BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAȘI

SERIE NOUĂ

Tomul XIII (XVII)

FASC. 3–4

1967

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAȘI
SERIE NOUĂ
BULLETIN OF THE POLYTECHNIC INSTITUTE OF JASSY
ИЗВЕСТИЯ ЯССКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
Tomul XIII (XVII), fasc. 3—4 1967

SUMAR

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIII (XVII), Fasc. 3—4, 1967

C. D. 517.52

REMARQUES SUR LE RESTE DE CERTAINES FORMULES D'APPROXIMATION D'UNE DIFFÉRENCE DIVISÉE PAR DES DÉRIVÉES

PAR

TIBERIU POPOVICIU
membre de l'Académie de la République Socialiste de Roumanie

1. Considérons une fonction f définie et ayant une dérivée n-ième continue sur l'intervalle fini et fermé $[a, b]$, $(a < b)$.

Soient $a = x_1 \leqq x_2 \leqq \ldots \leqq x_n \leqq x_{n+1} = b$, $n + 1$ points distincts ou non, appartenant à l'intervalle $[a, b]$ tel que les extrémités a, b soient parmi ces points. Il en résulte que n (> 0) est un nombre naturel. Désignons par $a = x_1 = x'_1 < x'_2 < \ldots < x'_p = x_{n+1} = b$ les points distincts parmi les points x_α et soient $k_1, k_2, \ldots, k_p$ leur ordre de multiplicité respectifs. Nous avons donc $2 \leqq p \leqq n + 1$, $k_1, k_2, \ldots, k_p$ sont des nombres naturels, $k_1 + k_2 + \ldots + k_p = n + 1$ et $\max(k_1, k_2, \ldots, k_p) \leqq n$.

Conformément à la notation des points x_α, x'_α, nous avons

$$x_{k_1+k_2+\ldots+k_{\alpha-1}+\beta} = x'_\alpha, \quad (\beta = 1, 2, \ldots, k_\alpha;\ \alpha = 1, 2, \ldots, p),$$

($k_1 + k_2 + \ldots + k_{\alpha-1}$ est remplacé par 0 si $\alpha = 1$).

Il existe une fonction continue $G(x)$, complètement déterminée, telle que l'on ait

$$[x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; f] = \int_a^b G(x) f^{(n)}(x)\, dx, \tag{1}$$

où nous avons désigné par $[x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; f]$ la différence divisée de la fonction f sur les noeuds x_α, $(\alpha = 1, 2, \ldots, n + 1)$.

La formule (1) est un cas particulier d'une formule de R. v. Mises [4]. Lorsque $n = \max(k_1, k_2, \ldots, k_p)$, ce qui a lieu si et seulement si $p = 2$ et $k_1 = 1$ ou $k_2 = 1$, la propriété résulte de la formule $(1 \leqq k \leqq n)$

$$[\underbrace{a, a, \ldots, a}_{k}, \underbrace{b, b, \ldots, b}_{n+1-k}; f] =$$

(2) $$= \frac{1}{(k-1)!\,(n-k)!\,(b-a)^n} \int_a^b (x-a)^{n-k}(b-x)^{k-1} f^{(n)}(x)\,dx$$

qu'il est facile d'obtenir, en calculant l'intégrale du second membre par des intégrations par parties répétées.

2. La formule (1) peut aussi être déduite d'une autre de G. Kowalewski [3] relative au reste de la formule d'interpolation de Lagrange (de Lagrange-Hermite en général).

Pour simplifier, supposons que les noeuds x_α, $(\alpha = 1, 2, \ldots, n+1)$, soient distincts, donc que $a = x_1 < x_2 < \ldots < x_n < x_{n+1} = b$. Posons $l(x) = \prod_{\alpha=1}^{n} (x - x_\alpha)$ et considérons les polynômes fondamentaux d'interpolation $l_\alpha(x) = \frac{l(x)}{(x-x_\alpha)\, l'(x_\alpha)}$, $(\alpha = 1, 2, \ldots, n)$, relatifs aux noeuds x_α, $(\alpha = 1, 2, \ldots, n)$. Désignons enfin par $L(x_1, x_2, \ldots, x_n; f \mid x)$ le polynôme d'interpolation de Lagrange de la fonction f sur ces noeuds. G. Kowalewski obtient [3] le reste $f(x) - L(x_1, x_2, \ldots, x_n; f \mid x) = l(x)\,[x_1, x_2, \ldots, x_n, x; f]$ de la formule d'interpolation de Lagrange sous la forme suivante

