MATHEMATICA VOL. 6 (29), 2, 1964 pp. 301—306

SUR UNE INÉGALITÉ DE N. LEVINSON

par

TIBERIU POPOVICIU

à Cluj

1. Nous supposerons connues la définition et les principales propriétés des différences divisées. Nous désignerons par $[x_1, x_2, \ldots, x_{m+1}; f]$ la différence divisée d'ordre m, de la fonction f sur les points, ou les noeuds, $x_1, x_2, \ldots, x_{m+1}$. Les noeuds peuvent être distincts ou non. Dans le cas où les noeuds ne sont pas tous distincts (ou simples), dans les différences divisées interviennent aussi les dérivées successives de la fonction (sur les noeuds multiples). Dans la suite n'interviendrons, d'ailleurs, que des différences divisées sur des noeuds distincts.

Une fonction est dite non-concave respectivement convexe d'ordre m $(\geqq -1)$ sur l'intervalle I, si sa différence divisée d'ordre $m+1$, reste non-négative respectivement positive sur tout groupe de $m+2$ points distincts de I.

Une fonction non-concave d'ordre m sur un intervalle ouvert est continue si $m \geqq 1$ et a une dérivée continue si $m > 1$. Si la fonction f est non-concave respectivement convexe d'ordre $m > 1$, sa dérivée f' est non-concave respectivement convexe d'ordre $m-1$ et réciproquement.

2. L'inégalité classique de Jensen relativement aux fonctions convexes (habituelles) est la suivante

$$f\left(\frac{\sum_{\alpha=1}^{n} p_\alpha x_\alpha}{\sum_{\alpha=1}^{n} p_\alpha}\right) \leqq \frac{\sum_{\alpha=1}^{n} p_\alpha f(x_\alpha)}{\sum_{\alpha=1}^{n} p_\alpha} \tag{1}$$

et est vérifiée quels que soient le nombre naturel n, les points $x_\alpha \in I$, $\alpha = 1, 2, \ldots, n$ et les nombres positifs p_α, $\alpha = 1, 2, \ldots, n$, pour toute fonction f non-concave d'ordre 1 sur l'intervalle I.

Si $n > 1$ et si la fonction f est convexe d'ordre 1 sur I, l'égalité dans (1) a lieu si et seulement si les points x_α, $\alpha = 1, 2, \ldots, n$ sont tous confondus.

On connait plusieurs démonstrations de ces propriétés. Remarquons qu'il suffit de démontrer l'inégalité (1) dans le cas où les points x_α, $\alpha = 1, 2, \ldots, n$ sont distincts, la fonction f étant non-concave d'ordre 1 sur I et de montrer que si $n > 1$ et f est convexe d'ordre 1 sur I, alors l'égalité dans (1) n'est pas possible.

Soit $n > 1$ et choisissons les notations de manière que l'on ait

$$x_1 < x_2 < \ldots < x_n \tag{2}$$

Si $p_\alpha > 0$, $\alpha = 1, 2, \ldots, n$ et si nous posons

$$\xi_\alpha = \frac{p_1x_1 + p_2x_2 + \cdots + p_\alpha x_\alpha}{p_1 + p_2 + \cdots + p_\alpha}, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, n \tag{3}$$

nous avons alors

$$\xi_1 = x_1, \ \xi_n = \frac{\sum_{\alpha=1}^{n} p_\alpha x_\alpha}{\sum_{\alpha=1}^{n} p_\alpha} \quad \text{et } \xi_\alpha < \xi_{\alpha+1} < x_{\alpha+1}, \ \alpha = 1, 2, \ldots, n-1 \tag{4}$$

L'égalité

$$\sum_{\alpha=1}^{n} p_\alpha f(x_\alpha) - f(\xi_n) \sum_{\alpha=1}^{n} p_\alpha = \tag{5}$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{n-1} \frac{p_{\alpha+1}(p_1 + p_2 + \cdots + p_\alpha)(\xi_\alpha - x_{\alpha+1})^2}{p_1 + p_2 + \cdots + p_{\alpha+1}} [\xi_\alpha, \xi_{\alpha+1}, x_{\alpha+1}; f]$$

démontre alors l'inégalité (1) de Jensen.

