

**BULETINUL
INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAȘI**

SERIE NOUĂ

Tomul XIII (XVII)

FASC. 3—4

1967

COLEGIUL DE REDACȚIE

Prof. emerit dr. doc. GH. ALEXA, prof. ing. D. ATANASIU, prof. ing. C. CALISTRU,
prof. ing. T. GOLGOȚIU, prof. dr. doc. D. MANGERON (secretar),
conf. ing. A. MARCHIȘ, prof. dr. doc. D. RUSU, prof. ing. A. ȘESAN,
acad. prof. dr. doc. CRISTOFOR SIMIONESCU (președinte)

COMITETELE DE REDACȚIE ALE SECȚIILOR

MATEMATICI,
MECANICĂ TEORETICĂ, FIZICĂ

Prof. dr. doc. Al. Climescu
Prof. Gh. Ciobanu
Prof. dr. doc. V. Petrescu

CHIMIE

Prof. dr. doc. M. Dima
Conf. dr. ing. Gh. Chiriță
Conf. ing. Gh. Botez

ELECTROTEHNICĂ, ELECTRONICĂ

Conf. dr. ing. D. Bărbulescu
Prof. dr. doc. N. Boțan
Conf. dr. ing. I. Sebastian

MECANICĂ TEHNICĂ

Prof. dr. doc. T. Făteș
Prof. ing. G. d'Albon
Conf. ing. Cr. Lînde

CONSTRUCȚII, HIDROTEHNICĂ

Prof. emerit ing. A. Cernătescu
Conf. ing. Vl. Boghian
Conf. ing. C. Ciobanu
Lector ing. A. Radu

INDUSTRIE UȘOARĂ

Prof. ing. I. Ștefănescu
Conf. ing. V. Copilu
Conf. ing. V. Cociu

REDACȚIA

Prof. dr. doc. D. MANGERON (redactor responsabil)
Lector ing. H. ROSMAN (secretar)

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAȘI
SERIE NOUĂ

BULLETIN OF THE POLYTECHNIC INSTITUTE OF JASSY

ИЗВЕСТИЯ ЯССКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

Tomul XIII (XVII), fasc. 3—4

1967

S U M A R

	Pag.
REDAȚIONALE	XVI
<i>MATEMATICĂ. MECANICĂ TEORETICĂ. FIZICĂ</i>	
AL. CLIMESCU, Aplicație la ecuațiile funcționale a unor construcții de algebră universală (I) (franc., rez. rom.)	1
V. V. TOPENTCHAROV (R. P. Bulgaria), Asupra algebrelor universale și de-finiția categoriilor (franc., rez. rom.)	5
C. BENZAKEN (Franța), Pseudo-lattice distributive și aplicații (II) (franc., rez. rom.)	11
G. BOULAYE (Franța), Homomorfisme de relații binare (I) (franc., rez. rom.)	17
I. ENESCU, Asupra algebrelor asociative, comutative și cu unitate principală de ordin cinci peste cimpul real (II) (franc., rez. rom.)	23
A. BRAIER, Forma exponențială a elementelor unor sume directe de algebre și unele aplicații (engl., rez. rom.)	31
D. TEPPER HAIMO (SUA), Transformarea redusă a lui Poisson-Hankel (I) (engl., rez. rom.)	39
R. MÜLLER (Noua Zeelandă), Integrale și serii conținând funcțiile lui Bessel (I) (engl., rez. rom.)	43
D. D. BAINOV (R. P. Bulgaria), O formulă relativă la produsul a n serii de puteri (rus., rez. rom.)	47
F. V. TOMAȘEVICI, S. U. KURTEAKOV (URSS), Asupra dezvoltării după un sistem neortogonal de elemente (rus., rez. rom.)	49
H. HARUKI (Canada), Asupra ecuației funcționale $ f(x + iy) = g(x) + h(iy) $ (engl., rez. rom.)	57
N. FORBAT, A. HUAUX (Belgia), Soluții periodice ale ecuațiilor diferențiale neliniare (II) (franc., rez. rom.)	67
N. APOSTOLATOS (RFG), Generalizarea noțiunii de ecuație diferențială de ordin n în complex și teoremele de existență și de unicitate (I) (germ., rez. rom.)	71
A. CORDUNEANU, Spectrul operatorului Volterra în anumite spații de funcțiuni (franc., rez. rom.)	77
E. BOMPIANI (Italia), Elemente principale ale unei varietăți tridimensionale a spațiului proiectiv cu șase dimensiuni (ital., rez. rom.)	83
V. MURGESCU, Invarianți la transport paralel în spații 4-dimensionale cu torsiune (I) (rom., rez. franc.)	91
S. RIMER, Reprezentare vectorială a cuadricelelor de rotație (I) (franc., rez. rom.)	99
T. POPOVICIU, Observații asupra restului anumitor formule de aproximare a unei diferențe divizate prin derivate (franc., rez. rom.)	103
D. V. IONESCU, Formule de cubatură cu un număr redus de noduri (I) (franc., rez. rom.)	111
PH. NOËL (Franța), O metodă de rezolvare a sistemelor liniare mari prin supraiterație polinomială (I) (franc., rez. rom.)	119

