

COLLOQUE SUR LA THÉORIE DE L'APPROXIMATION DES FONCTIONS,
Cluj, 15-20 Septembre, 1967.

SUR LA CONSERVATION DE L'ALLURE D'UNE
FONCTION PAR INTERPOLATION

par
TIBERIU POPOVICIU
à Cluj

§ 1.

Considérons une fonction $f = f(x)$ réelle, d'une variable réelle et φ une fonction d'approximation de f ,

$$(1) \quad f \approx \varphi.$$

La fonction φ est choisie dans un certain ensemble déterminé de fonctions d'approximation. On peut, par exemple, choisir φ dans un ensemble vérifiant certaines conditions interpolatoires. On peut en général supposer que les fonctions f, φ soient définies sur le même ensemble de l'axe réel, mais cette hypothèse n'est pas essentielle. Toutefois si on veut utiliser l'égalité approximative (1) à l'approximation des valeurs de la fonction f par les valeurs correspondantes de la fonction φ , il faut supposer que φ soit définie sur un ensemble qui contienne l'ensemble de définition de φ .

Dans les problèmes d'approximation on cherche en général une fonction d'approximation φ de manière que l'erreur $f - \varphi$ vérifie certaines restrictions imposées par la nature même du problème considéré.

Mais il est important de chercher à conserver par

La fonction interpolatrice $P(x_0, x_1, \dots, x_n; f | x)$ conserve le signe de la fonction f . On peut facilement démontrer cette propriété. Elle résulte aussi de la formule

$$(2) \quad P(x_0, x_1, \dots, x_n; f | x) = \sum_{\alpha=0}^n \varphi_{\alpha}(x) f(x_{\alpha}),$$

où les fonctions φ_{α} , $\alpha = 0, 1, \dots, n$ définies sur $[a, b]$ sont des fonctions polygonales particulières, ayant les noeuds x_{α} , $\alpha = 0, 1, \dots, n$, indépendantes de la fonction f et données par les formules

$$\varphi_{\alpha} = \frac{(x_{\alpha+1} - x_{\alpha}) |x - x_{\alpha-1}| + (x_{\alpha-1} - x_{\alpha+1}) |x - x_{\alpha}| + (x_{\alpha} - x_{\alpha-1}) |x - x_{\alpha+1}|}{2(x_{\alpha+1} - x_{\alpha})(x_{\alpha} - x_{\alpha-1})},$$

si $\alpha = 1, 2, \dots, n-1$. Si $\alpha = 0, n$, nous avons

$$\varphi_0 = \frac{|x - x_1| - x + x_1}{2(x_1 - a)},$$

$$\varphi_n = \frac{|x - x_{n-1}| + x - x_{n-1}}{2(b - x_{n-1})}.$$

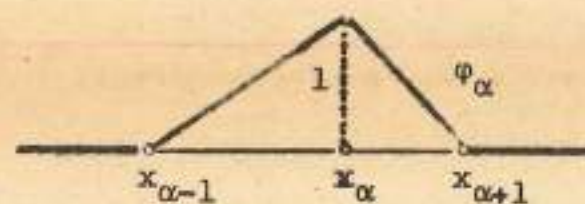


Fig. 2

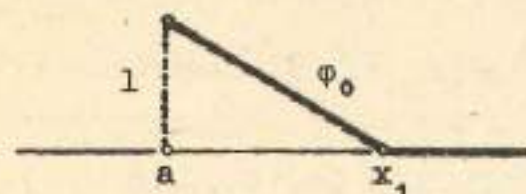


Fig. 3

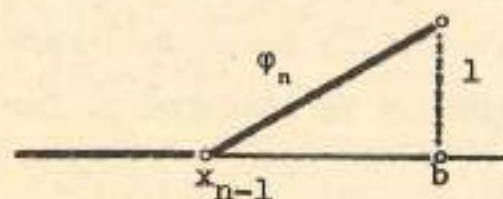


Fig. 4

La propriété de conservation du signe peut être énoncée de la façon suivante:

Si la fonction f est non-négative, positive, négative, respectivement non-positive (sur $[a, b]$), la fonction polygonale (2) est aussi non-négative, positive, négative respectivement non-positive (sur $[a, b]$).

Si nous appliquons la formule de transformation d'Abel au second membre de la formule (2), nous déduisons

l'approximation (1) certaines propriétés d'allure de la fonction f .