Nous pouvons énoncer les propriétés exprimées par cette inégalité aussi sous la forme du

THÉORÈME 1. *Pour que l'inégalité* (1) *soit vérifiée pour tout nombre naturel n, pour tout groupe de n points* $x_\alpha \in I$, $\alpha = 1, 2, \ldots, n$, *et pour tout groupe de n nombres positifs* p_α, $\alpha = 1, 2, \ldots, n$, *il faut et il suffit que la fonction f soit non-concave d'ordre* 1 *sur l'intervalle I.*

Pour que l'inégalité stricte (avec le signe $<$) (1) *soit vérifiée pour tout nombre naturel* $n > 1$, *tout groupe de n points* $x_\alpha \in I$ $\alpha = 1, 2, \ldots, n$, *non tous confondus et tout groupe de n nombres positifs* p_α, $\alpha = 1, 2, \ldots, n$, *il faut et il suffit que la fonction f soit convexe d'ordre* 1 *sur l'intervalle I.*

La nécessité des conditions de l'énoncé résulte de la formule (5), en remarquant que si $x_1 < x_2 < x_3$ sont trois points quelconques de I (soumis aux inégalités signalées), on peut toujours trouver deux nombres positifs p, q de manière que $x_2 = \frac{px_1 + qx_3}{p+q}$ (par exemple, $p = x_3 - x_2$, $q = x_2 - x_1$)

3. Considérons n nombres positifs p_α, $\alpha = 1, 2, \ldots, n$ et deux groupes, chacun de n points, x_α, x'_α, $\alpha = 1, 2, \ldots, n$. Posons (3) et

$$\xi'_\alpha = \frac{p_1x'_1 + p_2x'_2 + \cdots + p_\alpha x'_\alpha}{p_1 + p_2 + \cdots + p_\alpha}, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, n \tag{6}$$

L'inégalité de Levinson s'écrit

$$\frac{\sum_{\alpha=1}^{n} p_\alpha f(x_\alpha)}{\sum_{\alpha=1}^{n} p_\alpha} - f\left(\frac{\sum_{\alpha=1}^{n} p_\alpha x_\alpha}{\sum_{\alpha=1}^{n} p_\alpha}\right) \leqq \frac{\sum_{\alpha=1}^{n} p_\alpha f(x'_\alpha)}{\sum_{\alpha=1}^{n} p_\alpha} - f\left(\frac{\sum_{\alpha=1}^{n} p_\alpha x'_\alpha}{\sum_{\alpha=1}^{n} p_\alpha}\right) \tag{7}$$

où les points x_α, x'_α et la fonction f vérifient les conditions qui vont suivre.

Supposons que $n > 1$, que l'on ait (2) et que

$$x_1 + x'_1 = x_2 + x'_2 = \ldots = x_n + x'_n, \ x_n \leqq x'_n \tag{8}$$

Nous en déduisons $x'_n < x'_{n-1} < \ldots < x'_1$ et $\xi_\alpha < \xi_{\alpha+1} < x_{\alpha+1} \leqq x'_{\alpha+1} < \xi'_{\alpha+1} < \xi'_\alpha$, $\alpha = 1, 2, \ldots, n-1$, et

$$\xi_\alpha - x_{\alpha+1} = x'_{\alpha+1} - \xi'_\alpha, \ \alpha = 1, 2, \ldots, n-1 \tag{9}$$

Les égalités (9) sont équivalentes aux $n - 1$ égalités (8).

Remarquons aussi que nous avons

$$\begin{aligned}[\xi'_\alpha, \xi'_{\alpha+1}, x'_{\alpha+1}; f] - [\xi_\alpha, \xi_{\alpha+1}, x_{\alpha+1}; f] &= (\xi'_\alpha - x_{\alpha+1})[\xi_\alpha, \xi_{\alpha+1}, x_{\alpha+1}, \xi'_\alpha; f] + \\ &+ (\xi'_{\alpha+1} - \xi_{\alpha+1})[\xi_\alpha, \xi_{\alpha+1}, \xi'_\alpha, \xi'_{\alpha+1}; f] + \\ &+ (x'_{\alpha+1} - \xi_\alpha)[\xi_\alpha, \xi'_\alpha \ \xi'_{\alpha+1}, x'_{\alpha+1}; f]\end{aligned} \tag{10}$$

et il en résulte que, sous les hypothèses $n > 1$, (2) et (8), nous avons $[\xi'_\alpha, \xi_{\alpha+1}, x'_{\alpha+1}; f] \geqq$ respectivement $> [\xi_\alpha, \xi_{\alpha+1}, x_{\alpha+1}; f]$, $\alpha = 1, 2, \ldots, n-1$, suivant que la fonction f est non-concave respectivement convexe d'ordre 2 sur un intervalle contenant les points x_α, x'_α, $\alpha = 1, 2, \ldots, n$.