REMARQUES SUR LE RESTE DE CERTAINES FORMULES D'APPROXIMATION D'UNE DIFFÉRENCE DIVISÉE PAR DES DÉRIVÉES

PAR

TIBERIU POPOVICIU

membre de l'Académie de la République Socialiste de Roumanie

1. Considérons une fonction f définie et ayant une dérivée n -ième continue sur l'intervalle fini et fermé $[a, b]$, ($a < b$).

Soient $a = x_1 = x'_1 < x'_2 < \dots < x'_p = x_{n+1} = b$, $n+1$ points distincts ou non, appartenant à l'intervalle $[a, b]$ tel que les extrémités a, b soient parmi ces points. Il en résulte que n (> 0) est un nombre naturel. Désignons par $a = x_1 = x'_1 < x'_2 < \dots < x'_p = x_{n+1} = b$ les points distincts parmi les points x_α et soient $k_1, k_2, \dots, k_p$ leur ordre de multiplicité respectifs. Nous avons donc $2 \leq p \leq n+1$, $k_1, k_2, \dots, k_p$ sont des nombres naturels, $k_1 + k_2 + \dots + k_p = n+1$ et $\max(k_1, k_2, \dots, k_p) \leq n$.

Conformément à la notation des points x_α, x'_α , nous avons

$$x_{k_1+k_2+\dots+k_{\alpha-1}+\beta} = x'_\alpha, \quad (\beta = 1, 2, \dots, k_\alpha; \alpha = 1, 2, \dots, p),$$

($k_1 + k_2 + \dots + k_{\alpha-1}$ est remplacé par 0 si $\alpha = 1$).

Il existe une fonction continue $G(x)$, complètement déterminée, telle que l'on ait

$$(1) \quad [x_1, x_2, \dots, x_{n+1}; f] = \int_a^b G(x) f^{(n)}(x) dx,$$

où nous avons désigné par $[x_1, x_2, \dots, x_{n+1}; f]$ la différence divisée de la fonction f sur les noeuds x_α , ($\alpha = 1, 2, \dots, n+1$).

La formule (1) est un cas particulier d'une formule de R. v. Mises [4]. Lorsque $n = \max(k_1, k_2, \dots, k_p)$, ce qui a lieu si et seulement si $p = 2$ et $k_1 = 1$ ou $k_2 = 1$, la propriété résulte de la formule ($1 \leq k \leq n$)

$$(2) \quad [a, a, \dots, a, \underbrace{b, b, \dots, b}_{n+1-k}; f] = \frac{1}{(k-1)!(n-k)!(b-a)^n} \int_a^b (x-a)^{n-k} (b-x)^{k-1} f^{(n)}(x) dx$$

qu'il est facile d'obtenir, en calculant l'intégrale du second membre par des intégrations par parties répétées.

