

SUR LES FONCTIONS CONSTANTES PAR SEGMENTS

par

TIBERIU POPOVICIU

à Cluj

1. Soit E un ensemble (non vide) de points de l'axe réel (ou de l'axe réel complété par les points impropres $-\infty$ et ∞). Un sous-ensemble de E est dite un *segment* de E si avec deux points de E , il contient toujours tous les points de E compris entre eux. $E' \subseteq E$ est donc un segment de E si $a, b \in E' \wedge a \leq b \rightarrow [a, b] \cap E \subseteq E'$.

Tout ensemble formé par un seul point de E et l'ensemble E lui même sont des segments de E . Nous pouvons supposer que l'ensemble vide est aussi un segment de E . L'intersection de deux (ou un nombre quelconque, fini ou infini, de) segments de E est un segment de E . La réunion de deux ou plusieurs (un nombre quelconque fini ou infini, de) segments, qui ont au moins un point commun, est un segment.

Remarque. Si E est l'axe réel la notion de segment coïncide avec celle d'intervalle.

Dans le cas général, on pourrait d'abord introduire la notion de segment *fermé*. C'est un sous-ensemble de E formé par tous les points de E compris (au sens large) entre deux points a, b ou $a \leq b$ de E . Un segment fermé est donc un ensemble de la forme $[a, b] \cap E$ où $a, b \in E$. Les points a et b sont les *extrémités* de ce segment. Un segment (quelconque) de E est alors un sous-ensemble de E qui, avec deux quelconques de ses points, contient toujours le segment fermé ayant ces points comme extrémités.

Dans le cas de l'axe réel, le *segment fermé* est un *intervalle fermé* et le segment, tout court, est un intervalle quelconque.

Dans ce travail il est inutile de faire la distinction entre segment fermé et segment quelconque (éventuellement non fermé). La notion de segment sera donc acceptée au sens du commencement de ce nr.

2. Nous dirons que la suite (finie) $(E_\alpha)_{\alpha=1}^n$ de segments de E forme une décomposition de E en segments consécutifs ou une *partition* de E si :

a) Les segments E_α , $\alpha = 1, 2, \dots, n$ sont non-vides et partagent en classes l'ensemble E .

b) $a \in E_\alpha$, $b \in E_\beta$, $\alpha < \beta \Rightarrow a < b$.

La propriété a) signifie que les segments E_α , $\alpha = 1, 2, \dots, n$ sont sans points communs deux à deux et $\bigcup_{\alpha=1}^n E_\alpha = E$.

La propriété b) signifie que si $\alpha < \beta$, tout point de E_α est à gauche de tous les points de E_β .

On peut désigner par $(E_1|E_2|\dots|E_n)$ la partition de E considérée. Le nombre (naturel) n peut être égal à 1. Alors le terme unique de la partition coïncide avec E . On voit facilement que si E est fini, le nombre n peut être égal à un nombre naturel quelconque, au plus égal au nombre des points de E .

Si E est un intervalle, les termes d'une partition de E sont des intervalles, deux à deux disjoints et dont deux consécutifs quelconques ont une extrémité commune.

Toute partition $(E_1|E_2|\dots|E_n)$ de E peut être obtenue en intersectant E avec les termes d'une partition $(R_1|R_2|\dots|R_n)$ de l'axe réel ($E_\alpha = R_\alpha \cap E$, $\alpha = 1, 2, \dots, n$).

Si E est infini, il existe une partition de E ayant n termes, quel que soit le nombre naturel n . En effet, on peut trouver une suite croissante $(x_\alpha)_{\alpha=1}^{n+1}$ de $n+1$ termes de E ($n > 1$), telle donc que l'on ait $x_\alpha \in E$, $\alpha = 1, 2, \dots, n+1$ et $x_\alpha < x_{\alpha+1}$, $\alpha = 1, 2, \dots, n$. Si nous posons $E_1 = (-\infty, x_1] \cap E$, $E_\alpha = [x_{\alpha-1}, x_\alpha] \cap E$, $\alpha = 2, 3, \dots, n-1$ ($n > 2$), $E_n = (x_n, \infty) \cap E$, la décomposition $(E_1|E_2|\dots|E_n)$ est une partition de E .