Evidemment, il faudrait tout d'abord préciser ce qu'on entend, par l'allure, plus exactement, par une allure déterminée, d'une fonction et ensuite, ce qu'on entend par conserver cette allure. Nous ne chercherons pas à donner une définition de l'allure d'une fonction. Nous considérons seulement quelques propriétés que nous convenons de considérer comme caractérisant certaines allures, telles que: la non-négativité, la monotonie, la convexité d'un ordre donné etc. Nous dirons toujours ce qu'il faut entendre par le fait que la fonction d'approximation conserve une allure donnée de la fonction f .

§ 2.

Commençons par un exemple. Soit f une fonction définie sur l'intervalle fini, et fermé $[a, b]$ et soit $P(x_0, x_1, \dots, x_n; f | x)$ la fonction polygonale „inscrite” suivant les sommets, ou plutôt les noeuds $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$. Cette fonction est caractérisée par les propriétés interpolatoires

$$P(x_0, x_1, \dots, x_n; f | x_{\alpha}) = f(x_{\alpha}), \quad \alpha = 0, 1, \dots, n$$

et par le fait qu'elle est continue sur $[a, b]$, étant linéaire sur chacun des intervalles partiels $[x_{\alpha-1}, x_{\alpha}]$, $\alpha = 1, 2, \dots, n$ déterminés par les noeuds.

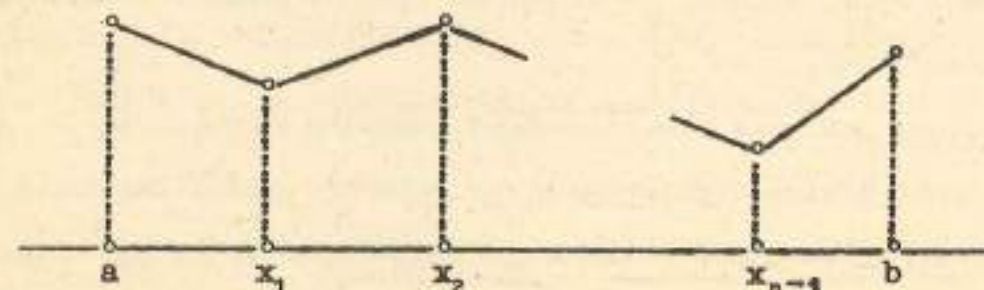


Fig. 1

$$= \frac{f(x_{\alpha-2})}{(x_{\alpha-2}-x_{\alpha-1})(x_{\alpha-2}-x_{\alpha})} + \frac{f(x_{\alpha-1})}{(x_{\alpha-1}-x_{\alpha})(x_{\alpha-1}-x_{\alpha-2})} + \frac{f(x_{\alpha})}{(x_{\alpha}-x_{\alpha-1})(x_{\alpha}-x_{\alpha-2})}$$

sont les différences divisées d'ordre 2 sur les noeuds

$x_{\alpha-2}, x_{\alpha-1}, x_{\alpha}, \alpha = 2, 3, \dots, n$.

Les fonctions χ_{α} sont non-concaves (habituelles) et nous en déduisons la propriété suivante de la conservation de la convexité (plus exactement, de la non-concavité) habituelle (d'ordre 1):

Si la fonction f est non-concave, respectivement non-convexe d'ordre 1, la fonction polygonale (4) est aussi non-concave respectivement non-convexe d'ordre 1.

Tandis que la conservation du signe et de la monotonie ont lieu au sens strict, la conservation de la convexité d'ordre 1 a lieu seulement au sens large. Ceci signifie que si la fonction non-négative (ou non-décroissante) f est, en particulier, positive (ou croissante), la fonction polygonale (2) est non seulement non-négative (ou non-décroissante), mais est de plus, positive (ou croissante). En même temps, si la fonction non-concave d'ordre 1, f est convexe d'ordre 1, la fonction polygonale (2) est seulement non-concave d'ordre 1 sans être nécessairement convexe d'ordre 1.