2. La formule (1) peut aussi être déduite d'une autre de G. Kowalewski [3] relative au reste de la formule d'interpolation de Lagrange (de Lagrange-Hermite en général).

Pour simplifier, supposons que les noeuds x_α , ($\alpha = 1, 2, \dots, n+1$), soient distincts, donc que $a = x_1 < x_2 < \dots < x_n < x_{n+1} = b$. Posons $l(x) = \prod_{\alpha=1}^n (x - x_\alpha)$ et considérons les polynômes fondamentaux d'interpolation

$$l_\alpha(x) = \frac{l(x)}{(x - x_\alpha) l'(x_\alpha)}, \quad (\alpha = 1, 2, \dots, n), \text{ relatifs aux noeuds } x_\alpha, \quad (\alpha = 1, 2, \dots, n).$$

Désignons enfin par $L(x_1, x_2, \dots, x_n; f|x)$ le polynôme d'interpolation de Lagrange de la fonction f sur ces noeuds. G. Kowalewski obtient [3] le reste $f(x) - L(x_1, x_2, \dots, x_n; f|x) = l(x) [x_1, x_2, \dots, x_n, x; f]$ de la formule d'interpolation de Lagrange sous la forme suivante

$$(3) \quad l(x) [x_1, x_2, \dots, x_n, x; f] = \sum_{\alpha=1}^n l_\alpha(x) \int_{x_\alpha}^x \frac{(x_\alpha - u)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(u) du.$$

Si nous posons maintenant $L(x) = l(x) (x - x_{n+1})$, nous obtenons

$$l(x_{n+1}) = L'(x_{n+1}), \quad l_\alpha(x_{n+1}) = -\frac{L'(x_{n+1})}{L'(x_\alpha)}, \quad (\alpha = 1, 2, \dots, n).$$

En posant $x = x_{n+1} = b$, dans (3), nous déduisons

$$(4) \quad [x_1, x_2, \dots, x_{n+1}; f] = - \sum_{\alpha=1}^n \frac{1}{L'(x_\alpha)} \int_{x_\alpha}^b \frac{(x_\alpha - u)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(u) du.$$

3. La formule (4) nous montre que si les noeuds sont distincts la fonction $G(x)$ de la formule (1) est continue et même, si $n > 2$, a une dérivée continue d'ordre $n-2$ sur $[a, b]$ et se réduit à un polynôme de degré $n-1$ sur chacun des intervalles partiels $[x_\alpha, x_{\alpha+1}]$, ($\alpha = 1, 2, \dots, n$). Nous avons appelé autrefois une telle fonction élémentaire

d'ordre $n-1$ et nous avons montré quelle est son importance dans la théorie des fonctions convexes d'ordre supérieur [6]. On les appelle aujourd'hui aussi des „spline“ fonctions de degré $n-1$. I. J. Schoenberg les a employé [9], [10] dans d'intéressantes recherches sur la quadrature approchée.

Lorsque les noeuds x_α , ($\alpha = 1, 2, \dots, n+1$), ne sont pas distincts mais sont groupés dans les noeuds distincts x'_α d'ordre k_α de multiplicité respectifs, les propriétés précédentes ne sont que partiellement vérifiées. Prolongeons la fonction $G(x)$ par la valeur 0 à l'extérieur de l'intervalle $[a, b]$. La fonction $G(x)$ ainsi prolongée est définie sur $(-\infty, +\infty)$, est continue sur l'intervalle ouvert (a, b) et se réduit à un polynôme de degré $n-1$ sur chacun des intervalles $(-\infty, x'_1)$, $(x'_p, +\infty)$, $(x'_\alpha, x'_{\alpha+1})$, ($\alpha = 1, 2, \dots, p-1$). Sur le noeud x'_α , ($\alpha = 1, 2, \dots, p$), la fonction prolongée $G(x)$ est continue si $n \geq 1 + k_\alpha$ et a une dérivée continue d'ordre $n-1-k_\alpha$ si $n > 1 + k_\alpha$.