3. Nous allons maintenant dire ce qu'on entend par une contraction ou une dilatation d'une partition de E .

Étant donnée une partition de E , on peut en déduire une autre en réunissant des termes consécutifs. On peut dire alors que la seconde partition s'obtient de la première par *contraction*. Si

$$(1) \quad (E_1|E_2|\dots|E_n)$$

est une partition de E et si $F_\alpha = \bigcup_{\beta=1}^{k_\alpha} E_{\beta+k_\alpha-1}$, $\alpha = 1, 2, \dots, r$,

où $r, k_1, k_2, \dots, k_r$ sont des nombres naturels et $k_1 + k_2 + \dots + k_r = n$ ($k_0 = 0$), alors

$$(2) \quad (F_1|F_2|\dots|F_r)$$

est une partition de E obtenue par contraction de la partition (1).

On peut aussi dire que la partition (1) s'obtient de la partition (2) par *dilatation*. On peut donc obtenir d'une partition donnée une autre par dilatation en décomposant certains de ses termes en des nouveaux segments consécutifs. Ainsi la partition (1) s'obtient de la partition (2) par dilatation, en remplaçant F_α par sa partition $(E_{k_1+k_2+\dots+k_{\alpha-1}+1}|E_{k_1+k_2+\dots+k_{\alpha-1}+2}|\dots|E_{k_1+k_2+\dots+k_\alpha})$ pour $\alpha = 1, 2, \dots, r$.

L'une des partitions qui s'obtient de la partition (1) par contraction ou par dilatation est cette partition même.

Si (1), (2) sont deux partitions quelconques de E (non pas nécessairement obtenues l'une de l'autre par contraction ou par dilatation), les deux premiers termes E_1, F_1 et de même les deux derniers termes E_n, F_r sont dans la relation de sous-ensemble. C'est-à-dire que l'une des relations $E_1 \subseteq F_1$, $F_1 \subseteq E_1$ et de même l'une des relations $E_n \subseteq F_r$, $F_r \subseteq E_n$ est toujours vérifiée.

4. Une fonction (réelle ou complexe, finie ou non), définie sur l'ensemble E de l'axe réel est dite *constante par segments* s'il existe une partition (1) de E telle que sur chacun des termes E_α , $\alpha = 1, 2, \dots, n$, cette fonction soit une constante. Nous pouvons dire que la partition (1) est alors un *support* de la fonction constante par segments considérée. Le nombre n des termes de ce support peut être appelé le *degré* de la fonction. Le degré n'est pas bien déterminé, en général, puisque toute partition obtenue par dilatation d'un support est aussi un support de la fonction.

Le degré, variable avec le nombre des termes d'un support, est un nombre naturel. Il a donc un minimum qui est un nombre naturel et qui est appelé le *degré effectif* de la fonction constante par segments considérée.

Si la fonction est de degré effectif n , elle a un support (1) avec n termes. Dans ce cas la fonction se réduit (si $n > 1$) à deux constantes différentes sur deux termes consécutifs quelconques $E_\alpha, E_{\alpha+1}$ ($\alpha = 1, 2, \dots, n-1$). Cette propriété, presque évidente, sera reprise plus loin à l'occasion de la démonstration du théorème 1.

Nous allons démontrer que si une fonction constante par segments est de degré effectif n , son support à n termes est *unique*. Pour cela supposons que la fonction ait deux supports $(E_1|E_2|\dots|E_n)$, $(F_1|F_2|\dots|F_r)$ avec n termes. Il suffit de démontrer que $E_\alpha = F_\alpha$, $\alpha = 1, 2, \dots, n$. Pour $n = 1$ la propriété est évidente. Si $n > 1$, supposons le contraire. Il existe alors un indice r , $1 \leq r \leq n-1$, tel que l'on ait $E_\alpha = F_\alpha$, $\alpha = 1, 2, \dots, r-1$, $E_r \neq F_r$ (seulement $E_1 \neq F_1$ si $r = 1$). L'un des ensembles E_r, F_r doit être un sous-ensemble propre de l'autre. Soit $E_r \subset F_r$ pour fixer les idées. Il existe alors un point qui appartient à $E_{r+1} \cap F_r$ et qui donc appartient à E_{r+1} mais n'appartient pas à E_r . La fonction considérée n'est pas constante sur F_r , ce qui contredit la définition de cet ensemble.