Compte tenant de (5) et (10), nous avons

$$\left[\sum_{\alpha=1}^{n} p_\alpha f(x'_\alpha) - f(\xi'_n) \sum_{\alpha=1}^{n} p_\alpha\right] - \left[\sum_{\alpha=1}^{n} p_\alpha f(x_\alpha) - f(\xi_n) \sum_{\alpha=1}^{n} p_\alpha\right] = \tag{11}$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{p_{\alpha+1}(p_1 + p_2 + \ldots + p_\alpha)(\xi_\alpha - x_{\alpha+1})^2}{p_1 + p_2 + \ldots + p_{\alpha+1}} \cdot \left\{\begin{array}{l}(\xi'_\alpha - x_{\alpha+1})[\xi_\alpha, \xi_{\alpha+1}, x_{\alpha+1}, \xi'_\alpha; f] + \\ + (\xi'_{\alpha+1} - \xi_{\alpha+1})[\xi_\alpha, \xi_{\alpha+1}, \xi'_\alpha, \xi'_{\alpha+1}; f] + \\ + (x'_{\alpha+1} - \xi_\alpha)[\xi_\alpha, \xi'_\alpha, \xi'_{\alpha+1}, x'_{\alpha+1}; f]\end{array}\right\}$$

4. De l'analyse précédente il résulte que l'inégalité (7) de Levinson est vérifiée quels que soient, le nombre naturel n, les points x_α, $x'_\alpha \in I$, $\alpha = 1, 2, \ldots, n$ tels que l'on ait

$$(12) \quad \begin{cases} x_1 + x'_1 = x_2 + x'_2 = \ldots = x_n + x'_n, \\ \max(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leqq \min(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n) \end{cases}$$

et les nombres positifs p_α, $\alpha = 1, 2, \ldots, n$, pour toute fonction f non-concave d'ordre 2 sur l'intervalle I.

Si $n > 1$ et si la fonction f est convexe d'ordre 2 sur I, l'égalité dans (7) a lieu si et seulement si les points x_α, $\alpha = 1, 2, \ldots, n$ (donc aussi les points x'_α, $\alpha = 1, 2, \ldots, n$) sont tous confondus.

N. LEVINSON a obtenu [1] les résultats précédents, en supposant que la fonction f ait une dérivée troisième f'''. Nous avons donc obtenu une généralisation de l'inégalité de Levinson.

Nous pouvons énoncer ces propriétés aussi sous la forme du

THÉORÈME 2. *Pour que l'inégalité* (7) *soit vérifiée, pour tout nombre naturel n, pour tout groupe de 2n points* x_α $x'_\alpha \in I$ $\alpha = 1, 2, \ldots, n$, *tels que l'on ait* (12) *et pour tout groupe de n nombres positifs* p_α, $\alpha = 1, 2, \ldots, n$, *il suffit que la fonction f et il faut que la fonction continue f soit non-concave d'ordre* 2 *sur l'intervalle I.*

Pour que l'inégalité stricte (avec le signe $<$ *)* (7) *soit vérifiée pour tout nombre naturel* $n > 1$, *pour tout groupe de 2n points* x_α, $x'_\alpha \in I$ $\alpha = 1, 2, \ldots, n$, *tels que l'on ait* (12), *les* x_α *non pas tous confondus et pour tout groupe de n nombres positifs* p_α, $\alpha = 1, 2, \ldots, n$, *il suffit que la fonction f et il faut que la fonction continue f soit convexe d'ordre* 2 *sur l'intervalle I.*

Dans la démonstration la restriction que les points x_α, $\alpha = 1, 2, \ldots, n$ soient distincts ne retreint pas la généralité puisque en vertu de (12), si $x_\alpha = x_\beta$ nous avons $x'_\alpha = x'_\beta$ et réciproquement.

La nécessité des conditions de l'énoncé résulte de la formule (7). Si nous posons $n = 2$, $x_1 = x$, $x_2 = x'_2 = x + \frac{3}{2} h$, $x'_1 = x + 3h$, $p_1 = 1$, $p_2 = 2$, nous avons $\xi_2 = x + h$, $\xi'_2 = x + 2h$, le premier membre de la formule (11) devient $\Delta^3_h f(x) = f(x + 3h) - 3f(x + 2h) + 3f(x + h) - f(x) = 6h^3[x, x + h, x + 2h, x + 3h; f]$. Mais, on sait [2], que si $\Delta^3_h f(x) \geqq 0$ respectivemt > 0, pour tout $x, x + 3h \in I$, $h > 0$, la fonction f, supposée continue, est non-concave, respectivement convexe d'ordre 2 sur I.

Dans la nécessité de la condition du théorème l'hypothése de la continuité de la fonction peut, en général, être remplacée par une hypothèse moins restrictive (mesurabilité, d'être bornée sur I, etc.).

