

ANALELE ȘTIINȚIFICE

ALE

UNIVERSITĂȚII „AL. I. CUZA”

DIN IASI

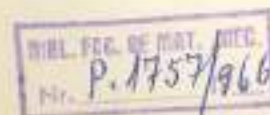
(SERIE NOUĂ)

SECȚIUNEA I

a. Matematică

TOMUL XI₂ ANUL 1965

Omagiu acad. prof. O. MAYER
cu ocazia împlinirii a 70 ani



И. ПОПА и Г. ГЕОРГИЕВ — Замечание в связи с внутренней алгеброй.	261 — 272
Г. Т. ГЕОРГИУ — О геодезических кривых смешанного абсолютного исчисления.	273 — 281
Л. ГОДО — О последовательностях калидрия ассоциированных точек поверхности.	283 — 289
СУ БУКИН — О псевдопериодических последовательностях Лапласа в проективном гиперпространстве.	291 — 305
Л. А. САНТАЛО — Интегральная геометрия проективных групп плоскости, зависящих от более чем три параметра.	307 — 335
Ф. МАРКУС — О поверхностях R проективно-наложимых на их преобразованиях P .	337 — 348
Т. М. ХАНГАН — Проективная грассманова псевдогруппа.	349 — 356
Н. МИХЭИЛЯНУ — Об одного квадратичного нульсистемы.	357 — 362
Г. ВРЭНЧАНУ — Связности аффинные и «ариятные» относительно дискретных групп.	363 — 381
Я. ШАПИРО — Просто транзитивные группы движений в аффинно-связных пространствах.	383 — 395
Р. МИРОН и Д. ПАПУК — Теория многообразий пространства с аффинной связностью.	397 — 409
КАРЕЛ СВОБОДА — О двойных симплектических деформациях конгруэнций прямых пятимерного пространства.	411 — 428
Р. М. ГЕЙДЕЛЬМАН — Выведение в конформно дифференциальную теорию трехпараметрического комплекса окружностей.	429 — 451
В. КРУЧАНУ — О центр-аффинной геометрии неголономных многообразий V_n^{m-1} .	453 — 454
С. ГОЛАБ — Об особых точках параллельных поверхностей. I.	465 — 472
М. ПИНЛ — Минимальные поверхности и изотропные кривые в римановом пространстве.	473 — 480
Р. Н. ЩЕРБАКОВ — Обобщенные псевдосферические конгруэнции.	481 — 492
Т. Ж. ВИДМОР — С погруженных поверхностей.	493 — 496
К. РАДЗИЖЕВСКИЙ — О некоторой метрической интерпретации соприкасающихся плоскостей.	497 — 506
О. ВАРГА — О сферической отображении в римановых пространствах.	507 — 512
И. КРЯНГЭ и Н. РЭДЕСКУ — Неголономные многообразия с аксиальными цилиндрическими линиями.	513 — 519
И. ВАЙСМАН — Об одной аффинной связности ассоциированной сети на поверхности.	521 — 530
О. ОНИЧЕСКУ — Суммируемая функция случайного процесса дискретного времени на конечном множестве состояний.	531 — 536
МЕНДЕЛЬ ХАЙМОВИЧ — Об изучении упругих пластинок.	537 — 544
К. И. БОРШ — Плоские деформации в анизотропных телах.	545 — 554
К. П. ПАПАИОАННУ — Об общих характеристических уравнениях и термодинамических функциях. Приложение к теоретическому расчету C_p и C_v .	555 — 568
Ф. НОЗИЧКА — Метод гиперфер в линейном программировании.	569 — 595