4. La fonction $G(x)$ de la formule (1) est non-négative et a une intégrale positive sur $[a, b]$. En effet, si nous posons $f = x^n$ nous déduisons

$$\int_a^b G(x) dx = \frac{1}{n!}.$$

La non-négativité de $G(x)$ sur $[a, b]$ résulte de la formule de la moyenne de Cauchy

$$(5) \quad [x_1, x_2, \dots, x_{n+1}; f] = \frac{1}{n!} f^{(n)}(\xi), \quad \xi \in (a, b).$$

En effet, si la fonction continue $G(x)$ n'est pas non-négative il existe un sous-intervalle $[\alpha, \beta]$ de longueur non nulle de $[a, b]$ sur lequel $G(x) < 0$. Soit alors $f(x)$ une fonction (continue), définie sur $[a, b]$ dont la dérivée n -ième est donnée par

$$(6) \quad f^{(n)}(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x \in [a, \alpha] \cup [\beta, b], \\ (x-\alpha)(\beta-x) \neq 0 & \text{pour } x \in (\alpha, \beta). \end{cases}$$

D'une part, de (5) il résulte que $[x_1, x_2, \dots, x_{n+1}; f] \geq 0$ (la fonction f est non-concave d'ordre $n-1$). D'autre part, de (6) il résulte que

$$\int_a^b G(x) f^{(n)}(x) dx = \int_\alpha^\beta G(x) f^{(n)}(x) dx < 0$$

ce qui contredit l'égalité (1).

Les propriétés de la fonction $G(x)$ de la formule (1) ont aussi été étudiées par D. V. Ionescu [2].

5. La formule (59) de Cauchy nous suggère la formule d'approximation

$$(7) \quad [x_1, x_2, \dots, x_{n+1}; f] \approx \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0),$$

où x_0 est un point donné. Le degré d'exactitude de cette formule est $\geq n$ et ce degré d'exactitude est $> n$ si et seulement si dans (7) nous prenons

$x_0 = \frac{1}{n+1} \sum_{\alpha=1}^{n+1} x_\alpha$. Alors le degré d'exactitude est $n+1$ et nous avons la formule d'approximation

$$(8) \quad [x_1, x_2, \dots, x_{n+1}; f] = \frac{1}{n!} f^{(n)}\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{n+1}}{n+1}\right) + R.$$

Cette formule est une formule du type Gauss [7] et a donc le reste de la forme simple [8]. Un calcul simple nous donne le reste R sous la forme

$$R = \frac{1}{(n+1) \cdot (n+2)!} \left[(n+1) \sum_{\alpha=1}^{n+1} x_\alpha^2 - \left(\sum_{\alpha=1}^{n+1} x_\alpha \right)^2 \right] \cdot [\xi_1, \xi_2, \xi_3; f^{(n)}],$$

où ξ_1, ξ_2, ξ_3 sont trois points distincts de l'intervalle (a, b) (dépendant, en général, de la fonction f).