Ceci démontre l'unicité énoncée.

5. En complétant une remarque déjà faite, nous pouvons démontrer le

THÉOREME 1. *Pour que la partition (1) de E soit le support de la fonction f , constante par segments et de degré effectif n sur E , il faut et il suffit que f se réduise (si $n > 1$) à deux constantes différentes sur deux termes consécutifs quelconques $E_\alpha, E_{\alpha+1}$ ($\alpha = 1, 2, \dots, n-1$).*

La partition (1) étant un support de f , il faut que cette fonction soit une constante sur chacun des termes E_α , $\alpha = 1, 2, \dots, n$.

Passons à la démonstration du théorème.

La condition est nécessaire, puisqu'autrement par une contraction convenable on pourrait obtenir un support ayant moins de n termes.

Pour démontrer que la condition est aussi suffisante supposons qu'elle soit satisfaite. Soit alors (2) un support quelconque de la fonction f . Nous allons démontrer que la partition (2) s'obtient de (1) par dilatation. Si $n = 1$ la propriété est immédiate. Si $n > 1$ soit F_β un terme quelconque de la partition (2). Il existe alors nécessairement un indice α tel que (Λ désigne l'ensemble vide)

$$(3) \quad F_\beta \cap E_\alpha \neq \Lambda.$$

Autrement, en effet, de la définition d'une partition il résulterait que $F_\beta \cap (\bigcup_{\alpha=1}^n E_\alpha) = F_\beta \cap E = \Lambda$ ce qui est impossible puisque F_β n'est pas vide. Nous avons $F_\beta \subseteq E_\alpha$. En effet, autrement on pourrait trouver un indice α' , différent de α , tel que

$$(4) \quad F_\beta \cap E_{\alpha'} \neq \Lambda$$

Mais de (3) et (4) il résulte que l'une des relations

$$(5) \quad F_\beta \cap E_{\alpha-1} \neq \Lambda \text{ (si } \alpha > 1), F_\beta \cap E_{\alpha+1} \neq \Lambda \text{ (si } \alpha < n)$$

a certainement lieu. Ceci est impossible puisqu'alors la fonction f ne serait pas constante sur F_β , contrairement à la définition de cet ensemble. Il résulte donc que tout segment F_β est sous-ensemble d'un et d'un seul (l'unicité de α dans (3)) segment E_α .

Remarquons aussi qu'à tout α doit correspondre au moins un β tel que $E_\alpha \cap F_\beta \neq \Lambda$. Autrement, en effet, il résulterait, comme plus haut, que $E_\alpha \cap E = \Lambda$ ce qui est impossible puisque E_α n'est pas vide.

Ceci démontre que, dans les conditions de la démonstration, la partition (2) s'obtient de (1) par dilatation.

Le théorème 1 est démontré.

Remarquons que nous avons démontré un peu plus que ce qui a été énoncé par le théorème 1 et notamment que tout support d'une fonction constante par segments s'obtient par dilatation de son support ayant le nombre minimum de termes.

6. Considérons deux fonctions f, g constantes par segments sur E et soient

$$(6) \quad (F_1 | F_2 | \dots | F_m), (G_1 | G_2 | \dots | G_n)$$

des supports respectifs de ces fonctions.

Nous allons montrer qu'on peut trouver un support commun des fonctions f et g .