SOMMAIRE

	Pages
A. MYLLER — Les différentes formes du problème mathématique. Son origine, son élaboration et sa présentation.	1—7
FLORICA CÎMPAN — Textes roumains sur les fractions dans un manuscrit grec.	9—13
GR. C. MOISIL — Sur la logique strictement positive.	15—24
VERA MYLLER — Sur les racines primitives et les systèmes de bases et indices dans le corps quadratique général.	25—41
W. SIERPINSKI — Sur quelques conséquences d'une hypothèse de M. A. Schinzel sur les nombres premiers.	43—45
VIGGO BRUN — Un procédé qui ressemble au crible d'Ératosthène.	47—53
GH. PIC — Sur les groupes finis p -nilpotents.	55—65
I. GY. MAURER und M. SZILÁGYI — Über in Stellenringen definierte unendliche Produkte.	67—74
M. F. CHIROKHOV — Les suites de décomposition dans l'algèbre booléenne.	75—87
M. KOLIBIAR — Linien in Verbänden.	89—98
TUDORA LUCHIAN — Remarks on Weak-Rings.	99—111
G. CĂLUGĂREANU — Sur une propriété métrique des ensembles connexes du plan.	113—117
Z. LEWANDOWSKI, M. O. READE, E. ZLOTKIEWICZ — On a certain condition for univalence.	119—123
PETRU CARAMAN — Sur l'ensemble de monogénéité faible des applications de R^n .	125—136
ALEXANDRE FRUDA — Discriminants attachés aux systèmes isogonaux — complets ou non — d'un espace unitaire.	137—153
TIBERIU POPOVICIU — Sur certaines inégalités qui caractérisent les fonctions convexes.	155—164
D. V. IONESCU — La représentation de la différence divisée généralisée par une intégrale définie dans le cas des noeuds simples. I.	165—184
G. SANSONE — Sull'equazione differenziale non lineare di A. J. Lerner $\gamma \frac{dy}{dx} + y + \sqrt{ x } \operatorname{sgn} x = 0$.	185—208
CARLO MIRANDA — Su di una particolare equazione ellittica del secondo ordine a coefficienti discontinui.	209—215
O. BORUVKA — Über die allgemeinen Dispersionen der linearen Differentialgleichungen 2. Ordnung.	217—238
ADOLF HAIMOVICI — Sur une interprétation géométrique des systèmes de Pfaff complètement intégrables et sur leur arbitraireté.	239—250

SUR CERTAINES INÉGALITÉS QUI CARACTÉRISENT LES FONCTIONS CONVEXES

PAR

TIBERIU POPOVICIU

à Cluj

Hommage à M. D. Măyeri à l'occasion de son 70-e anniversaire

1. Une fonction $f(x)$, définie sur un intervalle I , (de longueur non nulle) est dite non-concave, respectivement convexe si sa différence divisée d'ordre 2, $[x_1, x_2, x_3; f]$ est ≥ 0 , respectivement > 0 sur tout groupe de 3 points distincts $x_1, x_2, x_3 \in I$. Une fonction convexe est d'ailleurs un cas particulier de fonction non-concave.

Dans la suite nous étudierons quelques inégalités qui caractérisent les fonctions continues et non-concaves.

2. **Théorème 1.** *Pour que la fonction continue f soit non-concave sur l'intervalle I , il faut et il suffit que l'inégalité de Jensen*

$$(1) \quad 2f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq f(x) + f(y)$$

soit vérifiée pour tout $x, y \in I$.

L'inégalité (1), pour tout $x, y \in I$, caractérise donc les fonctions continues et non-concaves sur I .

On connaît plusieurs démonstrations du théorème 1.

La condition est suffisante. En effet si l'inégalité (1) est vérifiée pour tout $x, y \in I$, la fonction f , supposée continue, est non-concave sur I .

La condition est nécessaire. Ceci résulte immédiatement de la formule

$$\left[x, y, \frac{x+y}{2}; f\right] = \frac{2}{(y-x)^2} \left[f(x) + f(y) - 2f\left(\frac{x+y}{2}\right) \right] \quad (x \neq y).$$

Mais nous allons donner ici une autre démonstration, qui est basée sur l'approximation des fonctions continues par des lignes polygonales inscrites dans la courbe représentative.

La démonstration de la nécessité de la condition du théorème 1 résulte des propriétés suivantes:

A. Les fonctions $\lambda x + \mu, |x - \varrho|$, où λ, μ, ϱ sont des constantes quelconques, vérifient l'inégalité (1) pour tout $x, y \in I$.

B. Si un nombre fini de fonctions vérifient l'inégalité (1) pour tout $x, y \in I$, toute combinaison linéaire de ces fonctions, avec des coefficients non-négatifs, jouit de la même propriété.

C. Si les termes d'une suite convergente sur I , de fonctions définies sur I , vérifient l'inégalité (1) pour tout $x, y \in I$, la fonction limite jouit de la même propriété.

D. Toute fonction continue et non-concave est la limite d'une suite de fonctions de la forme

$$(2) \quad \lambda x + \mu + \sum_{\alpha=1}^n C_{\alpha} |x - c_{\alpha}|,$$

les $C_{\alpha}, \alpha=1, 2, \dots, n$, étant des constantes non-négatives et $c_{\alpha}, \alpha=1, 2, \dots, n$ des points de l'intervalle I .