Si la fonction f a une dérivée d'ordre $n+2$ sur (a, b) , on a aussi

$$(9) \quad R = \frac{1}{2(n+1) \cdot (n+2)!} \left[(n+1) \sum_{\alpha=1}^{n+1} x_\alpha^2 - \left(\sum_{\alpha=1}^{n+1} x_\alpha \right)^2 \right] f^{(n+2)}(\xi), \quad \xi \in (a, b).$$

La formule (8) a été examinée dans le cas particulier $p=2$ et $k_1=1$ ou $k_2=1$, par Laura Gotusso [1] qui a obtenu, dans ce cas, le reste avec un peu d'imprécision. La formule correcte de Laura Gotusso s'obtient en posant $x_1 = x_2 = \dots = x_n = x$, $x_{n+1} = x+h$ ou $x_1 = x+h$, $x_2 = x_3 = \dots = x_{n+1} = x$ dans (8) et (9). On obtient ainsi la formule d'approximation (avec reste)

$$f(x+h) = \sum_{\alpha=0}^{n-1} \frac{h^\alpha}{\alpha!} f^{(\alpha)}(x) + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}\left(x + \frac{h}{n+1}\right) + \frac{nh^{n+2}}{2(n+1) \cdot (n+2)!} f^{(n+2)}(\xi),$$

où ξ est à l'intérieur du plus petit intervalle contenant les points x , $x+h$.

6. On peut obtenir les résultats précédents sans passer par la formule (1). En effet, nous avons démontré [5] que si la fonction f est convexe d'ordre $n-1$, nous avons l'inégalité

$$[x_1, x_2, \dots, x_{n+1}; f] > \frac{1}{n!} f^{(n)}\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{n+1}}{n+1}\right)$$

(où x_α ne sont pas tous confondus). La simplicité du reste de la formule (8) en résulte alors [8].

7. On peut obtenir d'autres formules d'approximation de la différence divisée (1), en appliquant à l'intégrale du second membre une formule quelconque de quadrature. Je me contenterai d'examiner encore un cas particulier.

Faisons d'abord quelques calculs préliminaires. Les moments

$$c_n = \int_a^b G(x) x^n dx, \quad (n=0, 1, \dots),$$

peuvent être calculés à l'aide des fonctions symétriques bien connues

$$w_r = \sum_{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{n+1} = r} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_{n+1}^{\alpha_{n+1}}, \quad (r=0, 1, \dots; w_0=1),$$

la sommation étant étendue aux solutions entières nonnégatives de l'équation diophantienne $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{n+1} = r$. On peut calculer les w_r à l'aide de la formule de récurrence

$$(10) \quad w_r - p_1 w_{r-1} + p_2 w_{r-2} - \dots + (-1)^{n+1} p_{n+1} w_{r-n-1} = 0, \quad (r=1, 2, \dots),$$

en posant $w_0 = 1$, $w_{-1} = w_{-2} = \dots = w_{-n} = 0$, $p_1, p_2, \dots, p_{n+1}$ étant les fonctions symétriques fondamentales des $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$.

Si nous posons $f = x^{n+r}$ dans (1), nous obtenons

$$w_r = [x_1, x_2, \dots, x_{n+1}; x^{n+r}] = \frac{(n+r)!}{r!} \int_a^b G(x) x^r dx$$

d'où

$$c_r = \frac{r!}{(n+r)!} w_r, \quad (r=0, 1, \dots; 0! = 1).$$

8. Supposons que les noeuds x_α , ($\alpha=1, 2, \dots, n+1$), soient symétriquement distribués par rapport à l'origine, donc que $a = -b$, $x_\alpha + x_{n+2-\alpha} = 0$, ($\alpha=1, 2, \dots, n+1$). Dans ce cas on a $p_\alpha = 0$ pour α impair et de (10) il résulte que $w_r = 0$, donc aussi $c_r = 0$, pour r impair quelconque.