Les intersections $F_\alpha \cap G_\beta$, $\alpha = 1, 2, \dots, m$, $\beta = 1, 2, \dots, n$ sont des segments deux à deux disjoints et leur réunion est égale à E . Parmi ces intersections il y en a qui sont certainement non vides. Telles sont les intersections $F_1 \cap G_1$ et $F_m \cap G_n$. Mais aussi parmi ces intersections il y en a, en général qui sont toujours vides. En rangeant celles des intersections qui ne sont pas vides dans un ordre déterminé on obtient la partition

$$(7) \quad (E_1 | E_2 | \dots | E_p)$$

qui s'obtient de chacune des partitions (6) par dilatation et il en résulte donc qu'elle est un support commun des fonctions f et g .

La propriété précédente résulte de l'analyse suivante. D'abord à tout α ($1 \leq \alpha \leq m$) correspond un β ($1 \leq \beta \leq n$) tel que $F_\alpha \cap G_\beta$ ne soit pas vide. Ensuite si $F_\alpha \cap G_\beta$ n'est pas vide tout $F_{\alpha'} \cap G_{\beta'}$ avec $\alpha' > \alpha$, $\beta' < \beta$ est vide, car autrement, tout point de $F_{\alpha'} \cap G_{\beta'}$ devrait être à la fois à gauche et à droite de tout point de $F_\alpha \cap G_\beta$. Il en résulte qu'on peut trouver les entiers non-négatifs $k_1, k_2, \dots, k_m$ tels que $k_1 + k_2 + \dots + k_m = n$ et tels que toutes les intersections $F_\alpha \cap G_\beta$ différentes des segments ($k_\alpha = 0$)

$$(8) \quad F_\alpha \cap G_{k_1+k_2+\dots+k_{\alpha-1}+p}, \quad \beta = 0, 1, \dots, k_\alpha, \quad \alpha = 1, 2, \dots, m$$

soient vides.

Le nombre des segments (8) est égal à $m + n - 1$ et nous avons donc $p \leq m + n - 1$ pour le nombre p des termes de la partition (7).

Ceux des ensembles (8) qui ne sont pas vides, rangés par ordre „lexicographique” de leurs indices, forment la suite $E_1, E_2, \dots, E_p$. Ceci signifie que si $E_\gamma = F_\alpha \cap G_\beta$, $E_{\gamma'} = F_{\alpha'} \cap G_{\beta'}$, de $\gamma < \gamma'$ il résulte que $\alpha \leq \alpha'$, $\beta \leq \beta'$, $\alpha + \beta < \alpha' + \beta'$. Ceci nous montre, en même temps, que les partitions (6) s'obtiennent de (7) par contraction.

Il en résulte aussi que $p \geq m$, $p \geq n$, donc que $p \geq \max(m, n)$.

7. Des résultats précédents on peut déduire quelques propriétés de l'ensemble des fonctions constantes par segments.

La somme et le produit de deux fonctions constantes par segments sont des fonctions constantes par segments. Cette propriété résulte immédiatement si on effectue les opérations d'addition et de multiplication sur les deux fonctions considérées rapportées à un support commun.

En particulier, les constantes sont des fonctions constantes par segments. Il en résulte que l'ensemble des fonctions constantes par segments est un ensemble linéaire (vectoriel) par rapport à l'addition habituelle (valeur par valeur) des fonctions et la multiplication habituelle par un nombre (réel ou complexe) des fonctions.

Des résultats précédents il résulte aussi que si deux fonctions constantes par segments sont respectivement de degré m et n , leur somme et leur produit sont de degré $m + n - 1$. Il est à remarquer que les fonctions considérées peuvent avoir les degrés effectifs m et n et, en même temps, leur somme et leur produit le degré 1 (peuvent être des constantes), sans que m et n soient égaux à 1. Par exemple, si (1) est une partition quelconque de E et si les fonctions f, g sont définies par les formules

$$f(x) = \frac{1 + (-1)^x}{2} \text{ pour } x \in E_\alpha, \alpha = 1, 2, \dots, n, g = 1 - f$$

alors la somme $f + g$ se réduit à la constante 1 et le produit fg à la constante 0.

8. Nous dirons qu'un segment E' de E est un *segment initial* (de E) s'il n'existe aucun point de E à gauche de tous les points de E' et de même nous dirons que le segment E' de E est un *segment final* (de E) s'il n'existe aucun point de E à droite de tous les points de E' . L'ensemble (ou le segment) vide n'est pas considéré comme un segment initial ou un segment final. Si (1) est une partition de E , le segment E_1 est un segment initial et E_n un segment final de E .