(3) $$l(x)\,[x_1, x_2, \ldots, x_n, x; f] = \sum_{\alpha=1}^{n} l_\alpha(x) \int_{x_\alpha}^{x} \frac{(x_\alpha - u)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(u)\,du.$$

Si nous posons maintenat $L(x) = l(x)(x - x_{n+1})$, nous obtenons

$$l(x_{n+1}) = L'(x_{n+1}), \quad l_\alpha(x_{n+1}) = -\frac{L'(x_{n+1})}{L'(x_\alpha)}, \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, n).$$

En posant $x = x_{n+1} = b$, dans (3), nous déduisons

(4) $$[x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; f] = -\sum_{\alpha=1}^{n} \frac{1}{L'(x_\alpha)} \int_{x_\alpha}^{b} \frac{(x_\alpha - u)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(u)\,du.$$

3. La formule (4) nous montre que si les noeuds sont distincts la fonction $G(x)$ de la formule (1) este continue et même, si $n > 2$, a une dérivée continue d'ordre $n-2$ sur $[a, b]$ et se réduit à un polynôme de degré $n-1$ sur chacun des intervalles partiels $[x_\alpha, x_{\alpha+1}]$, $(\alpha = 1, 2, \ldots, n)$. Nous avons appellé autrefois une telle fonction une fonction élémentaire

d'ordre $n-1$ et nous avons montré quelle est son importance dans la théorie des fonctions convexes d'ordre supérieur [6]. On les appelle aujourd'hui aussi des „spline" fonctions de degré $n-1$. I. J. Schoenberg les a employé [9], [10] dans d'intéressantes recherches sur la quadrature approchée.

Lorsque les noeuds x_α, $(\alpha = 1, 2, \ldots, n+1)$, ne sont pas distincts mais sont groupés dans les noeuds distincts x'_α d'ordre k_α de multiplicité respectifs, les propriétés précédentes ne sont que partiellement vérifiées. Prolongeons la fonction $G(x)$ par la valeur 0 à l'extérieur de l'intervalle $[a, b]$. La fonction $G(x)$ ainsi prolongée este définie sur $(-\infty, +\infty)$, est continue sur l'intervalle ouvert (a, b) et se réduit à un polynôme de degré $n-1$ sur chacun des intervalles $(-\infty, x'_1)$, $(x'_p, +\infty)$, $(x'_\alpha, x'_{\alpha+1})$, $(\alpha = 1, 2, \ldots, p-1)$. Sur le noeud x'_α, $(\alpha = 1, 2, \ldots, p)$, la fonction prolongée $G(x)$ est continue si $n \geqq 1 + k_\alpha$ et a une dérivée continue d'ordre $n - 1 - k_k$ si $n > 1 + k_\alpha$.

4. La fonction $G(x)$ de la formule (1) est non-négative et a une intégrale positive sur $[a, b]$. En effet, si nous posons $f = x^n$ nous déduisons

$$\int_a^b G(x)\,dx = \frac{1}{n!}.$$

La non-négativité de $G(x)$ sur $[a, b]$ résulte de la formule de la moyenne de Cauchy

(5) $$[x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; f] = \frac{1}{n!} f^{(n)}(\xi), \quad \xi \in (a, b).$$

En effet, si la fonction continue $G(x)$ n'est pas non-négative il existe un sous-intervalle $[\alpha, \beta]$ de longueur non nulle de $[a, b]$ sur lequel $G(x) < 0$. Soit alors $f(x)$ une fonction (continue), définie sur $[a, b]$ dont la dérivée n-ième est donnée par

(6) $$f^{(n)}(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x \in [a, \alpha] \cup [\beta, b], \\ (x-\alpha)(\beta - x) \neq 0 & \text{pour } x \in (\alpha, \beta). \end{cases}$$

D'une part, de (5) il résulte que $[x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; f] \geqq 0$ (la fonction f est non-concave d'ordre $n-1$). D'autre part, de (6) il résulte que

$$\int_a^b G(x) f^{(n)}(x)\,dx = \int_\alpha^\beta G(x) f^{(n)}(x)\,dx < 0$$

ce qui contredit l'égalité (1).

Les propriétés de la fonction $G(x)$ de la formule (1) ont aussi été étudiées par D. V. Ionescu [2].