Nous allons faire encore une remarque sur les fonctions polygonales. Ce sont des fonctions continues qui se réduisent à un polynôme de degré 1 sur chacun des intervalles $[x_{\alpha-1}, x_{\alpha}]$, $\alpha = 1, 2, \dots, n$, déterminés par les noeuds. On peut les définir aussi comme des combinaisons linéaires d'un polynôme de degré 1 et d'un nombre fini de fonctions de la forme $|x - \lambda| + x - \lambda$, où $\lambda \in [a, b]$. En général, une combinaison linéaire d'un polynôme de degré n et d'un nombre fini de fonctions de la forme $(|x - \lambda| + x - \lambda)^n$, où $\lambda \in [a, b]$, est dite une fonction élémentaire d'ordre n ($n = \text{nombre naturel}$). Une telle fonction

$$(3) \quad P(x_0, x_1, \dots, x_n; f | x) = f(x_0) + \sum_{\alpha=1}^n \phi_{\alpha}(x) [x_{\alpha-1}, x_{\alpha}; f],$$

où

$$\phi_{\alpha} = (x_{\alpha} - x_{\alpha-1}) \sum_{\beta=\alpha}^n \psi_{\beta}(x) =$$

$$= \frac{1}{2} [|x - x_{\alpha-1}| - |x - x_{\alpha}| + x_{\alpha} - x_{\alpha-1}], \quad \alpha = 1, 2, \dots, n$$

et

$$[x_{\alpha-1}, x_{\alpha}; f] = \frac{f(x_{\alpha}) - f(x_{\alpha-1})}{x_{\alpha} - x_{\alpha-1}}$$

est la différence divisée de la fonction f sur les noeuds

$x_{\alpha-1}, x_{\alpha}$.

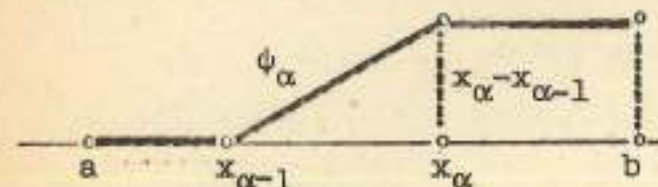


Fig. 5

Les fonctions ϕ_{α} sont non-décroissantes (et non identiquement nulles) et nous en déduisons la propriété suivante de la conservation de la monotonie de la fonction f :

Si la fonction f est non-décroissante, croissante, décroissante, respectivement non-croissante ($x \in [a, b]$), la fonction polygonale (3) est aussi non-décroissante, croissante, décroissante respectivement non-croissante (sur $[a, b]$).

Si nous appliquons encore une fois la formule de transformation d'Abel au second membre de la formule (3), nous déduisons

$$(4) \quad P(x_0, x_1, \dots, x_n; f | x) = f(x_0) + [x_0, x_1; f] (x - a) + \sum_{\alpha=2}^n \chi_{\alpha}(x) [x_{\alpha-2}, x_{\alpha-1}, x_{\alpha}; f], \quad \alpha = 2, 3, \dots, n,$$

où χ_{α} sont encore des fonctions polygonales ayant les noeuds

$x_{\alpha}, \alpha = 0, 1, \dots, n$ et sont indépendantes de la fonction f . Les

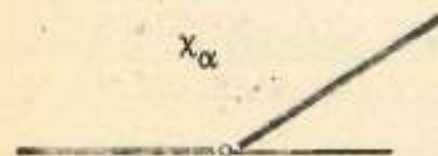


Fig. 6

$$[x_{\alpha-2}, x_{\alpha-1}, x_{\alpha}; f] = \frac{[x_{\alpha-1}, x_{\alpha}; f] - [x_{\alpha-2}, x_{\alpha-1}; f]}{x_{\alpha} - x_{\alpha-2}} =$$

propriétés de ces fonctions sont bien connues. Le cas $n=-1$ correspond à la conservation du signe de la fonction. Il y a des opérateurs très importants de cette forme. On les appelle d'habitude des opérateurs positifs. De tels opérateurs sont fournis, par exemple, par les sommes de Fejér des séries Fourier, par divers polynômes d'interpolation de Fejér etc. Les opérateurs positifs jouent un rôle très important dans la théorie de l'approximation polynomiale, trigonométrique et d'autres approximations du même type.