Nous avons la formule d'approximation ($m \geq 1$)

$$(11) \quad \int_{-b}^b G(x) f(x) dx \approx \int_{-b}^b G(x) \left[\sum_{\alpha=0}^{2m-1} \frac{x^\alpha}{\alpha!} f^{(\alpha)}(0) \right] dx = \sum_{\alpha=0}^{m-1} \frac{c_{2\alpha}}{(2\alpha)!} f^{(2\alpha)}(0),$$

dont le reste

$$(12) \quad \int_{-b}^b G(x) x^{2m} [x, \underbrace{0, 0, \dots, 0}_{2m}; f] dx$$

est de degré d'exactitude $2m - 1$ et est bien de la forme simple, donc de la forme

$$(13) \quad c_{2m} [\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{2m+1}; f],$$

les ξ_α étant $2m + 1$ points distincts de l'intervalle $(-b, b)$. Dans (12) on suppose que la fonction f ait une dérivée continue d'ordre $2m - 1$, mais le reste est de la forme (13) même si f a une dérivée continue d'ordre $2m - 2$ seulement. Le reste peut donc se mettre sous la forme

$$\frac{2c_{2m}}{(2m)!} [\xi_1, \xi_2, \xi_3; f^{(2m-2)}],$$

ξ_1, ξ_2, ξ_3 étant trois points distincts de l'intervalle $(-b, b)$.

Nous déduisons que si les noeuds x_α , ($\alpha = 1, 2, \dots, n + 1$), sont symétriquement distribués par rapport à l'origine et si $x_{n+1} = -x_1 = b (> 0)$ nous avons la formule d'approximation

$$[x_1, x_2, \dots, x_{n+1}; f] = \sum_{\alpha=0}^{m-1} \frac{w_{2\alpha}}{(n+2\alpha)!} f^{(n+2\alpha)}(0) + \\ + \frac{2w_{2m}}{(n+2m)!} [\xi_1, \xi_2, \xi_3; f^{(n+2m-2)}],$$

où f a une dérivée continue d'ordre $n + 2m - 2$ sur $(-b, b)$ et ξ_1, ξ_2, ξ_3 sont trois points distincts de cet intervalle.

La formule (11) est encore du type Gauss, d'après la définition des formules de ce type [7].

Reçue le 13 II 1967

Université „Babeş-Bolyai”
Cluj

BIBLIOGRAPHIE

1. Gotusso L., *Una valutazione approssimata del termine complementare della formula di Taylor*. Atti del Seminario Mat. e Fizio dell'Univ. di Modena, 1964, **XIII**, pp. 221-229.
2. Ionescu D. V., *Quadraturi Numerice*. Ed. Tehn. Buc., 1957.
3. Kowalewski G., *Interpolation und genäherte Quadratur*. Leipzig u. Berlin, 1932.
4. v. Misess R., *Über allgemeine Quadraturformeln*. J. f. reine u. angew. Math., 1936, **174**, S. 56-67.

5. Popoviciu T., *Notes sur les fonctions convexes d'ordre supérieur (V)*. Bull. de la section sci. Acad. Roumaine, 1940, **22**, pp. 351-356.
6. — *Notes sur les fonctions convexes d'ordre supérieur (IX)*. Bull. math. de la Soc. Roumaine des sciences, 1941, **43**, pp. 85-141.
7. — *Asupra unei generalizări a formulei de integrare numerică a lui Gauss*. St. și cerc. şt., Acad. R. P. R., filiala Iaşi, Matem., 1955, **VI**, pp. 29-57.
8. — *Sur le reste dans certaines formules linéaires d'approximation de l'analyse*. Mathematika, 1959, **1** (24), pp. 95-142.
9. Schoenberg I. J., *On monosplines of least deviation and best quadrature formulae*. J. SIAM Numer. Anal., 1965, **2**, pp. 144-170.
10. — *On monosplines of least deviation and best quadrature formulae (II)*. J. SIAM Numer. Anal., 1966, **3**, pp. 321-328.

OBSERVAȚII ASUPRA RESTULUI ANUMITOR FORMULE DE APROXIMARE A UNEI DIFERENȚE DIVIZATE PRIN DERIVATE

(Rezumat)

Se fac câteva considerațiuni asupra reprezentării (1) a unei diferențe divizate. Se demonstrează apoi că restul formulei de aproximare (8) are o formă simplă. Lucrarea se încheie cu unele generalizări ale acestei formule.