Une fonction définie sur E sera dite *initialement constante* respectivement *finalement constante* s'il existe un segment initial, respectivement un segment final de E , sur lequel cette fonction est une constante. Toute constante et, en général, toute fonction constante par segments, est initialement constante et aussi finalement constante, quel que soit E .

Mais, en général, une fonction n'est ni initialement constante et ni finalement constante. Par exemple la fonction x (et aussi tout polynôme non constante) n'est ni initialement constante et ni finalement constante sur un intervalle ouvert. Si $a = \inf E \in E$ (donc si E a un minimum), toute fonction définie sur E est initialement constante, puisque l'ensemble $\{a\}$ formé par le seul point a est un segment initial de E et toute fonction est constante sur un seul point. On voit de même que si $\sup E \in E$ (donc si E a un maximum) toute fonction définie sur E est finalement constante.

9. Nous nous proposons de démontrer maintenant le

THÉORÈME 2. Une condition nécessaire et suffisante pour que la fonction f , définie sur l'ensemble E (ayant au moins $n + 1$ points), soit constante

par segments et de degré n est que quels que soient les $n + 1$ points $x_1 < x_2 < \dots < x_{n+1}$ de E l'on ait

$$(9) \quad \prod_{\alpha=1}^n [f(x_\alpha) - f(x_{\alpha+1})] = 0.$$

La condition est nécessaire. En effet, si (1) est un support à n termes de f , parmi les points $x_\alpha, \alpha = 1, 2, \dots, n + 1$ il y en a certainement au moins deux consécutifs $x_\beta, x_{\beta+1}$ qui appartiennent au même terme E_α et l'égalité (9) est vérifiée.

Avant d'aller plus loin démontrons le

L e m m e 1. Si la condition exprimée par l'égalité (9), du théorème 2, est vérifiée, la fonction f est finalement constante.

Supposons donc que la condition du théorème 2 soit satisfaite et supposons que la fonction f ne soit pas finalement constante. Alors, en particulier, cette fonction n'est pas constante et il existe donc les points $x_1, x_2 \in E$, tels que $x_1 < x_2$ et $f(x_1) \neq f(x_2)$. Sur le segment final $E \cap [x_2, \infty)$ la fonction n'est pas constante et il existe donc un point x_3 de ce segment, tel que $x_2 < x_3$ et sur lequel $f(x_2) \neq f(x_3)$. On peut continuer de cette manière et former la suite (infinie) croissante $x_1, x_2, \dots$, telle que l'on ait $f(x_\alpha) \neq f(x_{\alpha+1})$ pour tout α . Ceci contredit l'égalité (9) et cette contradiction démontre le lemme 1.

On démontre de la même manière que, sous les mêmes conditions, la fonction est initialement constante.

Nous allons maintenant procéder par induction complète pour démontrer la suffisance de la condition du théorème 2.

Pour $n = 1$ la propriété est vraie puisque si $f(x_1) = f(x_2)$ pour tout $x_1, x_2 \in E$, la fonction est constante et est donc constante par segments de degré 1.

Supposons maintenant que $n > 1$ et que le théorème soit démontré pour les fonctions constantes par segments de degré $n - 1$. Supposons alors que la condition exprimée par l'égalité (9) soit vérifiée. Soit E' la réunion de tous les segments finaux sur lesquels la fonction f est constante. D'après le lemme 1 l'ensemble E' n'est pas vide. Alors, ou bien $E' = E$, la fonction est constante sur E et le théorème est démontré. Ou bien alors $E' \subset E$, donc $E - E'$ n'est pas vide. Nous allons démontrer que dans ce cas la fonction f est constante par segments de degré $n - 1$ sur $E - E'$. En effet, dans le cas contraire, on pourrait trouver n points $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ de $E - E'$ tels que l'on ait

$$\prod_{\alpha=1}^{n-1} [f(x_\alpha) - f(x_{\alpha+1})] \neq 0.$$

Mais sur le segment $E \cap [x_n, \infty)$ la fonction ne peut être constante, en vertu de la définition de E' . On peut donc trouver un point x_{n+1} de ce

segment (donc de E), différent de x_n tel que $f(x_n) \neq f(x_{n+1})$. Il en résulterait $x_n < x_{n+1}$ et

$$\prod_{\alpha=1}^n [f(x_\alpha) - f(x_{\alpha+1})] \neq 0$$

ce qui contredit l'égalité (9).