3. Pour compléter la démonstration précédente nous allons examiner de plus près les propriétés A, D de plus haut. Nous pouvons nous dispenser de donner les démonstrations des propriétés B, C, qui sont immédiates.

Occupons-nous d'abord de la propriété A.

Tout polynôme du premier degré $\lambda x + \mu$ vérifie l'inégalité (1), avec le signe $=$, pour tout $x, y \in I$.

La fonction $|x|$ vérifie l'inégalité (1) par suite de l'inégalité bien connue

$$(3) \quad |x + y| \leq |x| + |y|$$

entre la valeur absolue de la somme et la somme des valeurs absolues des termes.

Il en résulte immédiatement que la fonction $|x - \varrho|$ vérifie aussi l'inégalité (1) pour tout $x, y \in I$ et toute constante ϱ .

Remarquons que la non-concavité des fonctions $\lambda x + \mu, |x|$ (donc aussi de $|x - \varrho|$) résulte directement de l'inégalité (1), sans l'hypothèse de la continuité. En effet, la fonction f est non-concave sur I si et seulement si nous avons

$$(4) \quad f\left(\frac{px + qy}{p + q}\right) \leq \frac{pf(x) + qf(y)}{p + q}$$

pour tout $x, y \in I$ et pour tout $p, q > 0$.

Dans le cas d'un polynôme du premier degré $P(x) = \lambda x + \mu$, en posant $Q(x) = \lambda x + \mu(p + q)$ ($p, q > 0$) de l'inégalité $2Q\left(\frac{px + qy}{p + q}\right) \leq Q(px) + Q(qy)$ on déduit, après quelques simplifications, $P\left(\frac{px + qy}{p + q}\right) \leq \frac{pP(x) + qP(y)}{p + q}$ (dans ces relations c'est le signe $=$ qui a toujours lieu).

Dans le cas de la fonction $|x|$, de $|px + qy| \leq |px| + |qy| = p|x| + q|y|$ ($p, q > 0$) il résulte aussi $\left|\frac{px + qy}{p + q}\right| \leq \frac{p|x| + q|y|}{p + q}$. Nous avons une propriété analogue pour la fonction $|x - \varrho|$.

4. Pour démontrer la propriété D il suffit de supposer que la fonction f soit continue et non-concave sur l'intervalle fini et fermé $[a, b]$. Soient alors $a = c_0 < c_1 < \dots < c_{m-1} < c_m = b$ les points qui divisent l'intervalle $[a, b]$ en m parties égales et $\varphi_m(x)$ la fonction représentée par la ligne polygonale inscrite dans la courbe $y = f(x)$ suivant les sommets $(c_{\alpha}, f(c_{\alpha}))$, $\alpha = 0, 1, \dots, m$. Alors nous avons

$$\varphi_m(x) = \sum_{\alpha=0}^m C_{\alpha} |x - c_{\alpha}|$$

qui est bien de la forme (2) où les coefficients C_{α} , $\alpha = 1, 2, \dots, m-1$ ($m > 1$) sont non-négatifs. En effet, la suite des pentes

$\left(\sum_{\alpha=0}^i C_{\alpha} - \sum_{\alpha=i+1}^m C_{\alpha}\right)_{i=0}^{m-1}$ des côtés de la ligne polygonale est non-décroissante.

Si $\omega(\delta)$ est le module d'oscillation de la fonction f , nous avons

$$\begin{aligned} |f(x) - \varphi_m(x)| &= |f(x) - f(c_{\alpha-1})| \frac{x - c_{\alpha-1}}{c_{\alpha} - c_{\alpha-1}} + \\ &+ |f(x) - f(c_{\alpha})| \frac{x - c_{\alpha}}{c_{\alpha} - c_{\alpha-1}} \leq \omega(x - c_{\alpha-1}) \frac{c_{\alpha} - x}{c_{\alpha} - c_{\alpha-1}} + \\ &+ \omega(c_{\alpha} - x) \frac{x - c_{\alpha-1}}{c_{\alpha} - c_{\alpha-1}} \leq \omega\left(\frac{b-a}{m}\right), \end{aligned}$$

où $x \in [c_{\alpha-1}, c_{\alpha}]$, $\alpha = 1, 2, \dots, m$, donc

$$|f(x) - \varphi_m(x)| \leq \omega\left(\frac{b-a}{m}\right), \text{ pour } x \in [a, b]$$

et la suite $(\varphi_m(x))_{m=1}^{\infty}$ converge (et même uniformément) vers la fonction f .