Depuis quelques années nous avons commencé à étudier aussi le cas $n > -1$, pour plusieurs opérateurs déterminés. Ces recherches ont commencé par la remarque que le polynôme bien connu de S. N. Bernstein

$$(5) \quad B_m[f|x] = \sum_{\alpha=0}^m f\left(\frac{\alpha}{m}\right) \binom{m}{\alpha} x^\alpha (1-x)^{m-\alpha}$$

conserve sur l'intervalle $[0,1]$ la non-concavité d'ordre n de la fonction f pour tout $n \geq -1$. Dans ce cas nous pouvons prendre $E = I = [0,1]$. Pour $n \leq m-1$ cette conservation est même au sens strict, donc si f est convexe d'ordre n ($\leq m-1$) le polynôme (5) est aussi convexe (non seulement non-concave) d'ordre n . Il est d'ailleurs utile de remarquer qu'ici il suffit même de supposer que la fonction f soit non-concave d'ordre n sur les points $\frac{\alpha}{m}$, $\alpha = 0, 1, \dots, m$. Pour $n \geq 2$ cette condition est plus large que la non-concavité d'ordre n sur un ensemble quelconque contenant ces points [6].

La propriété de conservation signalée du polynôme (5) résulte des propriétés des dérivées des fonctions convexes d'ordre supérieur et de la formule

$$(6) \quad \frac{d^k B_m[f|x]}{dx^k} = \frac{m!k!}{m^k(m-k)!} \sum_{\alpha=0}^{m-k} \left[\frac{\alpha}{m}, \frac{\alpha+1}{m}, \dots, \frac{\alpha+k}{m}; f \right] \binom{m-k}{\alpha} x^\alpha (1-x)^{m-k-\alpha}.$$

est continue et a une dérivée continue d'ordre $n-1$ (si $n > 1$) sur $[a,b]$ [7]. Autrefois nous avons montré l'importance de ces fonctions dans la théorie de l'approximation des fonctions convexes d'ordre supérieur [5]. Aujourd'hui on appelle ces fonctions aussi des „spline” fonctions. Dans le dernier temps plusieurs auteurs les ont étudié et ont montré leur importance dans la théorie de l'approximation des fonctions. Nous signalons surtout les recherches de I. J. SCHOENBERG (voir, par exemple [1] et la bibliographie de ce travail).

§ 3.

L'exemple des fonctions polygonales d'interpolation nous montre la voie de la généralisation des problèmes de conservation de certaines allures bien déterminées.

Considérons l'opérateur $F[f|x]$ défini sur l'espace des fonction f , réelles et d'une variable réelle x , définies sur un ensemble E de l'axe réel, ayant ses valeurs dans l'ensemble des fonctions définies sur l'ensemble I de l'axe réel. Dans la suite nous supposons que l'opérateur $F[f|x]$ est linéaire. Nous avons la

DÉFINITION. Nous dirons que l'opérateur $F[f|x]$ conserve (sur I) la non-concavité d'ordre n (de la fonction f) si la fonction $F[f|x]$ de x est non-concave d'ordre n (sur I) pour toute fonction f non-concave d'ordre n (sur E).

Rappelons qu'une fonction f est dite convexe, non-concave, polynomiale, non-convexe respectivement concave d'ordre n (≥ -1) sur E , si toutes les différences divisées d'ordre $n+1$, $[x_1, x_2, \dots, x_{n+2}; f]$ de cette fonction, sur $n+2$ points, ou noeuds, distincts quelconques $x_1, x_2, \dots, x_{n+2}$ de E sont positives, non-négatives, nulles, non-positives respectivement négatives. Les

teur (9) est défini même si f est seulement définie sur les points (10).

En complétant les recherches de L. FEJÉR [2], nous avons examiné la conservation de la monotonie par le polynôme (9) de L. FEJÉR [10]. C'est le cas $n = 0$ de la conservation de l'allure de la convexité d'ordre n . Parmi les résultats obtenus, signalons le suivant. Si les points (10) sont normalement distribués dans un intervalle, ou bien, si les points (10) sont les zéros du polynôme de Jacobi de degré n et dont les paramètres vérifient les inégalités $-1 \leq \alpha, \beta \leq 1$, le polynôme d'interpolation (9) conserve la monotonie de la fonction f dans un voisinage de chacune des racines de la dérivée du polynôme $(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)$. La notion de points normalement distribués est due à L. FEJÉR et intervient justement dans l'étude de la non-négativité de l'opérateur (9) de Fejér.

