\,[\varphi_i(0)+l_i^2(0)\,],\\ &\qquad i=1,2,\dots,2m.\end{aligned}\right. \tag{11}$$

Nous en déduisons que les $\varphi_i(0)$, $i=1,2,\dots,2m$ sont positifs si et seulement si

$$1+x_i\frac{l''(x_i)}{l'(x_i)}>0,\quad i=1,2,\dots,2m. \tag{12}$$

Nous avons la propriété suivante:

III. *Si le nombre $n=2m$ des noeuds est pair, si ces noeuds sont symétriquement distribués par rapport à l'origine et si les inégalités* (12) *sont vérifiées, l'opérateur $F\,[f|x]$ de Fejér conserve le signe et conserve aussi la monotonie de la fonction f, sur un certain intervalle non nul $[-a,\ a]$, $(a>0)$, ayant son centre dans l'origine.*

La conservation du signe résulte du fait que nous avons $\varphi_i(0)>0$, $i=1,2,\dots,2m$, par suite de (11) et du fait que les $\varphi_i(x)$ sont des fonctions continues.

Pour démontrer la propriété relative à la conservation de la monotonie il suffit de démontrer les inégalités (6) pour $I'=[-a,\ a]$. Pour être sûr de l'existence d'un tel nombre a il suffit, par suite de la continuité des fonctions $\varphi_i(x)$, de démontrer que, dans le cas considéré, on a

$$\sum_{j=0}^{i}\varphi_j'(0)<0,\quad i=1,2,\dots,2m-1. \tag{13}$$

Mais, compte tenant de (11) et de la symétrie signalée des noeuds, nous déduisons

$$\varphi_j'(0)=-\varphi_{2m+1-j}'(0)<0,\ j=1,2,\dots,m,$$

d'où les inégalités (13) résultent immédiatement.

La propriété III est donc démontrée.

6. En particulier, si nous sommes dans le cas ultrasphérique les noeuds sont symétriquement distribués par rapport à l'origine.

L'équation différentielle (10) nous montre que dans ce cas, si $\lambda>-1$,

$$1+x_i\frac{l''(x_i)}{l'(x_i)}=\frac{1+\lambda x_i^2}{1-x_i^2}>0,\quad i=1,2,\dots,n,$$

donc les conditions (12) sont vérifiées.

Il en résulte que nous avons la propriété suivante:

IV. *Si nous sommes dans le cas ultrasphérique de paramètre $\lambda>-1$ et si le nombre $n=2m$ des noeuds est pair, l'opérateur $F\,[f|x]$ de Fejér conserve le signe et conserve aussi la monotonie de la fonction f sur un certain intervalle non nul $[-a,\ a]$ $(a>0)$, ayant son centre dans l'origine.*

La propriété est vraie, en particulier, dans le cas de Legendre et dans le cas de Tschebycheff.

Pop

Les résultats précédents sont à rapprocher de l'importante propriété de conservation des convexités de tous les ordres, dont jouissent sur l'intervalle [0, 1] les polynomes de S. N. Bernstein

$$B[f|x] = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} f\left(\frac{i}{n}\right) x^i (1-x)^{n-i}$$

qui sont également de la forme (1). Nous avons obtenu autrefois ces propriétés [2].

Bibliographie

[1] L. Fejér, Über Weierstrassche Approximation besonders durch Hermitesche Interpolation, *Mathematische Annalen*, **102** (1930), 707—725.

[2] T. Popoviciu, Sur l'approximation des fonctions convexes d'ordre supérieur, *Mathematica*, **10** (1934), 49—54.

INDEX

TOMUS III—IV

Pópoviciu 1v

Technikai szerkesztő: Scharnitzky Viktor

A kiadásért felelős: Az Eötvös Loránd Tudományegyetem rektora

61.1803. Állami Nyomda, Budapest