5. Nous avons montré plus haut le rôle de l'inégalité (3) dans la caractérisation par l'inégalité (1) des fonctions continues et non-concaves. Nous allons montrer comment on peut utiliser certaines généralisations de l'inégalité (3) pour obtenir d'autres caractérisations de la même nature.

Considérons l'inégalité de H. Hornich [4],

$$(5) \quad |x+y| + |y+z| + |z+x| \leq |x| + |y| + |z| + |x+y+z|$$

qui est une généralisation de l'inégalité (3) et est vérifiée, en particulier, quels que soient les nombres réels x, y, z . Nous avons alors le

Théorème 2. Pour que la fonction continue f soit non-concave sur l'intervalle I , il faut et il suffit que l'inégalité

$$(6) \quad 2 \left[f\left(\frac{x+y}{2}\right) + f\left(\frac{y+z}{2}\right) + f\left(\frac{z+x}{2}\right) \right] \leq \\ \leq f(x) + f(y) + f(z) + 3f\left(\frac{x+y+z}{3}\right)$$

soit vérifiée pour tout $x, y, z \in I$.

Ce théorème est un cas particulier ($n=3, k=2$) d'un théorème plus général qui résulte d'une généralisation de l'inégalité (5). Dušan D. Adamović [1] et Dragomir Ž. Doković [2] ont généralisé l'inégalité (5), le premier pour $k=2$ et le second pour k quelconque, par l'inégalité

$$(7) \quad \sum_{i=1}^{(k)} |x_{i_1} + x_{i_2} + \dots + x_{i_k}| \leq \\ \leq \binom{n-2}{k-2} \left[\frac{n-k}{k-1} \sum_{i=1}^n |x_i| + \sum_{i=1}^n x_i \right], \quad k=2, 3, \dots, n-1, \quad n=3, 4, \dots,$$

la sommation $\sum^{(k)}$ étant étendue à toutes les combinaisons $i_1, i_2, \dots, i_k$, k à k des indices $1, 2, \dots, n$.

On peut alors généraliser le théorème 2 par le

Théorème 3. Si n est un nombre naturel ≥ 3 et k un nombre naturel qui vérifie les inégalités $2 \leq k \leq n-1$, pour que la fonction continue f soit non-concave sur l'intervalle I , il faut et il suffit que l'inégalité

$$(8) \quad k \sum^{(k)} f\left(\frac{x_{i_1} + x_{i_2} + \dots + x_{i_k}}{k}\right) \leq \\ \leq \binom{n-2}{k-2} \left[\frac{n-k}{k-1} \sum_{i=1}^n f(x_i) + n f\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}\right) \right]$$

soit vérifiée pour tout $x_1, x_2, \dots, x_n \in I$.

Pour $n=3, k=2$ nous retrouvons le théorème 2.

L'inégalité (8) et, en particulier, l'inégalité (6), caractérisent donc les fonctions continues et non-concaves.

6. La démonstration du théorème 3 peut se faire de la même manière que celle du théorème 1.

La condition est suffisante, donc, si l'inégalité (8) est vérifiée pour tout $x_1, x_2, \dots, x_n \in I$, la fonction continue f est non-concave sur I . En

effet, posons dans (8), d'abord $x_1 = x, x_2 = x_3 = \dots = x_n = \frac{ny-x}{n-1}$, en-

suite $x_1 = y, x_2 = x_3 = \dots = x_n = \frac{nx-y}{n-1}$ et ajoutons membre à membre

les inégalités ainsi obtenues. Nous en déduisons

$$(9) \quad f\left(\frac{x+y}{2} + \frac{y-x}{2\delta}\right) + f\left(\frac{x+y}{2} - \frac{y-x}{2\delta}\right) \leq f(x) + f(y),$$

où $\delta = \frac{k(n-1)}{(n+1)k-2n} \geq \frac{(n-1)^2}{(n-1)^2-2} > 1$. Il en résulte que les points $\frac{x+y}{2} +$

$+\frac{y-x}{2\delta}, \frac{x+y}{2} - \frac{y-x}{2\delta}$ sont toujours compris entre x et y . On peut alors

répéter l'inégalité (9) en prenant ces points pour x et y . En continuant ainsi on trouve

$$(10) \quad f\left(\frac{x+y}{2} + \frac{y-x}{2\delta^m}\right) + f\left(\frac{x+y}{2} - \frac{y-x}{2\delta^m}\right) \leq f(x) + f(y), \quad m=1, 2, \dots$$

Compte tenant de $\delta > 1$ et de la continuité de la fonction f , en faisant $m \rightarrow \infty$, on déduit de (10) l'inégalité (1) de Jensen.