5. La formule (59) de Cauchy nous suggère la formule d'approximation

$$[x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; f] \approx \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0), \tag{7}$$

où x_0 est un point *donné*. Le degré d'exactitude de cette formule est $\geq n$ et ce degré d'exactitude est $> n$ si et seulement si dans (7) nous prenons $x_0 = \frac{1}{n+1} \sum_{\alpha=1}^{n+1} x_\alpha$. Alors le degré d'exactitude est $n+1$ et nous avons la formule d'approximation

$$[x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; f] = \frac{1}{n!} f^{(n)}\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{n+1}}{n+1}\right) + R. \tag{8}$$

Cette formule est une formule du type Gauss [7] et a donc le reste *de la forme simple* [8]. Un calcul simple nous donne le reste R sous la forme

$$R = \frac{1}{(n+1).(n+2)!} \left[(n+1) \sum_{\alpha=1}^{n+1} x_\alpha^2 - \left(\sum_{\alpha=1}^{n+1} x_\alpha \right)^2 \right] . [\xi_1, \xi_2, \xi_3; f^{(n)}],$$

où ξ_1, ξ_2, ξ_3 sont trois points distincts de l'intervalle (a, b) (dépendant, en général, de la fonction f).

Si la fonction f a une dérivée d'ordre $n+2$ sur (a, b), on a aussi

$$R = \frac{1}{2(n+1).(n+2)!} \left[(n+1) \sum_{\alpha=1}^{n+1} x_\alpha^2 - \left(\sum_{\alpha=1}^{n+1} x_\alpha \right)^2 \right] f^{(n+2)}(\xi), \quad \xi \in (a, b). \tag{9}$$

La formule (8) a été examinée dans le cas particulier $p = 2$ et $k_1 = 1$ ou $k_2 = 1$, par Laura Gotusso [1] qui a obtenu, dans ce cas, le reste avec un peu d'imprécision. La formule correcte de Laura Gotusso s'obtient en posant $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = x$, $x_{n+1} = x + h$ ou $x_1 = x + h$, $x_2 = x_3 = \cdots = x_{n+1} = x$ dans (8) et (9). On obtient ainsi la formule d'approximation (avec reste)

$$f(x+h) = \sum_{\alpha=0}^{n-1} \frac{h^\alpha}{\alpha!} f^{(\alpha)}(x) + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}\left(x + \frac{h}{n+1}\right) + \frac{nh^{n+2}}{2(n+1).(n+2)!} f^{(n+2)}(\xi),$$

où ξ est à l'intérieur du plus petit intervalle contenant les points x, $x+h$.

6. On peut obtenir les résultats précédents sans passer par la formule (1). En effet, nous avons démontré [5] que *si la fonction f est convexe d'ordre $n-1$, nous avons l'inégalité*

$$[x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; f] > \frac{1}{n!} f^{(n)}\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{n+1}}{n+1}\right)$$

(où x_α ne sont pas tous confondus). La simplicité du reste de la formule (8) en résulte alors [8].

7. On peut obtenir d'autres formules d'approximation de la différence divisée (1), en appliquant à l'intégrale du second membre une formule quelconque de quadrature. Je me contenterai d'examiner encore un cas particulier.

Faisons d'abord quelques calculs préliminaires. Les moments

$$c_n = \int_a^b G(x) x^n \, dx, \quad (n = 0, 1, \ldots),$$

peuvent être calculés à l'aide des fonctions symétriques bien connues $w_r = \sum_{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{n+1}=r} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_{n+1}^{\alpha_{n+1}}$, $(r = 0, 1, \ldots;\ w_0 = 1)$, la sommation étant étendue aux solutions entiers nonnégatives de l'équation diophantienne $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{n+1} = r$. On peut calculer les w_r à l'aide de la formule de récurrence

$$w_r - p_1 w_{r-1} + p_2 w_{r-2} - \cdots + (-1)^{n+1} p_{n+1} w_{r-n-1} = 0, \quad (r = 1, 2, \ldots), \tag{10}$$

en posant $w_0 = 1$, $w_{-1} = w_{-2} = \cdots = w_{-n} = 0$, $p_1, p_2, \ldots, p_{n+1}$ étant les fonctions symétriques fondamentales des $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$.

Si nous posons $f = x^{n+r}$ dans (1), nous obtenons

$$w_r = [x_1, x_2, \ldots, x_{n+r}; x^{n+r}] = \frac{(n+r)!}{r!} \int_a^b G(x) x^r \, dx$$

d'où

$$c_r = \frac{r!}{(n+r)!} w_r, \quad (r = 0, 1, \ldots;\ 0! = 1).$$

8. Supposons que les noeuds x_α, $(\alpha = 1, 2, \ldots, n+1)$, soient symétriquement distribués par rapport à l'origine, donc que $a = -b$, $x_\alpha + x_{n+2-\alpha} = 0$, $(\alpha = 1, 2, \ldots, n+1)$. Dans ce cas on a $p_\alpha = 0$ pour α impair et de (10) il résulte que $w_r = 0$, donc aussi $c_r = 0$, pour r impair quelconque.

