MATHEMATICA VOL. 2 (25), 2, 1960, pp. 323 – 324

REMARQUES SUR UNE FORMULE DE LA MOYENNE DES DIFFÉRENCES DIVISÉES GÉNÉRALISÉES

par

TIBERIU POPOVICIU

à Cluj

Je me propose de donner une démonstration du théorème 8 de mon travail antérieur [1]. Je prie le lecteur de se rapporter, pour les notions, les notations et la numérotation des formules, des lemmes, des théorèmes, etc., qui seront utilisées ici, à mon travail cité [1].

Le théorème 8 a été déduit du lemme 2, mais il résulte aussi du lemme suivant :

L e m m e 2*. *Sous les hypothèses précédentes, on peut trouver* $n+2$ *points* **distincts** x_i', $i=1, 2, \ldots, n+2$, *de manière que* : 1° *ils soient tous compris dans le plus petit intervalle fermé contenant les points* x_i, 2° *l'égalité* (41) *soit vérifiée.*

Les hypothèses précédentes, dont il est question dans l'énoncé sont que les fonctions (18) et les fonctions (19) sont continues et forment des systèmes (I) réguliers d'ordre k sur l'intervalle E, que parmi les points x_i de E, non pas tous confondus, le même point se répéte au plus k fois et que la fonctions f soit définie et continue sur E.

Nous pouvons supposer $n \geqq 1$.

Considérons donc la différence divisée $[x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}; f] = C$ et supposons que $z_1, z_2, \ldots, z_p$ soient les noeuds distincts ayant respectivement les ordres $k_1, k_2, \ldots, k_p$ de multiplicités, $1 \leqq k_i \leqq k$, $i=1, 2, \ldots, p$ $(p>1)$. Nous pouvons supposer $z_1 < z_2 < \ldots < z_p$. Ajoutons aux noeuds x_i encore $n(p-1)$ points distincts, différents de x_i, et dont exactement n sont compris dans chacun des intervalles ouverts (z_i, z_{i+1}) $i=1, 2, \ldots, p-1$. Nous avons ainsi au total $np+2$ points (distincts ou non) que nous désignerons par y_i, $i=1, 2, \ldots, np+2$, en supposant $y_1 \leqq y_2 \leqq \ldots \leqq y_{np+2}$.

Si nous posons $l_0 = 0$, $l_j = k_1 + k_2 + \ldots + k_j + jn$, $j = 1, 2, \ldots, p-1$, nous avons $y_{l_{j-1}+r} = z_j$, $r = 1, 2, \ldots, k_j$, $j = 1, 2, \ldots, p$ et

$$(\alpha) \qquad y_{l_{j-1}+k_j} < y_{l_{j-1}+k_j+1} < \ldots < y_{l_{j-1}+k_j+n} < y_{l_j+1}$$

$$j = 1, 2, \ldots, p-1.$$

Mais, d'après le théorème 6, la différence divisée $[x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}; f]$ est une moyenne aritmétique généralisée (avec des poids positifs convenables) des différences divisées

$$(\beta) \qquad [y_i, y_{i+1}, \ldots, y_{i+n+2}; f], \quad i = 1, 2, \ldots, n(p-1)+1.$$

Ces différences divisées jouissent de la propriété que leurs noeuds sont toujours compris dans le plus petit intervalle fermé contenant les points x_i et qu'au plus un de ces noeuds est multiple, avec un ordre de multiplicité $\leqq k$, les autres étant simples (les différences divisées (β) sont donc bien définies).

Si les différences divisées (β) ne sont pas toutes égales, on peut trouver (au moins) une dont la valeur est $< C$ et (au moins) une dont la valeur est $> C$. L'existence des noeuds distincts x'_i vérifiant l'égalité (41) s'établit alors comme dans le cas 1 du nr. **18**.

Si les différences divisées (β) sont toutes égales, alors leur valeur commune est C et le lemme 2* résulte en prenant, par exemple, $x'_i = y_{k_1+i-1}$, $i = 1, 2, \ldots, n+2$, qui sont bien $n+2$ points distincts du plus petit intervalle fermé contenant les noeuds x_i.

Le lemme 2* est donc démontré.

Il est facile de voir que les lemmes 2 et 2* sont équivalents. De cette façon sont éliminées les quelques fautes typographiques et de transcription du manuscrit qui se sont glissées dans la démonstration du lemme 2 *).

BIBLIOGRAPHIE

[1] Popoviciu T., *Sur le reste dans certaines formules linéaires d'approximation de l'analyse.* Mathematica, **1** (**24**), 95–142 (1960).

Reçu le 26. V. 1960.

*) Ces erreurs, de la p. 116, facile à appercevoir doivent être corrigées de la manière suivante :

ligne	8	$k_1 + k_p > 2$	au lieu de	$k_1 + k_2 > 2$
,,	9	$k_p > 1$	,,	$k_1 > 1$
,,	10	$k_1 > 1$	,,	$k_2 > 1$
,,	11	$k_1 = k_p = 1$	,,	$k_1 = k_2 = 1$