La condition est nécessaire, donc toute fonction non-concave et continue sur I vérifie l'inégalité (8) pour tout $x_1, x_2, \dots, x_n \in I$. En effet, les propriétés A, B, C, D du no. 2 sont vérifiées pour l'inégalité (8).

7. Considérons l'inégalité

$$(11) \quad \sum_{\alpha=1}^m p_{\alpha} f(x_{\alpha}) \geq 0,$$

où $p_{\alpha} \neq 0, \alpha=1, 2, \dots, m$ et $x_1 < x_2 < \dots < x_m$ sont m points distincts de I .

Si l'inégalité (11) est vérifiée pour toute fonction f non-concave sur I , nous avons $m > 2$ et

$$(12) \quad \sum_{\alpha=1}^m p_{\alpha} f(x_{\alpha}) = \sum_{\alpha=1}^{m-2} q_{\alpha} [x_{\alpha}, x_{\alpha+1}, x_{\alpha+2}; f],$$

avec $q_n \geq 0$, $n=1, 2, \dots, m-2$ [6]. En particulier, $q_1 = (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)p_1 > 0$, $q_{m-2} = (x_m - x_{m-1})(x_m - x_{m-2})p_{m-2} > 0$ et de (12), en posant $f(x) = x^2$, il résulte que

$$\sum_{a=1}^m p_a x_a^2 = \sum_{a=1}^{m-2} q_a > 0.$$

Nous en déduisons que pour toute fonction f convexe sur I , l'inégalité stricte

$$(13) \quad \sum_{a=1}^m p_a f(x_a) > 0$$

est vérifiée.

De cette analyse résulte le

Lemme 1. Si l'inégalité (11), où p_a , $a=1, 2, \dots, m$, sont des constantes (quelconques, non pas nécessairement différentes de zéro) et x_a , $a=1, 2, \dots, m$, des points (distincts ou non) de l'intervalle I , est vérifiée pour toute fonction f non-concave sur I et si $\sum_{a=1}^m p_a x_a^2 > 0$, l'inégalité stricte

(13) est vérifiée pour toute fonction f convexe sur I .

Revenons à l'inégalité (8). Pour $f(x) = x^2$ la différence entre le second et le premier membre est égale à

$$\left(\frac{n-2}{k-2} \right) \frac{n-k}{nh} \sum^{(1)} (x_{i_1} - x_{i_2})^2.$$

En appliquant le lemme 1 on en déduit la

Conséquence 1. Si n est un nombre naturel ≥ 3 , k un nombre naturel qui vérifie les inégalités $2 \leq k \leq n-1$ et si $x_1, x_2, \dots, x_n \in I$, toute fonction f continue et convexe sur I vérifie l'inégalité (8), l'égalité ayant lieu si et seulement si $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.

8. Il en résulte que l'équation fonctionnelle qu'on obtient en égalant les deux membres de la relation (8), a comme solution continue générale les polynômes de degré 1.

En effet, pour une telle solution il est nécessaire que les fonctions f et $-f$ soient toutes les deux non-concaves, ce qui a lieu si et seulement si f est un polynôme de degré 1.

En ce qui concerne l'équation fonctionnelle

$$(14) \quad \sum^{(n)} f(x_{i_1} + x_{i_2} + \dots + x_{i_k}) = \left(\frac{n-2}{k-2} \right) \left[\frac{n-k}{k-1} \sum_{i=1}^n f(x_i) + f(x_1 + x_2 + \dots + x_n) \right]$$

analogue à l'équation de Cauchy $f(x+y) = f(x) + f(y)$, nous allons dé-

montrer que sa solution continue générale est un polynôme de degré 2 qui s'annule pour $x=0$, donc une fonction de la forme $\lambda x^2 + \mu x$.