De la forme (7) est aussi le polynôme d'interpolation de Lagrange. Ce polynôme jouit surtout des propriétés de non conservation de l'allure de convexité [10]. On peut même étudier du point de vue de la conservation de l'allure de convexité, des opérateurs construits sur des noeuds multiples. Un tel opérateur est, par exemple, le polynôme de Lagrange-Hermite.

On a publié chez nous encore peu de travaux sur la conservation de l'allure de la convexité de divers ordres par des opérateurs $F[f|x]$, de la forme précisée dans la définition donnée. D. RIPIANU a commencé l'étude et a obtenu quelques résultats remarquables, sur les opérateurs de la forme

$$(11) \quad \int_a^b f(s) p(x,s) ds,$$

qui conservent la convexité de la fonction f jusqu'à un certain ordre donné.

A. LUPAS [3] a étudié la conservation de l'allure de

Nous avons examiné [9] la conservation de la convexité par l'opérateur d'interpolation plus général

$$(7) \quad F[f|x] = \sum_{\alpha=0}^m P_{\alpha}(x) f(x_{\alpha}),$$

où $x_0, x_1, \dots, x_m$ sont $m+1$ points distincts donnés de E et $P_0, P_1, \dots, P_m$ des fonctions définies sur I . Nous pouvons supposer que

$$(8) \quad x_0 < x_1 < \dots < x_m.$$

Nous avons trouvé les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'opérateur (7) conserve sur I la non-concavité d'ordre $n \leq m-1$, la fonction f étant non-concave d'ordre n sur les points (8). La numérotation (8) des noeuds permet d'écrire sous forme explicite ces conditions. Nous avons aussi démontré que si les points (8) sont donnés quelconques, il existe des polynômes d'interpolation de degré m de la forme (7), qui conservent toutes les convexités d'ordre $\leq m-1$ sur un intervalle fini de longueur non-nulle I [9]. Le problème de la construction de tels polynômes a été étudié aussi par D. RIPIANU [11].

Considérons le polynôme de L. FEJÉR [2]

$$(9) \quad F[f|x] = \sum_{\alpha=1}^m h_{\alpha}(x) f(x_{\alpha})$$

dont le second membre est le premier terme du polynôme de Lagrange-Hermite

$$\sum_{\alpha=1}^n h_{\alpha}(x) f(x_{\alpha}) + \sum_{\alpha=1}^n k_{\alpha}(x) f'(x_{\alpha})$$

de la fonction f sur les noeuds doubles

$$(10) \quad x_1 < x_2 < \dots < x_n.$$

C'est le polynôme de plus petit degré qui prend, ainsi que sa dérivée, les mêmes valeurs que la fonction f respectivement sa dérivée f' sur les points (10). Mais il est clair que l'opéra-

devra étudier, par exemple, la conservation, par des opérateurs trigonométriques, de la convexité par rapport à l'ensemble (linéaire) des polynômes trigonométriques d'un ordre donné. Une autre généralisation des fonctions convexes d'ordre supérieur est constituée par les fonctions qui sont d'ordre n par segments. Une telle fonction jouit de la propriété que l'ensemble de sa définition peut être décomposé en un nombre fini de sous-ensembles consécutifs tels que sur chacun, la fonction soit non-concave, ou non-convexe d'un même ordre n. Nous disons que l'ensemble E de l'axe réel est décomposé (en un nombre fini) en des sous-ensembles consécutifs si $E = \bigcup_{\alpha=1}^m E_{\alpha}$ et si, pour tout $\alpha = 1, 2, \dots, m-1$ on a $x' \in E_{\alpha}, x'' \in E_{\alpha+1} \Rightarrow x' < x''$. Cette généralisation des fonctions convexes d'ordre supérieur conduit à une allure déterminée si, par exemple, on fixe le nombre maximum des sous-ensembles consécutifs de décomposition de la forme précédente. Nous avons démontré [8] que le polynôme (5) de Bernstein conserve aussi de telles allures.

Pour donner un exemple on peut considérer qu'une fonction a une telle allure si elle est non-décroissante sur l'intervalle $[a, b)$ et non-croissante sur l'intervalle $[b, c]$, où $a < b < c$. Il y a aussi d'autres propriétés qui peuvent être considérées comme caractérisant des allures bien déterminées d'une fonction. Par exemple, le fait que la différence divisée d'ordre n d'une fonction, ou bien la variation totale d'ordre n [5] de cette fonction restent comprises entre deux nombres donnés. Une telle allure est encore conservée par les polynômes de S.N. Bernstein.