5. La démonstration que nous avons donnée plus haut à l'inégalité de Levinson est basée sur le fait que les moyennes successives (3) et (6) des points x_α et des points x'_α sont formées avec les mêmes poids et que ces points sont liés par les égalités (9). En réalité pour pouvoir utiliser une formule telle que (10) il suffit seulement que l'on ait

$$(13) \qquad (\xi_\alpha - x_{\alpha+1})^2 = (x'_{\alpha+1} - \xi'_\alpha)^2, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, n - 1$$

et non pas nécessairement (9). En imposant aux points x_α, x'_α la restriction (13), sans que les égalités (9) soient toutes vérifiées, on peut obtenir d'autres théorèmes, analogues au théorème 2.

6. A titre d'exemple, supposons que l'on ait

$$(14) \qquad \xi_\alpha - x_{\alpha+1} = \xi'_\alpha - x'_{\alpha+1}, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, n - 1$$

en supposant toujours que les moyennes ξ_α, ξ'_α sont données par (3) et (6). Nous en déduisons que

$$(15) \qquad x'_1 - x_1 = x'_2 - x_2 = \ldots = x'_n - x_n = y.$$

Si les inégalités (2) sont vérifiées on a aussi $x'_1 < x'_2 < \ldots < x'_n$, $\xi'_\alpha - \xi_\alpha = y$, $\alpha = 1, 2, \ldots, n$ et on a toujours $\xi_\alpha < \xi_{\alpha+1} < x_{\alpha+1}$, $\alpha = 1, 2, \ldots, n - 1$. Nous avons la formule

$$(16) \qquad [\xi'_\alpha, \xi'_{\alpha+1}, \xi'_{n+1}; f] - [\xi_\alpha, \xi_{\alpha+1}, x_{\alpha+1}; f] =$$
$$= y\{[\xi_\alpha, \xi'_\alpha, \xi'_{\alpha+1}, x'_{\alpha+1}; f] + [\xi_\alpha, \xi_{\alpha+1}, \xi'_{\alpha+1}, x'_{\alpha+1}; f] + [\xi_\alpha, \xi_{\alpha+1}, x_{\alpha+1}, x'_{\alpha+1}; f]\}$$

et il en résulte que, sous les hypothèses (2), (15) (ou (14)) et $y > 0$, la différence (10) (ou (16)) vérifie encore la propriété de non-concavité d'ordre 2 signalée plus haut.

Comme plus haut nous déduisons le

THÉORÈME 3. *Pour que l'inégalité* (7) *soit vérifiée pour tout nombre naturel n, pour tout groupe de 2n points* x_α, $x'_\alpha \in I$, $\alpha = 1, 2, \ldots, n$, *tels que l'on ait* (15) *avec* $y > 0$ *et pour tout groupe de n nombres positifs* p_α, $\alpha = 1, 2, \ldots, n$, *il suffit que la fonction f et il est nécessaire que la fonction continue* (ou mesurable, ou bornée etc.) *f soit non-concave d'ordre* 2 *sur l'intervalle I.*

Pour que l'inégalité stricte (avec le signe $<$) (7) *soit vérifiée pour tout nombre naturel* $n > 1$, *pour tout groupe de 2n points* x_α, $x'_\alpha \in I$, $\alpha = 1, 2, \ldots, n$, *les* x_α *non pas tous confondus, tels que l'on ait* (15) *avec* $y > 0$ *et pour tout groupe de n nombres positifs* p_α, $\alpha = 1, 2, \ldots, n$, *il suffit que la fonction f et il faut que la fonction continue* (mesurable, bornée, etc.) *soit convexe d'ordre* 2 *sur l'intervalle I.*

Pour la nécessité des conditions de l'énoncé il suffit de prendre $n = 3$ et $x_1 = x$, $x_2 = x'_1 = x + h$, $x_3 = x'_2 = x + 2h$, $x'_3 = x + 3h$ et l'inégalité (7) devient encore $\Delta^3_h f(x) \geqq 0$ avec $h > 0$.

7. L'inégalité (7), sous les hypothèses du théorème 3 (I étant un intervalle ouvert) peut être démontrée pour une fonction f non-concave (respectivement convexe) d'ordre 2, en remarquant que cette fonction a une

dérivée non-concave (respectivement convexe) d'ordre 1. En vertu de l'inégalité de Jensen, la fonction de y,

$$\sum_{\alpha=1}^{n} p_\alpha f(x_\alpha + y) - f(\xi_n + y) \sum_{\alpha=1}^{n} p_\alpha$$

est, non-décroissante (respectivement croissante si $n > 1$ et les $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ne coïncident pas tous), sa dérivée étant non-négative (respectivement positive).

BIBLIOGRAPHIE

[1] Levinson N., *Generalization of an Inequality of Ky Fan*, Journal of Math. Analysis and Application, 8, 133, 134 (1964).

[2] Popoviciu T., *Sur quelques propriétés des fonctions d'une ou de deux variables réelles*, Mathematica, 8, 1–85 (1934).

Reçu le 12. III. 1963