Pour $n=3$, $k=2$ nous avons l'équation fonctionnelle

$$(15) \quad f(x+y) + f(y+z) + f(z+x) = f(x) + f(y) + f(z) + f(x+y+z).$$

Considérons donc l'équation (14) qui est vérifiée quels que soient $x_1, x_2, \dots, x_n$ réels. Remarquons d'abord que tout polynôme de la forme $\gamma x^2 + \mu x$ vérifie cette équation.

Soit maintenant f une solution de l'équation (14). Si nous posons $x_1 = x_2 = \dots = x_r = 0$, nous déduisons $f(0) = 0$. Si nous posons ensuite (pour $n > 3$), $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$, $x_4 = x_5 = \dots = x_n = 0$, nous trouvons que la fonction f vérifie l'équation (15). Il suffit donc de démontrer que toute solution continue de cette équation est de la forme $\gamma x^2 + \mu x$. Ceci résulte des recherches de M. Fréchet sur la caractérisation fonctionnelle des polynômes [3]. Nous allons donner la démonstration. Il suffit de démontrer que la solution f de l'équation (15) est un polynôme de degré 2. Si nous posons $\Delta_h^2 f(x) = f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)$ et si nous posons $y = z = h$ dans (15) nous trouvons ($f(0) = 0$), $\Delta_h^2 f(x) = \Delta_h^2 f(0)$, donc aussi $\Delta_h^2 f(x+h) = \Delta_h^2 f(0)$ pour tout x et h . Nous en déduisons $\Delta_h^2 f(x) = \Delta_h^2 f(x+h) - \Delta_h^2 f(x) = 0$ pour tout x et h , d'où la propriété résulte immédiatement.

9. On peut se demander s'il est possible d'étendre les résultats précédents à l'inégalité

$$(16) \quad 2 \sum f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) + 4f\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4}\right) \leq \sum f(x_i) + 3 \sum f\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}\right)$$

étendue à 4 valeurs x_1, x_2, x_3, x_4 de l'argument (les sommations ayant des significations évidentes).

Toute fonction qui vérifie l'inégalité fonctionnelle (16) est bien non-concave, car en prenant pour x_1, x_2, x_3, x_4 les points $2x-y, 2x-y, 2y-x, 2y-x$ nous en déduisons l'inégalité (1) de Jensen. Mais la réciproque n'est pas vraie, car la fonction non-concave $|x-\theta|$, si θ est à l'intérieur de l'intervalle I , ne vérifie pas l'inégalité (16), l'inégalité analogue à celle de H. Hornich

$$(17) \quad \sum |x_1 + x_2| + |x_1 + x_2 + x_3 + x_4| \leq \sum |x_i| + \sum |x_1 + x_2 + x_3|$$

n'étant pas vraie en général. Nous allons donner la démonstration de ce fait plus loin.

En ce qui concerne l'équation fonctionnelle obtenue en égalant les deux membres de la relation (16), sa solution continue générale est encore un polynôme quelconque de degré 1.

10. Considérons l'inégalité

$$(18) \quad \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \sum^{(k)} |x_{t_1} + x_{t_2} + \dots + x_{t_k}| \geq 0$$

dont (5) et (17) sont des cas particuliers, pour $n=3$ et $n=4$ respectivement. Dragomir Ž. Doković dans son travail cité [2] a montré que l'inégalité (17) n'est pas vraie, en général. De la même manière nous pouvons démontrer que pour $n > 3$ quelconque l'inégalité (18) n'est pas vraie, en général. Pour cela il suffit de prendre $x_1 = x_2 = \dots = x_{n-1} = 1$, $x_n = -2$ (ou des valeurs quelconques non-nulles et proportionnelles à cette suite de nombres). Nous avons alors

$$\sum^{(k)} |x_{t_1} + x_{t_2} + \dots + x_{t_k}| = \binom{n-1}{k} k + \binom{n-1}{k-1} |k-3|$$

$$k = 1, 2, \dots, n \left[\binom{n-1}{n} = 0 \right]$$

et si $n > 3$, le premier membre de (18) devient

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \left[\binom{n-1}{k} k + \binom{n-1}{k-1} |k-3| \right] &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \binom{n-1}{k-1} |k-3| = \\ &= 3 - n + \sum_{k=3}^n (-1)^{k-1} \binom{n-1}{k-1} (k-3) = 2(3-n) < 0. \end{aligned}$$

De cette manière on a aussi répondu négativement à un problème que j'ai posé autrefois [7].