On peut encore généraliser les problèmes de conservation, en cherchant à étudier les opérateurs qui transforment les fonctions d'une allure donnée dans des fonctions d'une autre allure donnée. Il faut toujours particulariser convenablement les

convexité de certains opérateurs généralisant le polynôme de S.N. Bernstein.

§ 4.

Dans ce § nous nous proposons d'indiquer brièvement quelques problèmes de conservation d'allure, qui restent à être étudiés. Les recherches devraient être dirigées dans plusieurs directions, dont nous signalerons les suivantes:

A. Il reste à compléter les recherches sur la conservation de l'allure de la convexité par des opérateurs $F[f|x]$ linéaires et même non-linéaires et non seulement de la forme (7) ou (11). Même pour les opérateurs de la forme (7) il reste à étudier les problèmes de la conservation de l'allure de convexité d'ordre n, en supposant qu'il s'agit de fonctions f définies sur tout un intervalle contenant les points x.

B. On peut étudier des problèmes de conservation d'allures, autres que les allures de convexité. Bien entendu, il faut d'abord préciser de quelle sorte d'allure il s'agit. On peut, par exemple, partir de certaines généralisations des fonctions convexes d'ordre supérieur. On peut généraliser les fonctions convexes d'ordre supérieur de plusieurs manières. En général, on peut se rapporter à la convexité par rapport à un ensemble interpolatoire de fonctions, introduite par E. MOLDOVAN [4]. D'après notre connaissance on n'a pas encore étudié systématiquement des opérateurs conservant une telle convexité générale. Ici certainement il faudrait considérer en général des opérateurs qui ne sont pas nécessairement linéaires. Les ensembles interpolatoires linéaires constituent un cas particulier important. Dans ce cas il faudra étudier d'abord les opérateurs linéaires, en particulier ceux de la forme (7), qui conservent la convexité respective. On

problèmes, autrement on aurait des problèmes trop généraux, comprenant toute-sortes de questions qui sortent généralement de ce cadre. Telles sont, par exemple, les problèmes, très intéressants et dont l'étude a encore été commencée par L.FEJÉR, de la convexité (de divers ordres) des sommes partielles des séries trigonométriques.

C. Il serait aussi intéressant d'étudier des problèmes analogues de conservation d'allure pour des fonctions réelles de deux ou de plusieurs variables réelles. A part quelques extensions qui résultent immédiatement de l'étude des polynômes de Bernstein de plusieurs variables, et qu'on peut formuler facilement, à notre connaissance on n'a pas encore étudié de tels problèmes.

BIBLIOGRAPHIE

1. CURRY A.B., SCHOENBERG I.J., On Pólya frequency functions IV: The fondamentale spline functions and their limits. Journal d'Analyse Math., XVII, 71-107 (1966).
2. FEJÉR L., Lagrangesche Interpolation und die zugehörigen konjugierten Punkte. Math. Annalen, 106, 1-55 (1932).
3. LUPAŞ A., Some properties of the linear positive operators. Communication à I.C.M., 1966 - Moscou.
4. MOLDOVAN E., Asupra unei generalizări a noţiunii de convexitate. Studii şi cerc. de matem. Cluj, 6, 65-73 (1955).
5. POPOVICIU T., Sur l'approximation des fonctions convexes d'ordre supérieur. Mathematica, 10, 49-54 (1934).
6. - Sur le prolongement des fonctions convexes d'ordre supérieur. Bull. Math. Soc. Roum. Sci, 36, 75-108 (1934).
7. - Notes sur les fonctions convexes d'ordre supérieur (IX) ibid., 43, 85-141 (1942).
8. - Les polynômes de S.N. Bernstein et le problème de l'interpolation. Commun. Congres Amsterdam, 1954.
9. - Sur la conservation de l'allure de convexité d'une fonction par ses polynômes d'interpolation. Mathematica, 3 (26), 311-329 (1961).
10. - Sur la conservation par le polynôme d'interpolation de L. Fejér, du signe ou de la monotonie de la fonction. Analele St. Univ. Iaşi, VIII, 65-84 (1962).
11. RIPIANU D., Sur certains polynômes d'interpolation, Mathematica, 5 (28), 109-129 (1963).