Nous avons la formule d'approximation $(m \geq 1)$

$$\int_{-b}^{b} G(x) f(x) \, dx \approx \int_{-b}^{b} G(x) \left[\sum_{\alpha=0}^{2m-1} \frac{x^\alpha}{\alpha!} f^{(\alpha)}(0) \right] dx = \sum_{\alpha=0}^{m-1} \frac{c_{2\alpha}}{(2\alpha)!} f^{(2\alpha)}(0), \tag{11}$$

dont le reste

$$(12) \qquad \int_{-b}^{b} G(x)\, x^{2m} [x, \underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{2m}; f]\, dx$$

est de degré d'exactitude $2m - 1$ et est bien de la forme simple, donc de la forme

$$(13) \qquad c_{2m} [\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{2m+1}; f],$$

les ξ_α étant $2m + 1$ points distincts de l'intervalle $(-b, b)$. Dans (12) on suppose que la fonction f ait une dérivée continue d'ordre $2m - 1$, mais le reste est de la forme (13) même si f a une dérivée continue d'ordre $2m - 2$ seulement. Le reste peut donc se mettre sous la forme

$$\frac{2c_{2m}}{(2m)!} [\xi_1, \xi_2, \xi_3; f^{(2m-2)}],$$

ξ_1, ξ_2, ξ_3 étant trois points distincts de l'intervalle $(-b, b)$.

Nous déduisons que si les noeuds x_α, $(\alpha = 1, 2, \ldots, n+1)$, sont symétriquement distribués par rapport à l'origine et si $x_{n+1} = -x_1 = b\,(> 0)$ nous avons la formule d'approximation

$$[x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; f] = \sum_{\alpha=0}^{m-1} \frac{w_{2\alpha}}{(n+2\alpha)!} f^{(n+2\alpha)}(0) +$$

$$+ \frac{2w_{2m}}{(n+2m)!} [\xi_1, \xi_2, \xi_3; f^{(n+2m-2)}],$$

où f a une dérivée continue d'ordre $n + 2m - 2$ sur $(-b, b)$ et ξ_1, ξ_2, ξ_3 sont trois points distincts de cet intervalle.

La formule (11) est encore du type Gauss, d'après la définition des formules de ce type [7].

Reçue le 13 II 1967

Université „Babeş-Bolyai"
Cluj

BIBLIOGRAPHIE

1. Gotusso L., *Una valutazione approssimata del termine complementare della formula di Taylor.* Atti del Seminario Mat. e Fizico dell'Univ. di Modena, 1964, **XIII**, pp. 221-229.
2. Ionescu D. V., *Cuadraturi Numerice.* Ed. Tehn. Buc., 1957.
3. Kowalewski G., *Interpolation und genäherte Quadratur.* Leipzig u. Berlin, 1932.
4. v. Misess R., *Über allgemeine Quadraturformeln.* J. f. reine u. angew. Math., 1936, **174**, S. 56–67.

5. Popoviciu T., *Notes sur les fonctions convexes d'ordre supérieur* (V). Bull. de la section sci. Acad. Roumaine, 1940, **22**, pp. 351—356.
6. — *Notes sur les fonctions convexes d'ordre supérieur* (IX). Bull. math. de la Soc. Roumaine des sciences, 1941, **43**, pp. 85—141.
7. — *Asupra unei generalizări a formulei de integrare numerică a lui Gauss.* St. şi cerc. şt., Acad. R. P. R., filiala Iaşi, Matem., 1955, **VI**, pp. 29—57.
8. — *Sur le reste dans certaines formules linéaires d'approximation de l'analyse.* Mathematica, 1959, **1** (24), pp. 95—142.
9. Schoenberg I. J., *On monosplines of least deviation and best quadrature formulae.* J. SIAM Numer. Anal., 1965, **2**, pp. 144—170.
10. — *On monosplines of least deviation and best quadrature formulae (II).* J. SIAM Numer. Anal., 1966, **3**, pp. 321—328.

OBSERVAŢII ASUPRA RESTULUI ANUMITOR FORMULE DE APROXIMARE A UNEI DIFERENŢE DIVIZATE PRIN DERIVATE

(Rezumat)

Se fac cîteva consideraţiuni asupra reprezentării (1) a unei diferenţe divizate. Se demonstrează apoi că restul formulei de aproximare (8) are o formă simplă. Lucrarea se încheie cu unele generalizări ale acestei formule.