11. L'équation fonctionnelle

$$\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \sum^{(k)} f(x_{t_1} + x_{t_2} + \dots + x_{t_k}) = 0$$

a, d'après M. Fréchet [3], comme solution continue générale un polynôme quelconque de degré $n-1$ qui s'annule pour $x=0$. On peut démontrer cette propriété comme dans le cas particulier $n=3$ de l'équation (15) en remarquant d'abord que tout polynôme de la forme $a_0 x^{n-1} + a_1 x^{n-2} + \dots + a_{n-2} x$ vérifie l'équation et que toute solution vérifie aussi l'équation fonctionnelle $\mathcal{A}_n f(x) = \sum_{i=0}^n (-1)^{n-i} \binom{n}{i} f(x+ih) = 0$ dont la solution continue est bien connue.

Dans l'équation considérée les variables $x_1, x_2, \dots, x_n$ sont choisies de toutes les manières possibles avec la seule restriction que toutes les

sommes $x_{t_1} + x_{t_2} + \dots + x_{t_k}$ (pour tout k) restent dans un intervalle de l'axe réel qui contient l'origine. Cet intervalle peut, en particulier, se réduire à l'axe réel lui-même.

12. L'équation fonctionnelle

$$\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} k \sum^{(k)} f\left(\frac{x_{t_1} + x_{t_2} + \dots + x_{t_k}}{k}\right) = 0$$

vérifiée pour tout $x_1, x_2, \dots, x_n \in I$, a comme solution continue générale un polynôme quelconque de degré 1.

Ce résultat peut être obtenu indépendamment de l'étude des fonctions pour lesquelles le premier membre ne change pas de signe.

En effet, tout polynôme de degré 1 vérifie l'équation, mais le polynôme x^2 n'est pas une solution puisque

$$\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{1}{k} \sum^{(k)} (x_{t_1} + x_{t_2} + \dots + x_{t_k})^2 = \frac{1}{n(n-1)} \sum^{(2)} (x_{t_1} - x_{t_2})^2$$

est, en général, différent de 0. (I est de longueur non nulle).

En posant $x_i = x + (i-1)n!h$, $i=1, 2, \dots, n$, nous trouvons que toute solution f de l'équation considérée vérifie aussi une équation de la forme $\sum_{s=0}^{(n-1)!} a_s f(x+sh) = 0$, où $x, x+(n-1)n!h \in I$, les a_s sont des constantes et $a_0 \neq 0$, $a_{(n-1)!} \neq 0$. Nous savons [5] que toute solution continue d'une telle équation est un polynôme.

BIBLIOGRAPHIE

1. Adamović, Dušan, D. — Généralisation d'une identité de Hlawka et de l'inégalité correspondante. *Matem. Vesnik* 1 (16) (1964), 39-43.
2. Doković, Dragomir, Ž. — Generalizations of Hlawka's inequality. *Glasnik Mat. Fiz. i Astr.*, 18 (1963), 169-175.
3. Fréchet, M. — Une définition fonctionnelle des polynômes. *Nouv. Ann. des Math.* (4) 9 (1909), 145-162.
4. Hornich, H. — Eine Ungleichung für Vektorlängen. *Math. Zeitschrift*, 48 (1942), 268-274.
5. Popoviciu, T. — Sur certaines équations fonctionnelles définissant des polynômes. *Mathematica*, 10 (1934), 197-211.
6. — Notes sur les fonctions convexes d'ordre supérieur. III. *Mathematica*, 16, (1940), 74-85.
7. — P. 139, *Colloquium Mathematicum* III, 2 (1955), 172.

ASUPRA UNOR INEGALITĂȚI CE CARACTERIZEAZĂ FUNCTIILE CONVEXE

Rezumat

Se demonstrează că inegalitățile (1), (6), (8) caracterizează funcțiile continuu neconcave, iar (16) este o condiție suficientă, dar nu necesară, de neconcavitate.

О НЕКОТОРЫХ НЕРАВЕНСТВАХ ХАРАКТЕРИЗУЮЩИХ ВЫПУКЛЫЕ ФУНКЦИИ

Краткое содержание

В этой работе доказывается что неравенства (1), (6), (8) характеризуют непрерывные не вогнутые функции и что (13) является достаточным но не необходимым условием выпуклости.