Cette contradiction démontre le théorème 2 pour les fonctions constantes par segments de degré n .

Le théorème 2 est donc démontré.

On voit, par de très légères modifications de la démonstration, que le théorème 2 subsiste aussi si E contient l'un ou les deux points impropres $-\infty, \infty$.

La propriété exprimée par le théorème 2 peut aussi s'exprimer sous la forme du

THÉORÈME 3. Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction définie sur l'ensemble E (ayant au moins $n+1$ points) soit constante par segments de degré n est que cette propriété soit vérifiée, par la fonction considérée, sur tout sous-ensemble de E formé par $n+1$ points.

10. Dans ce travail nous considérons seulement des fonctions constantes par segments de degré fini. On peut définir des partitions de E dont les termes forment une suite infinie ou, plus généralement, un ensemble ordonné de type ordinal donné. À ces partitions correspondent des fonctions constantes par segments d'un type (sorte de degré) correspondant. Il est clair que de telles fonctions ne présentent d'intérêt que si le type ordinal des supports est différent de celui de l'ensemble ordonné E . Ainsi, toute fonction définie sur un ensemble bien ordonné de nombre ordinal ω (d'une suite infinie) est évidemment constante par segments de degré ω . Mais, toute fonction définie sur l'axe réel n'est pas constante par segments de degré ω .

La notion d'ensemble ordonné est prise ici dans le sens de l'ordination des nombres réels d'après leur grandeur numérique. Le type ordinal des partitions, donc aussi le type (le degré) des fonctions constantes par segments correspondantes, peut être précisé de la manière suivante. Soit I un sous-ensemble ordonné de l'axe réel (ordonné). $E = \bigcup_{\alpha \in I} E_\alpha$ est

une partition du type ordinal de I si les E_α sont des segments de E , deux à deux disjoints. Si $I = (1, 2, \dots, n)$ nous avons les fonctions constantes par segments de degré (fini) n , étudiées dans ce travail et si $I = (1, 2, \dots, n, \dots) =$ la suite des nombres naturels, nous avons les fonctions constantes par segments de degré ω .

Reçu le 18. IV. 1965.

К ВОПРОСУ О ГРАДИЕНТЕ СКОБЛЯХ ОУНЦЕВ, АНАЛИТИЧЕСКИХ В ПОЛОЖИ

М. Е. ПУШКИН

Аннотация

В. В. ПУШКИН [1], [2], [3] рассматривал функции, определенные на множестве $\Delta = \{x \in \mathbb{R} : x < \infty, |x| < \delta\}$ функцией $f(x) = f(x + \delta)$. Он — первоначально, исследовал их на $\mathbb{R}$. Рассматривались также функции

$$g(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(x + t\delta).$$

Он также рассматривал в смысле „длина для всех x . В этих работах изучались функции, которые могут выполняться на некотором приближении $E, f(x)$ функцией $f(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(x + t\delta)$. (См. также [1], [2], [3], стр. 101-102).

В настоящей работе рассматриваются функции, определенные на $\mathbb{R}$.

1. Если $f \in H^p$, $1 < p < \infty$ и $E, f(x) < \frac{1}{p}$, то для функции f не имеет смысла $f(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(x + t\delta)$.

2. Если $E, f(x) < \frac{1}{p}$, $1 < p < \infty$, $r > 1 - \frac{1}{p}$, то $f \in H^p$.

Примечание. В работе [3] не приводилась формула, что функция $f(x)$ не имеет смысла для функции $f(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(x + t\delta)$ для $x > r - 1 + \frac{1}{p}$.